

밀도법 기반 위상 최적설계의 실험적 검증

차 송 현¹ · 이 승 욱¹ · 조 선 호^{1*}

¹서울대학교 조선해양공학과 아이소-지오메트릭 최적설계 창의연구단

Experimental Validation of Topology Design Optimization

Song-Hyun Cha¹, Seung-Wook Lee¹ and Seonho Cho^{1*}

¹National Creative Research Initiatives(NCRI) Center for Isogeometric Optimal Design, Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-744, Korea

Abstract

From the numerical results of density-based topology design optimization, a CAD geometric model is constructed and fabricated using 3D printer to experimentally validate the optimal design. In the process of topology design optimization, we often experience checkerboard phenomenon and complicated branches, which could result in the manufacturing difficulty of the obtained optimal design. Sensitivity filtering and morphology methods are used to resolve the aforementioned issues. Identical volume fraction is used in both numerical and experimental models for precise validation. Through the experimental comparison of stiffness in various designs including the optimal design, it turns out that the optimal design has the highest stiffness and the experimental result of compliance matches very well with the numerical one.

Keywords : topology design optimization, morphology method, sensitivity filtering, 3D printer

1. 서 론

위상 최적설계는 재료 물성치에 대한 설계민감도와 수학적 최적화를 결합하여 주어진 재료량 제한조건 하에 최적의 재료분포를 찾는 설계기법이다. 1988년 Bendsoe와 Kikuchi가 균질화(Homogenization) 기법에 위상 최적화 방법을 도입하여 사용한 이후, 많은 위상 최적화 방법은 선형 및 비선형 구조문제(Cho *et al.*, 2003)를 해결하는 방법으로 개발되어 왔다. 일반적으로 위상 최적설계 문제는 많은 설계변수를 포함하기 때문에 효율적으로 설계민감도를 얻을 수 있는 방법이 요구된다. 여러 설계민감도 해석기법 중 연속체 기반 에조인 변수법(Adjoint variable method: Haug *et al.*, 1986)은 많은 수의 설계변수를 갖는 문제에서 가장 효율적이어서 광범위하게 사용되고 있다.

지금까지 수치적 위상 최적설계 기법은 여러 가지로 개발되어 있으나 실제 실험적으로 검증한 경우는 극히 드물었다. 본

논문에서는 선형 탄성체 문제에 대해 에조인 변수법을 활용하여 밀도법 기반(Density method)의 위상 최적설계를 수행하였고, 그 결과를 CAD 모델로 변환하여 3차원 프린터로 실험 모델을 제작하였다. 최적설계 결과를 제작할 때 위상설계 과정에서 나타날 수 있는 체커보드(Checkerboard)현상이나 잔가지(Branch)는 민감도 필터링(Sensitivity Filtering) 기법을 활용하여 제거하였으며, 밀도법 기반 위상 최적설계에서 나타나는 암시적 경계는 모폴로지(Morphology) 기법(Lee *et al.*, 2003)을 이용하여 개선하였다. 또한 위상 최적설계 구조물과 동일한 부피를 갖는 대조군을 설정한 후, 동일한 조건 하에서 비교함으로써 위상 최적설계 결과의 타당성을 실험적으로 확인하였다.

2. 선형 탄성 문제에 대한 설계민감도 해석

선형 탄성체에 대하여 변분방정식은 설계변수 벡터 u 에

* Corresponding author:

Tel: +82-02-880-7322; E-mail: secho@snu.ac.kr
Received June 17 2013; Revised August 1 2013;
Accepted August 2 2013

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

관하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = l_u(\bar{\mathbf{z}}), \quad \forall \bar{\mathbf{z}} \in \mathcal{Z} \quad (1)$$

여기서, \mathbf{z} , $\bar{\mathbf{z}}$, \mathcal{Z} 는 각각 변위, 가상변위(Virtual displacement), 변위공간(Kinematically admissible displacement space)이다. $a_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ 과 $l_u(\bar{\mathbf{z}})$ 는 각각 변형에너지 형식(Bilinear strain energy form)과 하중 형식(Linear load form)이며 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &\equiv \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{ij}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega & (2) \\ &= \iiint_{\Omega} c_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{kl}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega \end{aligned}$$

$$l_u(\bar{\mathbf{z}}) \equiv \iiint_{\Omega} f_i z_i d\Omega = \iiint_{\Gamma_t} T_i z_i d\Gamma_t \quad (3)$$

일반적인 성능함수(Performance functional)는 다음과 같이 적분식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Psi = \iiint_{\Omega} g(\mathbf{z}, \nabla \mathbf{z}, \mathbf{u}) d\Omega \quad (4)$$

성능함수 Ψ 의 설계변수 \mathbf{u} 에 대한 1차 변분식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Psi' = \iiint_{\Omega} g_u \delta \mathbf{u} d\Omega + l'_{\delta u}(\lambda) - a'_{\delta u}(\mathbf{z}, \lambda) \quad (5)$$

목적함수인 구조물의 컴플라이언스에 대한 설계변수에 대한 구배, 즉 설계민감도를 구하기 위해 변형에너지 형식의 설계변수인 재료 물성치에 대한 1차 변분을 구해보면 다음과 같다.

$$a'_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \iiint_{\Omega} c'_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{kl}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega \quad (6)$$

외력은 설계변수인 재료 물성치에 독립적이므로 컴플라이언스의 설계민감도는 다음과 같다.

$$\Psi' = \iiint_{\Omega} g_u \delta \mathbf{u} d\Omega - \iiint_{\Omega} c'_{ijkl} \epsilon_{ij}(\mathbf{z}) \epsilon_{kl}(\lambda) \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (7)$$

3. 밀도법 기반 위상 최적설계

선형 탄성문제에 관하여, 위상 최적화 문제를 다음과 같이

정식화할 수 있다.

$$\min C = \sum_{i=1}^{NE} \rho_i u_i \quad (8)$$

subject to

$$K\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{NE} \rho_i V_0 \leq V_c \quad (10)$$

$$0 \leq \rho_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, NE \quad (11)$$

C 는 컴플라이언스(Compliance)로서 구조물 질점의 외력 \mathbf{p} 와 변위 \mathbf{u} 의 내적과 같다. K 는 구조물의 강성행렬이고, V_0 는 요소 하나의 부피이며, V_c 는 부피 제약조건이다. 또한 ρ_i 는 이 최적설계 문제의 설계변수로서 상대 재료밀도(Bulk material density)를 나타낸다. 식 (9)는 구조물이 정적 평형상태를 유지하고 있다는 제약조건이다. 설계변수인 재료분포는 다음과 같이 SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization) 방법을 이용하여, 각 요소에 대한 상대 재료밀도와 재료 물성치로 표현할 수 있다.

$$E_i = \rho_i^n E_0 \quad (i = 1, 2, \dots, NE) \quad (12)$$

여기서, E_0 는 실제 재료의 Young's Modulus이고, n 은 재료분포 형태에 관련되는 집중계수(Concentration parameter)이다. NE 는 요소의 개수이다. 상대 재료밀도는 수치적 특이성을 피하기 위하여 다음과 같이 하한을 도입한다.

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \quad (13)$$

4. 설계민감도 필터링 및 모폴로지

위상 최적화만을 수행할 경우, 방법론 자체의 수치적 불안정성에 의하여 Fig. 1, 2와 같이 체커보드 현상이 생기고,



Fig. 1 No sensitivity filtering and morphology(30%)



Fig. 2 No sensitivity filtering and morphology(50%)



Fig. 3 Only with morphology(30%)



Fig. 4 Only with morphology(50%)



Fig. 5 Only with sensitivity filtering



Fig. 6 With sensitivity filtering and morphology

많은 잔가지가 발생하며 부피 제약조건에 따라 다른 최적설계가 얻어진다(Sigmund, 1998). 모폴로지 기법만 수행한 경우에는 Fig. 3, 4에서 알 수 있듯이, 부피 제약조건에 따라 형상이 급격하게 변화한다. 이를 해결하기 위해 민감도 필터링을 도입하였는데 민감도 필터링만 수행하였을 경우에는 Fig. 5와 같이 최적 형상의 경계가 불명확하게 존재할 수 있다. 따라서 민감도 필터링과 모폴로지를 함께 수행할 경우 Fig. 6과 같이 제작이 용이한 최적형상을 얻을 수 있다.

4.1 민감도 필터링

민감도 필터링에 앞서 먼저 각 요소에 대한 이웃 요소(Neighborhood element)를 정의하는 과정이 필요하다.

Fig. 7과 같이 임의의 필터 반지름 R을 정하고 각 요소마

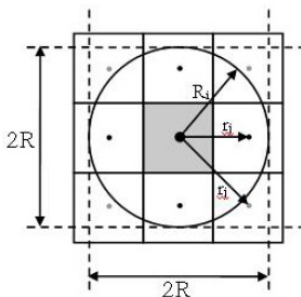


Fig. 7 Neighborhood search

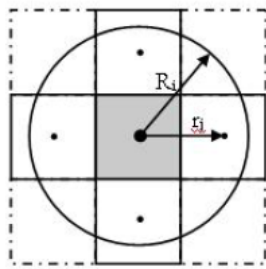


Fig. 8 Neighborhood setting

다 요소의 중심에 대한 반지름 R의 원을 그렸을 때 중심이 그 내부에 있는 요소들을 이웃 요소로 정의할 수 있다. 필터링된 민감도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i \in N_e} w(x_i) \rho_i \frac{\partial f}{\partial \rho_i}}{\rho_e \sum_{i \in N_e} w(x_i)} \quad (14)$$

$i \in N_e$ 는 i 번째 요소가 요소 e 의 이웃 요소에 속한다는 것을 의미한다. $w(x_i)$ 는 가중 함수(Weighting function)을 의미하고, ρ_e 는 요소 e 의 밀도를 나타낸다. 이러한 민감도 필터링 과정을 통하여 설계공간의 자유도를 줄어줌으로써 랭크부족(Rank deficiency) 현상을 방지하여 체커보드와 같은 수치적 불안정성을 완화시킬 수 있다.

4.2 모폴로지 기법

모폴로지 기법을 수행할 때 기준으로 하는 지표는 절점밀도(Nodal density)이다. 따라서 요소 밀도(Element density)를 이용하여 절점밀도를 다음과 같이 나타낸다.

$$\rho_{node} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k \quad (15)$$

$$\rho_{node} = \begin{cases} 0 & \rho_{node} < \rho_c \\ 1 & \rho_{node} \geq \rho_c \end{cases} \quad (16)$$

ρ_k 는 절점이 속한 요소의 밀도이고, ρ_c 는 임의로 설정하는 임계 밀도이다. 식 (16)은 임계밀도를 기준으로 절점밀도를 이진화시킨다. 모폴로지 기법은 크게 두 가지 과정으로 구분

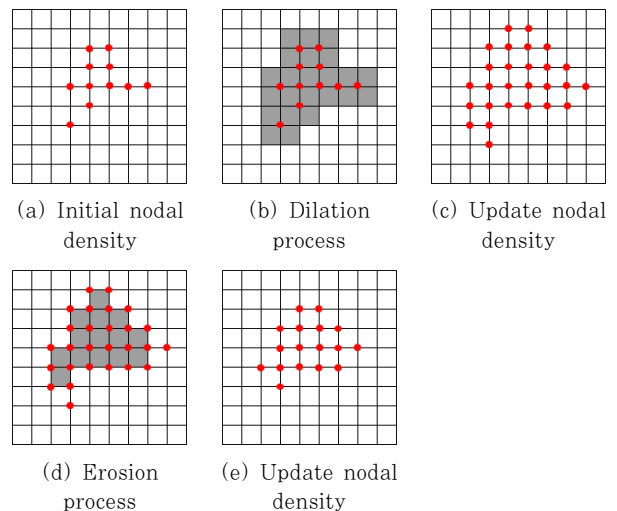


Fig. 9 Morphology process

할 수 있다. 팽창(Dilation)은 요소 주변의 모든 절점밀도가 0일 때에만 요소 밀도를 0으로 지정하고, 나머지 경우에는 1로 지정한다. 반대로 침식(Erosion)은 요소 주변의 모든 절점밀도가 1일 때에만 요소 밀도를 1로 지정하고, 나머지 경우는 0으로 지정한다. Fig. 9는 절점밀도가 정해졌을 때, 모폴로지 기법에 의해 요소 밀도가 결정되는 과정을 나타낸 것이다.

5. 제작 과정

Fig. 10은 수치해석과 실험을 수행하기 위한 예제를 나타낸 것으로, 길이 L은 18cm, 높이 H는 3cm, 두께는 1.5cm, 하중 P는 300N이며 해석에 사용된 요소는 L방향으로 360개, H방향으로 60개로 총 21,600개이다.

Fig. 11은 실험용 모델의 제작과정을 나타내는데, 위상 최적설계로 얻은 형상에 대하여 모폴로지 기법을 적용하여 제작이 가능한 형태를 얻는다. 최종적으로 얻은 재료 밀도 정보를 이용하여 Robert McNeel & Associates에서 만든 상용 소프트웨어인 Rhinoceros를 사용하여 점 정보를 CAD 모델로 변환시킨다.

점 정보를 CAD 정보로 변환하는 과정에서 부피가 증가하는데 이로 인하여 실험에 사용하는 구조물의 부피율과 '모폴로지' 까지 수행한 수치해석 결과의 부피율이 일치하지 않는다. 따라서 수치해석과 실험값의 유의미한 비교를 위해 완성된 CAD 정보의 부피율이 수치해석 결과의 부피율과 일치하

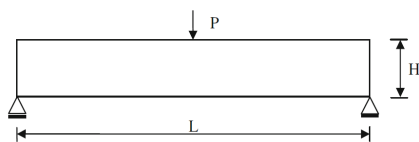


Fig. 10 Problem set

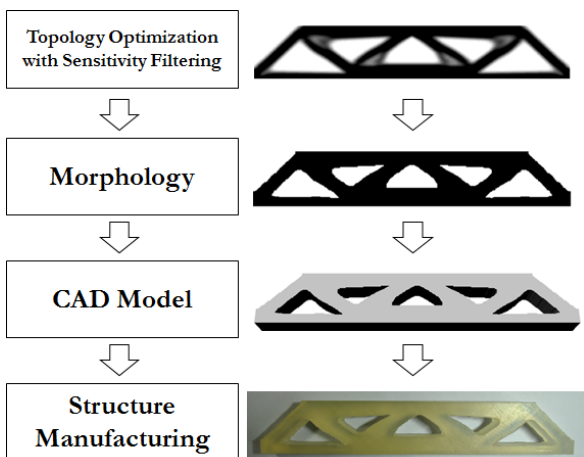


Fig. 11 Manufacturing process

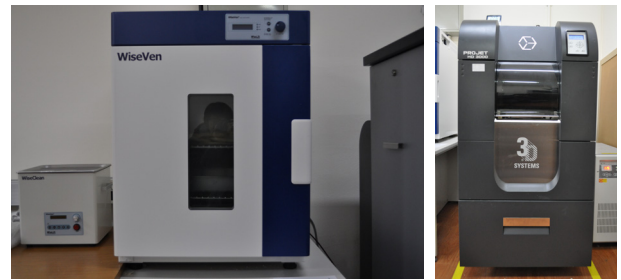


Fig. 12 3D Printing system

도록 부피 제약조건을 조정하여 수치해석을 다시 수행하였다. 이 과정에서 CAD 모델로 변환될 때와 부피율을 증가시킬 때 모두 구조물의 두께만 두꺼워지기 때문에 그 두 형상이 같다고 가정하였다. 최적설계 구조물의 제작에 사용된 3차원 프린터는 Fig. 12와 같이 298×185×203mm의 제작 공간에 328×328×606 DPI의 해상도를 갖고, 25~59 μm의 정확도를 갖는다.

6. 실험적 검증

6.1 영률 측정

Fig. 13은 최적설계 검증을 위한 굽힘 실험에 사용된 Instron사의 5톤 동적 재료시험기이다.

구조물 제작에 사용되는 재료의 물성치가 필요하기 때문에 3차원 프린터를 이용하여 Fig. 14와 같이 시편을 제작하여 인장실험을 통해 영률을 측정하였다. Fig. 15와 같이 응력과 변형률의 관계가 선형인 영역 내에서 재료실험을 수행하였다.

Table 1과 같이 다섯 번의 실험을 수행하여 그 평균값으로 재료의 영률이 1356MPa임을 확인하였다.

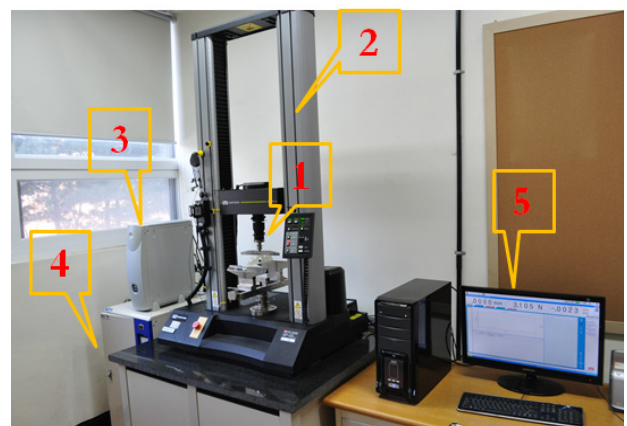


Fig. 13 Experimental equipment

1. Specimen and Bending Jig
2. Universal Testing Machine
3. FastTrack 8800 Desktop Controller
4. Power Supply
5. Desktop Computer and Postprocessing Software



Fig. 14 Tensile test

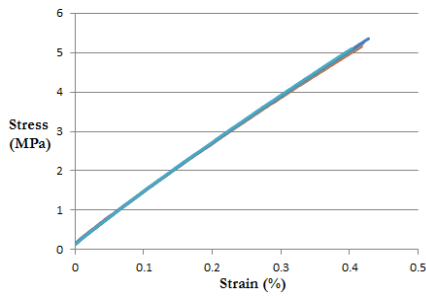


Fig. 15 Stress-strain relation



Fig. 17 Boundary condition correction

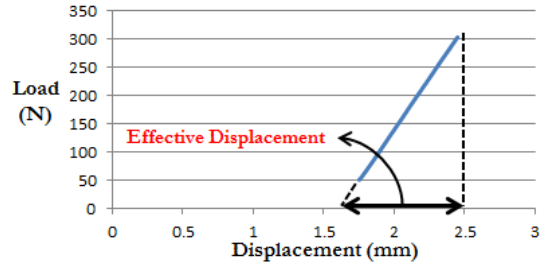


Fig. 18 Determination of precise displacement

Table 1 Young's modulus search

Test Number	1	2	3	4	5	Avg.
Young's Modulus (MPa)	1348	1358	1355	1351	1366	1356

6.2 굽힘 실험

본 논문의 수치해석은 선형 탄성조건을 가정하고 있기 때문에 실험에서도 이를 만족시켜야 하므로 최적형상과 크기가 유사한 단순보에 충분히 큰 힘을 가하면서 선형 구간을 확인하였다. 그 결과 Fig. 16과 같이 0~1000N 구간에서 선형 거동을 보였으므로 충분한 안전율을 고려하여 실험에서 가하는 하중을 300N으로 설정하였다. 선형 탄성구간임에도 불구하고, 데이터를 측정하기 시작하는 초기하중을 10N으로 설정했을 때, 모든 데이터에서 일시적으로 평평한 구간이 발생하였다. 제작한 최적 형상의 표면이 균질하지 않고, 힘을 가하는 지그가 안정적으로 접촉하기 전까지 다소 변동이 있을 수 있으므로 초기하중을 50N 정도로 설정하고 실험값을 측정하였다.

경계조건을 맨 끝 지점으로 하여 실제 실험을 하면 하중에 의한 재료의 파괴가 쉽게 발생하여 실험값의 측정이 불가능하기 때문에 양끝에서 약 5mm정도 안쪽에 경계조건을 부여하였다. 따라서 수치해석에서도 이를 반영하기 위해 최적화가 끝난 이후에 Fig. 17과 같이 경계조건을 보정한 뒤에 수치해석 값을 다시 구하였다.

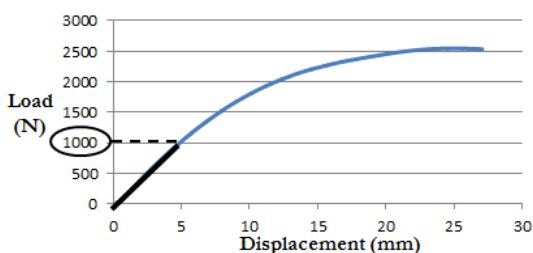


Fig. 16 Linear elastic interval

일시적으로 평평한 부분이 발생하고, 시작점이 일정하지 않기 때문에 정확한 컴플라이언스를 구하기 위해서는 Fig. 18과 같이 그래프의 기울기가 일정한 구간에서 연장선을 그려 보다 정확한 변위를 구하였다. 실험 횟수는 16번으로 하고, 상한 3개와 하한 3개를 제외한 10개의 결과를 사용한 평균을 실험값으로 정하였다.

6.3 실험 결과

최종적으로 실제로 제작한 구조물의 파괴율은 68.6%이다. 최적설계에 대하여 수치해석과 실험에서 구한 컴플라이언스는 Table 2와 같으며 약 95%의 일치율을 보였다. 또한 동일한 파괴율을 갖는 대조군에 대하여 수치해석과 실험을 수행하였으며 대조군의 컴플라이언스도 약 96%의 높은 일치율을 보였다.

대조군보다 최적설계 결과의 컴플라이언스가 작기 때문에 본 논문에서 수행한 위상 최적설계는 유효함을 알 수 있다. 그리고 수치해석 값과 실험값의 일치율이 95% 이상으로 매우 높고 최적설계 결과의 일치율과 대조군의 일치율이 거의 같으므로 실험으로 신뢰할 만한 값을 얻었음을 알 수 있다.

Table 2 Compliance comparison(N·mm)

	Numerical Result	Experiment	Agreement (%)
Optimal Design	260.89	247.51	94.87
Comparable Design	610.01	584.94	95.89

7. 결 론

본 논문에서는 밀도법 기반 위상 최적설계를 통해 얻어진

수치 결과를 CAD 정보로 변환하고 이를 3차원 프린터로 제작하여 최적설계의 타당성을 실험적으로 검증하였다. 위상 최적설계에서 얻어진 최적설계 구조물과 동일한 부피를 가지는 대조군을 설정하였고, 각 구조물의 강성을 실험을 통해 비교하여 최적설계 구조물이 가장 높은 강성을 가지고 있음을 알 수 있었고 위상 최적설계에서 목적함수인 컴플라이언스에 대한 최적설계 구조물의 실험값과 수치해석 값이 잘 일치함을 확인하였다. 따라서 수치적인 최적설계가 실제 실험에서도 유효함이 입증되었으므로 수치 최적설계의 타당성에 대한 실험적 근거를 마련하였다고 할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2008, 2010년도 미래창조과학부의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구입니다(R32-2008-000-10161-0, No. 2010-0018282). 저자들은 연구비 지원에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

Bendsøe, M.P., Kikuchi, N. (1988) Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp.197~224.

Bendsoe, M.P., Sigmund, O. (2002) *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*,

Springer, New York.

Cho, S., Jung, H. (2003) Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Displacement-loaded Nonlinear Structures, *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp.2539~2553.

Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V. (1986) *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York.

Kim, M.-G., Kim, J.-H., Cho, S. (2010) Topology Design Optimization of Heat Conduction Problems using Adjoint Sensitivity Analysis Method, *Journal of Computational Structural Engineering*, 23(6), pp.683~691.

Lee, D.H., Min, S.J. (2003) CAD Model Construction Using Topology Image, *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers A*, 27(11), pp.1925~1932.

Sigmund, O. (1997) On the Design of Compliant Mechanisms Using Topology Optimization, *Mech. Struct. & Mach.* 25(4), pp.493~524.

Sigmund, O., Peterson, J. (1998) Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing with Checkerboards, Mesh-dependencies and Local Minima, *Structural Optimization*, 16, pp.68~75.

Sigmund, O. (2001) A 99 line Topology Optimization Code Written in Matlab, *Struct Multidisc Optim.* 21, pp.120~127.

요 지

본 논문에서는 밀도법 기반 위상 최적설계를 통해 얻어진 수치 결과를 바탕으로 CAD 모델을 구성하고 이를 3차원 프린터로 제작하여 실험적으로 최적설계를 검증하였다. 위상 최적설계 과정에서는 체커보드(Checkerboard) 현상이나 잔가지가 종종 나타나는데, 이는 최적설계 구조물을 실제로 제작함에 있어서 어려움을 준다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 민감도 필터링과 모폴로지 기법을 사용하였다. 엄밀한 검증을 위하여 수치 모델과 실험 모델의 부피율을 일치시켰다. 위상 최적설계를 포함한 다양한 설계에 대하여 실험을 통해 비교하여 최적설계 구조물이 가장 높은 강성을 가지고 있음을 확인하였으며 컴플라이언스에 대한 실험결과는 수치해석 값과 잘 일치함을 확인하였다.

핵심용어 : 위상최적설계, 모폴로지 기법, 민감도 필터링, 3차원 프린터