

1차원 유한요소망 연속기법을 이용한 시간영역 탄성파의 역해석

강 준 원[†]

홍익대학교 토목공학과

Time-domain Elastic Full-waveform Inversion Using One-dimensional Mesh Continuation Scheme

Jun Won Kang[†]

Department of Civil Engineering, Hongik University, Seoul, 121-791, Korea

Abstract

This paper introduces a mesh continuation scheme for a one-dimensional inverse medium problem to reconstruct the spatial distribution of elastic wave velocities in heterogeneous semi-infinite solid domains. To formulate the inverse problem, perfectly-matched-layers(PMLs) are introduced as wave-absorbing boundaries that surround the finite computational domain truncated from the originally semi-infinite extent. To tackle the inverse problem in the PML-truncated domain, a partial-differential-equations(PDE)-constrained optimization approach is utilized, where a least-squares misfit between calculated and measured surface responses is minimized under the constraint of PML-endowed wave equations. The optimization problem iteratively solves for the unknown wave velocities with their updates calculated by Fletcher-Reeves conjugate gradient algorithms. The optimization is performed using a mesh continuation scheme through which the wave velocity profile is reconstructed in successively denser mesh conditions. Numerical results showed the robust performance of the mesh continuation scheme in reconstructing target wave velocity profile in a layered heterogeneous solid domain.

Keywords : inverse medium problem, perfectly-matched-layers(PMLs), PDE-constrained optimization, mesh continuation scheme

1. 서 론

파동을 이용해 구조물의 내부 형상과 미지의 물성치 분포를 추정하는 역해석(inverse analysis)은 1980년대 선형 역해석 알고리즘이 개발된 이후(Born *et al.*, 1980; Devaney, 1982) 현재까지 비약적인 발전을 이루어 왔다. 특히 고해상도의 결과를 얻기 위하여 파동의 복잡한 다중 반사 및 굴절 현상을 고려하는 비선형 역해석 이론이 지속적으로 발전해 왔는데(Chew *et al.*, 1990; Pratt *et al.*, 1999; Operto *et al.*, 2004; Epanomeritakis *et al.*, 2008), 오늘날 영상의학, 물리탐사, 비파괴검사, 구조물 손상평가 등의 분야에서 이에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다.

비선형 역해석 알고리즘은 일반적으로 동적응답의 전체파

형(full-waveforms)을 이용하는데, 이는 균일하지 않은 매질을 통과하는 파동이 다중의 반사, 투과, 굴절 등의 현상을 거치면서 응답의 전체파형이 시스템 내부 특성에 대한 '정보'를 담고 있기 때문이다. 이와 같은 전체파형 역해석은 시스템 물성치의 고해상도 분포를 얻을 수 있는 장점이 있는 반면에, 고도의 계산이 요구되고 일반적으로 유일해가 존재하지 않는 ill-posedness의 문제점이 있다.

이러한 역해석의 ill-posedness를 완화시키기 위하여 정규화기법, 정규화계수 연속기법, 하중의 주파수 연속기법, 유한요소망 연속기법 등 다양한 수치적 기법들이 개발되어 왔다(Vogel, 2002; Kang *et al.*, 2010; Chew *et al.*, 1995; Akcelik, 2002). 이들 중 유한요소망 연속기법은 단일 측정응답에 대하여 역해석 해의 수렴성을 증가시킬 수 있

[†] Corresponding author:

Tel: +82-2-320-1601; E-mail: jwkang@hongik.ac.kr

Received May 20 2013; Revised June 26 2013;

Accepted June 27 2013

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

는 효과적인 방법으로서 점진적으로 밀도가 증가하는 유한요소망에 대해 연속적으로 역해석을 수행하는 기법이다.

이 논문에서는 반무한 탄성체의 표면에서 측정된 변위응답을 비선형 최적화 알고리즘과 유한요소망 연속기법에 의해 역해석하여 미지의 탄성파속도 분포를 도출하는 방법을 제시한다. 이와 비슷한 역해석 문제에 대해 Kang 등(2010)이 소개한 정규화계수 연속기법, 하중의 주파수 연속기법과는 달리, 이 논문에서는 유한요소망 연속기법을 통해 역해석의 수렴성과 정확도를 높이고 목표 탄성파속도의 분포를 점진적으로 구하는 방법을 소개한다.

역해석을 위한 최적화 알고리즘으로서 편미분방정식을 구속조건으로 하는 최적화법을 이용하였다. 이를 라그랑주 승수법(Lagrange multiplier method)을 이용하여 비구속 최적화 문제로 전환하고, 라그랑지안의 1차 최적화 조건을 이용하여 목적함수를 최소화하는 최적의 탄성파속도 분포를 도출하였다. 이 비선형 최적화 문제에서는 반복계산을 통해 탄성파속도의 분포를 업데이트하는데, 이를 위해 반복계산마다 탄성과 전파의 정해석(forward analysis)을 수행해야 한다. 반무한 탄성체 영역에서의 정해석에는 계산영역의 둘레에 파동흡수 경계조건을 도입하여 반사파가 생기지 않도록 해야 한다. 이를 위해 이 연구에서는 *perfectly-matched-layers* (PMLs)라는 수치적 파동흡수층(Kang *et al.*, 2010)을 유한 계산영역의 경계조건으로 도입하였다. PML을 경계조건으로 하는 유한 영역에서의 탄성과 정해석에는 혼합유한요소법을 이용하였다.

2. PML 경계조건을 이용한 탄성파의 정해석

반무한 탄성체에서의 압축파동 거동을 모델링하기 위해 Fig. 1과 같이 수직 방향으로 이질적인 물성분포를 갖는 반무한 고체영역을 고려하였다. 이 반무한 탄성체의 일부 영역인 $0 \leq x \leq L$ 에서의 탄성과 거동을 해석하기 위하여 $L \leq x \leq L_t$ 의 위치에 PML을 도입하였다. PML을 경계조건으로 하는 이러한 1차원 유한 영역에서의 탄성과 전파는 다음과 같은 초기-경계값 문제로 표현된다(Kang *et al.*, 2010).

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cg \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + cg\sigma - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = 0 \text{ for } 0 < x < L_t, 0 < t \leq T \tag{1b}$$

subject to:

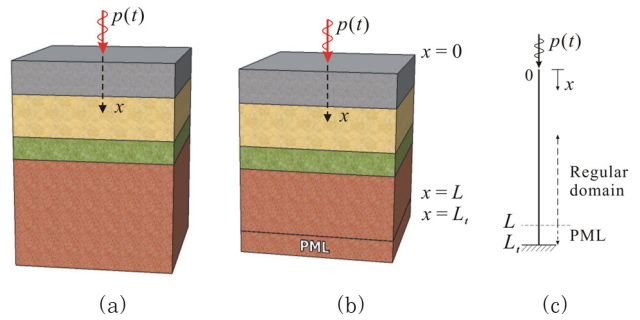


Fig. 1 (a) Original domain: horizontally-layered heterogeneous semi-infinite solid medium; (b) PML-truncated domain; (c) One-dimensional schematic of the PML-truncated domain (PML location: $L \leq x \leq L_t$)

$$v(L_t, 0) = 0 \tag{2}$$

$$\sigma(0, t) = p(t) \tag{3}$$

$$v(x, 0) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0 \tag{5}$$

$$\sigma(x, 0) = 0 \tag{6}$$

식 (1)은 변위(v)와 응력(σ)이 혼합된 연립미분방정식으로서 PML을 경계로 하는 1차원 유한 영역에서의 탄성파동 지배방정식이다(Kang *et al.*, 2010). 여기서 $v(x, t) = \rho u(x, t)$ 는 실제 변위(u(x,t))에 밀도 ρ를 곱한 의미상의 변위를 나타내고, $c \equiv c(x) = \sqrt{E/\rho}$ 는 매질의 탄성파속도이며, $g \equiv g(x)$ 는 PML에서 파동의 위상을 인위적으로 감소시키는 역할을 하는 함수로서 다음과 같이 정의된다.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \frac{3}{2L_{PML}} \log\left(\frac{1}{|R|}\right) \left(\frac{x-L}{L_{PML}}\right)^2, & L \leq x \leq L_t \end{cases} \tag{7}$$

식 (7)에서 $L_{PML} = L_t - L$ 은 PML의 길이이고, R은 탄성파의 이론적 반사계수로서 파동이 PML 끝의 고정단에 도달할 때 발생하는 이론적인 반사파의 크기를 나타낸다. g(x)는 일반영역인 $0 \leq x \leq L$ 에서 0의 값을 가지는데, 이를 식 (1)에 대입하면 1차원 표준 파동방정식인 $(Eu_{,x})_{,x} = \rho u_{,tt}$ 를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 식 (2)~(3)과 (4)~(6)은 각각 경계조건과 초기조건을 나타낸다.

이 문제에서 변위(v)와 응력(σ)은 혼합유한요소법(mixed finite element method)을 이용하여 구할 수 있다. 위 초기-경계값 문제의 변분식은 파동방정식 (1a)와 (1b)에 각각 변위와 응력의 변분함수 w(x)와 q(x)를 곱하여 전 구간 ($0 \leq x \leq L_t$)에 대해 적분하여 얻을 수 있다. 여기에 경계조건

(2)~(3)을 적용한 식은 다음과 같다.

$$\int_0^{L_i} w \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cg \frac{\partial v}{\partial t} \right) dx + \int_0^{L_i} \frac{dw}{dx} \sigma dx = -w(0)p(t) \quad (8)$$

$$- \int_0^{L_i} c^2 q \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dx + \int_0^{L_i} q \frac{\partial \sigma}{\partial t} dx + \int_0^{L_i} cgq\sigma dx = 0 \quad (9)$$

식 (8)과 (9)에서 응력과 변위의 근사함수인 v_h 와 σ_h 는 $v_h \in H^1(\Omega) \times (0, T]$, $\sigma_h \in L^2(\Omega) \times (0, T]$ 의 함수공간에 속하며, 서로 다른 기저함수(basis functions) $\phi_i(x)$ 와 $\psi_i(x)$ 를 사용하여 다음과 같이 근사된다.

$$v(x, t) \simeq v_h(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) v_i(t) \quad (10)$$

$$\sigma(x, t) \simeq \sigma_h(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \sigma_i(t) \quad (11)$$

식 (10)~(11)을 (8)~(9)에 대입하고 변분함수 $w(x)$ 와 $q(x)$ 도 기저함수 $\phi_i(x)$ 와 $\psi_i(x)$ 를 이용하여 나타내면 운동방정식 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t)$ 를 얻을 수 있고, 이로부터 노드에서의 변위와 응력 $\mathbf{u} = [\mathbf{v} \ \boldsymbol{\sigma}]^T$ 를 구할 수 있다.

3. 시간영역 전체파형을 이용한 탄성과 역해석

3.1 물성치 분포 추정을 위한 역해석 문제의 정의

반무한 고체영역의 표면에서 측정된 변위응답의 시간이력을 역해석하여 균일하지 않은 매질의 탄성파속도 분포를 도출하는 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 표현된다.

$$\text{minimize } J := \frac{1}{2} \int_0^T [v(0, t) - v_m(0, t)]^2 dt + \Upsilon(c) \quad (12)$$

subject to (1)~(6).

여기에서 $v_m(0, t)$ 는 표면($x=0$)에서 측정된 변위 응답이고 $v(0, t)$ 는 유한요소법에 의해 계산된 응답이다. 식 (12)의 최적화 문제는 파동방정식 (1)과 경계 및 초기조건을 구속조건으로 한다. 이러한 역해석에는 일반적으로 해의 유일성이 보장되지 않으므로 이러한 문제를 해결하기 위하여 목적함수 J 에 $c(x)$ 에 대한 정규화 항인 $\Upsilon(c)$ 를 포함시켰다. Total Variation 정규화기법을 사용할 때의 $\Upsilon(c)$ 는 정규화계수 R_c 를 사용하여 다음과 같은 식으로 표현될 수 있다.

$$\Upsilon(c) = R_c \int_0^{L_i} \left| \frac{dc}{dx} \right| dx. \quad (13)$$

위의 최적화 문제를 비구속 최적화 문제로 전환하기 위하여 라그랑주 승수법을 도입하였다. 식 (12)의 목적함수를 식 (1)의 지배방정식과 라그랑주 승수($\lambda_v, \lambda_\sigma$)에 의해 확장하여 다음과 같은 라그랑지안(L)을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} L(v, \sigma, \lambda_v, \lambda_\sigma, c) = & \frac{1}{2} \int_0^T [v(0, t) - v_m(0, t)]^2 dt + \Upsilon(c) \quad (14) \\ & + \int_0^T \int_0^{L_i} \lambda_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + cg \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^{L_i} \lambda_\sigma \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + cg\sigma - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) dx dt \end{aligned}$$

이 라그랑지안을 최소로 하는 탄성파속도 c 가 앞서 정의된 역해석 문제의 해이다. 최적해에서 상태변수 v, σ , 라그랑주 승수(수반변수) $\lambda_v, \lambda_\sigma$, 제어변수 c 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되는 1차 최적화 조건을 이용하여 탄성파속도 c 의 분포를 결정한다.

3.2 1차 최적화 조건

첫째로, 최적해에서 $\lambda_v, \lambda_\sigma$ 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_{\lambda_v} L = 0, \delta_{\lambda_\sigma} L = 0$)으로부터 상태방정식(state equations)과 그에 따른 경계 및 초기조건을 얻을 수 있다. 이렇게 유도한 상태문제(state problem)는 식 (1)~(6)의 정해석 문제와 동일하다.

둘째로, 최적해에서 상태변수 v, σ 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta_v L = 0, \delta_\sigma L = 0$)으로부터 다음과 같은 수반방정식(adjoint equations)과 그에 따른 경계 및 최종조건(final condition)을 얻을 수 있다.

수반문제(adjoint problem):

$$\frac{\partial^2 \lambda_v}{\partial t^2} - cg \frac{\partial \lambda_v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} \right) = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} - cg \lambda_\sigma - \frac{\partial \lambda_v}{\partial x} = 0 \text{ for } 0 < x < L_i, 0 \leq x < T \quad (15b)$$

subject to:

$$\lambda_v(L_i, t) = 0 \quad (16)$$

$$c(0)^2 \frac{\partial \lambda_v}{\partial t}(0, t) = v(0, t) - v_m(0, t) \quad (17)$$

$$\lambda_v(x, T) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial \lambda_v}{\partial t}(x, T) = 0 \tag{19}$$

$$\lambda_\sigma(x, T) = 0 \tag{20}$$

식 (15)는 PML을 경계로 하는 1차원 유한영역에서 수반 변수 $\lambda_v, \lambda_\sigma$ 에 대한 혼합 연립미분방정식으로서 (1)의 상태방정식과 유사한 연산자를 갖는다. 식 (16)~(17)은 경계조건이고 식 (18)~(20)은 최종 시간 T 에서의 최종조건이다. λ_v 와 λ_σ 역시 혼합유한요소법을 이용하여 구할 수 있다. 위 최종-경계값 문제의 변분식은 (15a)와 (15b)에 각각 λ_v 와 λ_σ 의 변분함수 $w(x)$ 와 $q(x)$ 를 곱하여 전 구간($0 \leq x \leq L_t$)에 대해 적분하여 얻을 수 있다. 여기에 경계조건 (16)~(17)을 적용한 식은 다음과 같다.

$$\int_0^{L_t} w \left(\frac{\partial^2 \lambda_v}{\partial t^2} - cg \frac{\partial \lambda_v}{\partial t} \right) dx + \int_0^{L_t} c^2 \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} \frac{dw}{dx} dx = -w(0) [v(0, t) - v_m(0, t)] \tag{21}$$

$$\int_0^{L_t} q \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial t} dx - \int_0^{L_t} q \frac{\partial \lambda_v}{\partial x} dx - \int_0^{L_t} cgq \lambda_\sigma dx = 0. \tag{22}$$

식 (21)과 (22)의 해인 λ_v 와 λ_σ 는 $\lambda_v \simeq (\lambda_v)_h \in H^1(\Omega) \times [0, T]$, $\lambda_\sigma \simeq (\lambda_\sigma)_h \in L^2(\Omega) \times [0, T]$ 의 함수공간에 속하며, 식 (10)~(11)과 같이 기저함수 $\phi_i(x)$ 와 $\psi_i(x)$ 를 사용하여 다음과 같이 근사된다.

$$\lambda_v(x, t) \simeq (\lambda_v)_h(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) (\lambda_v)_i(t), \tag{23}$$

$$\lambda_\sigma(x, t) \simeq (\lambda_\sigma)_h(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) (\lambda_\sigma)_i(t), \tag{24}$$

변분함수 $w(x)$ 와 $q(x)$ 도 각각 기저함수 $\phi_i(x)$ 와 $\psi_i(x)$ 를 사용하여 근사한다. 식 (23)~(24)를 식 (21)~(22)에 대입하여 얻어지는 운동방정식을 시간에 대해 적분하면 유한요소 노드에서의 λ_v 와 λ_σ 를 구할 수 있다. 수반문제는 최종값 문제이므로 시간에 대한 적분시 최종 시각으로부터 후진 계산을 수행한다.

셋째로, 최적해에서 제어변수 c 에 대한 라그랑지안의 1차 변분식이 0이 되어야 하는 조건($\delta L = 0$)으로부터 다음과 같은 제어 방정식(control equation)과 그에 따른 경계조건을 얻을 수 있다.

제어문제(control problem):

$$-R_c \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dc}{dx}\right)^2}} \frac{dc}{dx} \right] \tag{25}$$

$$+ \int_0^T \left(g \lambda_v \frac{\partial v}{\partial t} + g \sigma \lambda_\sigma - 2c \lambda_\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right) dt = 0$$

for $0 \leq x \leq L_t$

$$\frac{dc}{dx}(0) = \frac{dc}{dx}(L_t) = 0 \tag{26}$$

위의 상태문제, 수반문제, 제어문제로 구성된 비선형 미분방정식 시스템이 이 최적화 문제의 KKT(Karush-Kuhn-Tucker) 조건이며, 이로부터 구한 $c(x)$ 가 주어진 역해석 문제의 해가 된다.

3.3 최적화 알고리즘

상태문제, 수반문제, 제어문제로 구성된 비선형 미분방정식 시스템을 연립하여 풀면 $v, \sigma, \lambda_v, \lambda_\sigma, c$ 의 최적해를 직접 구할 수 있다. 그러나 이러한 방법은 과정이 복잡하고 고차원 문제의 경우 계산에 소요되는 메모리가 크다. 따라서 최적화 변수를 제어변수 $c(x)$ 로 국한하고 비선형 미분방정식 시스템을 반복적으로 계산하여 $c(x)$ 를 업데이트함으로써 최적의 탄성파속도 분포를 도출할 수 있다.

이를 위해 먼저 미지의 탄성파속도 분포를 가정하고 표현 하중에 대한 상태문제((1)~(6))의 응답 $v(x, t), \sigma(x, t)$ 를 구한다. 이 상태응답을 이용하여 수반문제((15)~(20))의 응답 $\lambda_v(x, t), \lambda_\sigma(x, t)$ 를 계산한다. 이렇게 구한 상태변수와 수반변수의 값들을 이용하여 제어변수 c 에 대한 라그랑지안의 그라디언트(gradient)를 다음과 같이 계산한다.

$$g_c \equiv \nabla_c L \tag{27}$$

$$= -R_c \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dc}{dx}\right)^2}} \frac{dc}{dx} \right] + \int_0^T -2c \lambda_\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} dt$$

식 (27)의 그라디언트는 제어방정식 (25)의 좌변과 같으며, 식 (7)로부터 일반영역($0 \leq x \leq L$)에서 $g(x) = 0$ 인 조건을 이용하여 표현된다. PML에서의 그라디언트는 일반영역과 PML의 경계에서의 그라디언트와 같도록 규정한다. 이 그라디언트를 이용하여 제어변수 $c(x)$ 의 최적해로의 탐색방향(search direction)을 결정할 수 있다. Fletcher Reeves (FR) conjugate gradient법을 이용한 이산(discrete) 탐색방향 벡터(\mathbf{d}_k)는 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_k = \begin{cases} -\mathbf{g}_k & (k=0) \\ -\mathbf{g}_k + \frac{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1} \cdot \mathbf{g}_{k-1}} \mathbf{d}_{k-1} & (k \geq 1) \end{cases} \quad (28)$$

여기서, \mathbf{g}_k 는 역해석의 k 번째 반복계산에서의 이산 그래디언트로서, 다음과 같이 각 노드에서의 식 (27) 값들로 이루어진 벡터이다.

$$\mathbf{g}_k = (\nabla_c L)_k \quad (29)$$

식 (28)로부터 이산 탐색방향 벡터를 결정한 후, 다음과 같이 탄성파속도 벡터 \mathbf{c}_k 를 업데이트할 수 있다.

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \alpha \mathbf{d}_k \quad (30)$$

여기서, \mathbf{c}_k 는 역해석의 k 번째 반복계산에서의 이산 탄성파속도로써 각 노드에서의 탄성파속도 값들로 구성된 벡터이다. α 는 \mathbf{d}_k 방향으로의 스텝길이로서, inexact line search법을 이용하여 결정한다. 스텝길이는 탄성파속도의 업데이트시 식 (12)의 목적함수가 충분히 감소되도록 결정해야 한다. 이를 위해 α 는 다음의 Armijo condition을 만족하도록 결정한다.

$$\mathcal{J}(\mathbf{c}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \leq \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) + \bar{\mu} \alpha \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{d}_k \quad (31)$$

식 (31)에서 $\bar{\mu}$ 는 충분히 작은 값으로서(Nocedal et al., 1999), 이 연구에서는 $\bar{\mu} = 10^{-8}$ 으로 선택하였다.

Table 1 Algorithm 1 - Inversion process for the reconstruction of wave velocity profile $c(x)$

1.	Choose $\bar{\alpha}, \bar{\rho}, \bar{\mu}$, and R_c ; Set $\alpha = \bar{\alpha}$.
2.	Set $k=0$ and convergence tolerance tol .
3.	Set initial guess of material property vector \mathbf{c}_k .
4.	$J = tol + 1$
5.	while ($J > tol$) do
6.	Solve the state problem (1)~(6) and obtain v, σ .
7.	Solve the adjoint problem (15)~(20) and obtain $\lambda_v, \lambda_\sigma$.
8.	Compute the discrete form of the reduced gradient \mathbf{g}_k from (27).
9.	Compute search direction vector \mathbf{d}_k from (28).
10.	while [$\mathcal{J}(\mathbf{c}_k + \alpha \mathbf{d}_k) > \mathcal{J}(\mathbf{c}_k) + \bar{\mu} \alpha \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{d}_k$] do
11.	$\alpha \leftarrow \bar{\rho} \alpha$
12.	end while
13.	$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \alpha \mathbf{d}_k$
14.	$k = k + 1$
15.	end while

이상과 같은 과정을 반복함으로써 PML을 경계로 하는 1차원 고체영역의 미지 탄성파속도 분포를 결정할 수 있다. 반복계산 과정 중 상태방정식과 수반방정식의 시간이력해석에 계산량의 대부분이 소요된다. Table 1에 전반적인 역해석 알고리즘을 요약하였다.

3.4 유한요소망 연속기법

주어진 역해석 문제의 ill-posedness를 완화시키기 위하여 Total Variation 정규화기법을 도입함과 더불어 유한요소망 연속기법을 사용하였다. 이 연속기법은 하나의 측정응답에 대해 조밀도가 작은 유한요소망으로부터 점차 조밀한 요소망을 사용하여 목표변수를 점진적으로 재구성하는 것이다. 유한요소망 연속기법은 시간영역 전체파형의 주파수 대역을 선별적으로 역해석한다. 즉, 요소 크기가 큰 요소망을 사용할 때는 측정응답의 전체파형에서 저주파수 성분을 주로 역해석하게 되고, 조밀한 요소망을 사용할 때는 상대적으로 측정응답의 고주파수 성분을 역해석하게 된다. 따라서 저밀도 요소망으로부터 재구성한 탄성파속도 분포를 그보다 더 조밀한 요소망을 사용하는 역해석의 초기 가정 분포로 도입

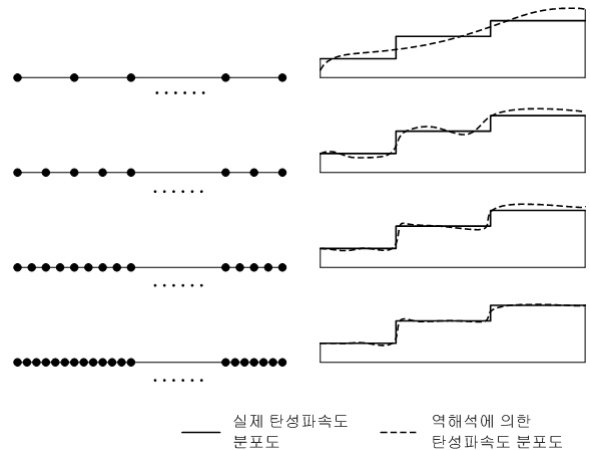


Fig. 2 Schematic of material profile inversion using a series of 1D finite element meshes

Table 2 Algorithm 3 - Mesh continuation scheme

1.	Prepare n finite element meshes of increasing density.
2.	Set the initial guess of the elastic wave velocity profile ($c(x) = c_0$).
3.	do $k=1$ to n
4.	Use the k -th mesh and perform full-waveform inversion for the wave velocity profile using Algorithm 1.
5.	Introduce the wave velocity profile reconstructed on the k -th mesh as the initial guess for the inversion on the next finer mesh.
6.	end do

하면 해의 수렴성을 증대시킬 수 있다. Fig. 2는 요소망 연속기법에 사용될 수 있는 1차원 요소망들과 이들을 이용한 단계적 역해석의 개요도를 나타낸다.

Table 2는 유한요소망 연속기법을 이용해 탄성과 응답의 전체파형을 역해석하는 전반적인 알고리즘을 나타낸다.

4. 수치예제

이 논문에서 제시한 1차원 유한요소망 연속기법에 의한 탄성과 역해석 알고리즘의 정확도를 검증하기 위하여 Fig. 3와 같은 수직방향의 층을 갖는 반무한 고체영역의 탄성파속도 분포를 도출해 보았다. 예제로 사용된 고체영역의 각 층의 탄성파속도 분포는 표면에서부터 아래 방향으로 각각 230m/s, 200m/s, 270m/s, 350m/s, 430m/s이고, 첫 번째 층에서 네 번째 층까지의 두께는 각 20m이다. 마지막 층은 깊이 방향으로 균일하다고 가정하며, $x=100\text{m}$ 위치에 10m 길이의 PML을 도입하였다. Fig. 4는 PML을 경계로 하는 유한영역과 이 영역에 대한 역해석의 목표 탄성파속도

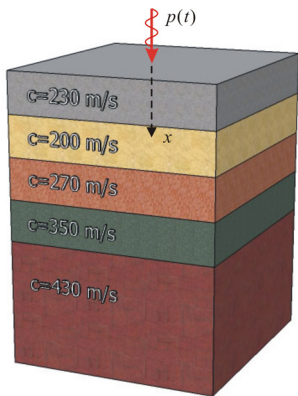


Fig. 3 Horizontally layered semi-infinite solid medium

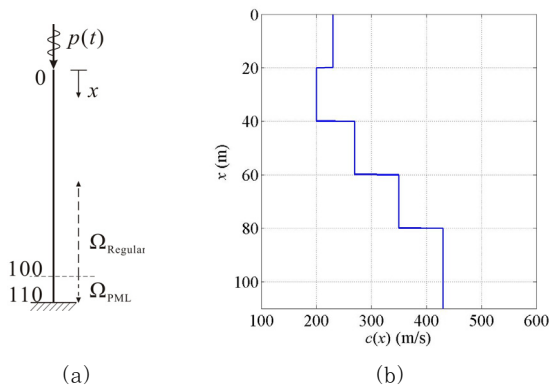


Fig. 4 (a) Schematic of a one-dimensional PML-truncated domain(PML location: $100 \leq x \leq 110$); (b) target wave velocity profile

분포도를 나타낸다.

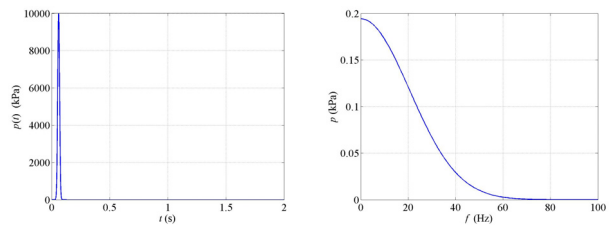
Fig. 5는 반무한 영역의 표면에 가해진 하중의 시간이력과 주파수 스펙트럼을 보여준다. 표면응력을 나타내는 이 하중은 시간에 대해 Gaussian 분포를 가지며 최대 주파수 성분은 약 80Hz이다. 하중 $p(t)$ 는 시간에 대해 다음과 같은 함수관계로 표현되고 단위는 Pa이다.

$$p(t) = 10000e^{-\frac{(t-0.08)^2}{0.00012}} \quad (32)$$

Fig. 6는 이 하중이 가해졌을 때 표면($x=0$)에서 측정된 변위응답의 시간이력을 보여준다.

Fig. 6의 표면 변위응답의 전체파형을 역해석하여 탄성파속도 분포를 도출하기 위해 Fig. 7과 같이 점진적으로 조밀한 네 개의 유한요소망을 사용하였다. 유한요소망의 요소 길이는 각각 $L_e=5\text{m}, 2\text{m}, 0.5\text{m}, 0.1\text{m}$ 이며 2차의 형상함수를 사용하였다.

위의 네 개의 요소망을 사용하여 측정응답을 역해석한 결과를 Fig. 8에 제시하였다. Fig. 8(a)는 요소 길이 $L_e=5\text{m}$ 의 요소망을 사용한 역해석 결과로서, 탄성파속도의 초기 가정값으로 $c=300\text{m/s}$ 를 사용하였다. 이 경우 PML 내에 2개의 요소만 존재하여 정해석의 정확도가 떨어지고 역해석 결과 각



(a) Time history (b) Frequency spectrum
Fig. 5 Time history and frequency spectrum of surface stress load $p(t)$

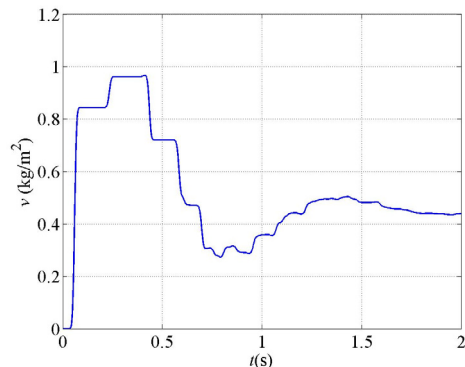


Fig. 6 Time history of displacement measured on the surface

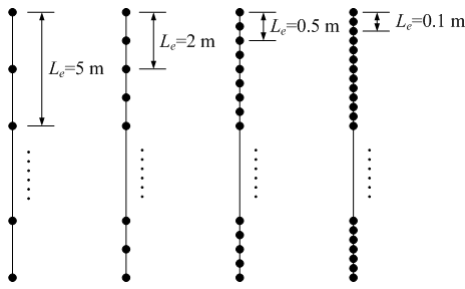


Fig. 7 One-dimensional finite element meshes for inversion

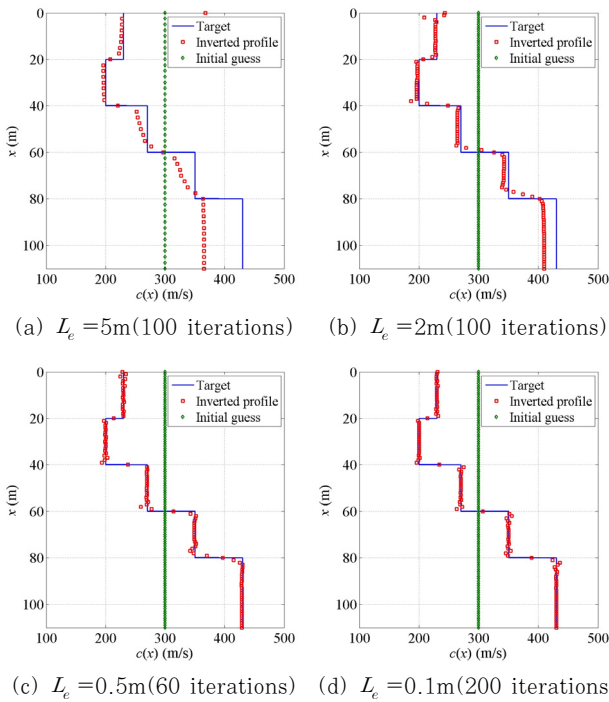


Fig. 8 Successively inverted 5-layer profiles using a mesh continuation scheme

층별 탄성파속도의 정확한 값과 뚜렷한 경계를 알 수는 없었으나 목표 탄성파속도의 전반적인 변화 양상을 파악할 수 있다. 이 결과를 $L_e = 2m$ 길이의 유한요소망을 이용한 역해석에 초기 가정 분포로 도입하여 측정응답을 역해석하였다. Fig. 8(b)는 그 결과 얻은 분포도로서, 앞선 역해석 결과보다 목표 탄성파속도에 근접한 결과를 보여준다. 이와 같은 과정을 $L_e = 0.5m$ 와 $L_e = 0.1m$ 의 요소망에 연속적으로 적용하여 Fig. 8(c)와 8(d)의 탄성파속도 분포도를 얻을 수 있었다. $L_e = 0.1m$ 의 요소망으로부터 얻은 최종 결과는 각 층의 목표 탄성파속도 값, 층별 두께와 위치를 높은 정확도로 근사함을 알 수 있다. 식 (13)에서의 정규화계수 R_c 는 초기값으로 $R_c = 10^{-4}$ 를 사용하였고, Kang과 Kallivokas(2010)가 제안한 정규화계수 연속기법(Regularization factor continuation scheme)을 사용하여 역해석의 반복계산마다 그 값을

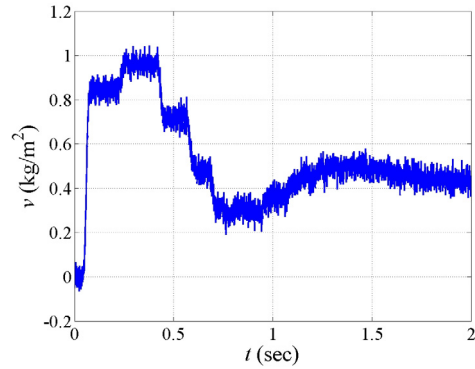


Fig. 9 Measured displacement response with Gaussian random noises(standard deviation: 3%)

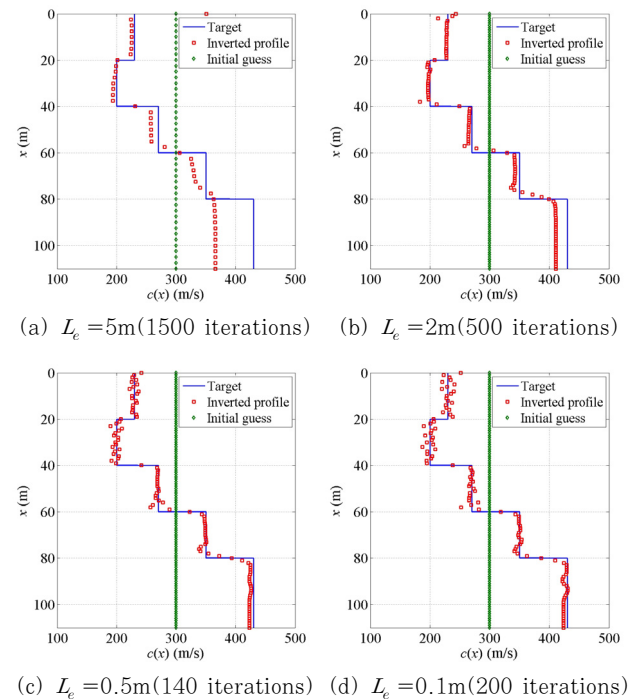


Fig. 10 Successively Inverted 5-layer profiles from the surface response with 3% Gaussian noise

조절하였다.

Fig. 6의 측정응답은 노이즈를 포함하고 있지 않으며, 따라서 Fig. 8은 노이즈의 영향을 받지 않은 역해석 결과를 나타낸다. 그러나 현장에서의 측정응답은 정도의 차이는 있으나 주변 환경, 측정 장비, 실험 오차 등에서 발생하는 진동으로 인해 항상 노이즈가 포함된다. 이러한 조건을 반영하기 위하여 Fig. 6의 측정응답에 표준편차 3%의 Gaussian 랜덤 노이즈를 도입하였다. Fig. 9는 이러한 노이즈가 포함된 측정 변위응답을 나타낸다.

Fig. 9의 전체파형을 앞서 소개한 최적화 알고리즘과 유한요소망 연속기법을 이용하여 역해석한 결과를 Fig. 10에 제시하였다. 이 경우 역시 요소망의 밀도가 높아질수록 탄성

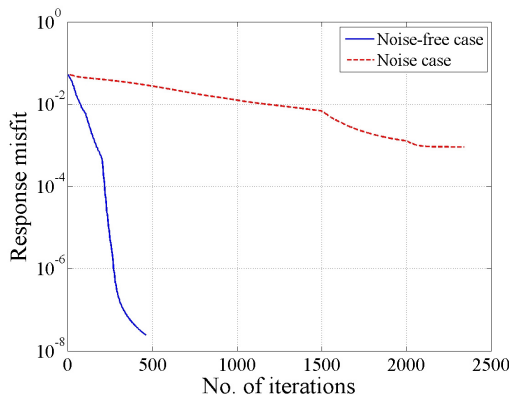
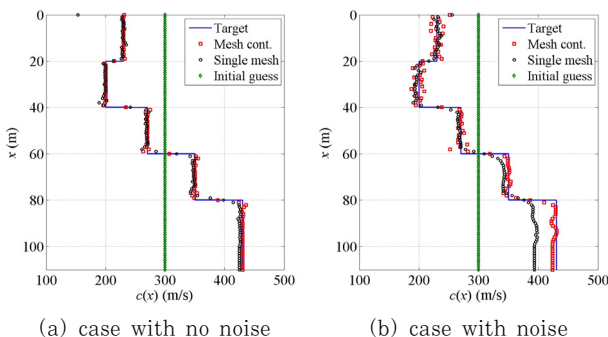


Fig. 11 Variation of misfit functional with respect to the number of iterations



(a) case with no noise (b) case with noise

Fig. 12 Comparison of reconstructed 5-layer profiles obtained using multiple meshes and a single mesh

파속도의 분포가 목표값에 가까워진다. 그러나 노이즈의 영향으로 인하여 요소의 크기가 작을수록 재구성된 탄성파속도의 분포에 오차가 발생하는 것을 알 수 있다. 저밀도 요소망의 경우에는 측정응답의 저주파 성분을 주로 역해석하므로 재구성된 탄성파속도에 대한 노이즈의 영향이 제한적이다.

역해석의 전 과정에 대한 목적함수(식 (12))의 변화를 Fig. 11과 같이 나타내었다. 노이즈가 없는 경우는 총 460번, 노이즈가 존재하는 경우는 총 2340번의 반복계산이 소요되었는데, 노이즈가 존재하는 경우에는 보다 많은 반복계산이 소요되고 수렴속도가 느리다는 것을 알 수 있다.

탄성파 역해석에 대한 유한요소망 연속기법의 효과를 확인하기 위하여, Fig. 8과 10의 역해석 결과를 유한요소망 연속기법을 사용하지 않고 도출한 탄성파속도 분포와 비교하였다. Fig. 12는 두 결과를 비교한 그래프로서, 유한요소망 연속기법을 사용함으로써 목표 탄성파속도 분포를 보다 정확히 추정할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 13은 측정응답에 노이즈가 없을 때 유한요소망 연속기법을 사용한 경우와 단일요소망을 사용한 경우의 목적함수 변화를 나타낸다. 단일요소망으로는 Fig. 7에서 요소 크기 $L_c = 0.1\text{m}$ 의 가장 조밀한 요소망을 사용하였다. 그림에서

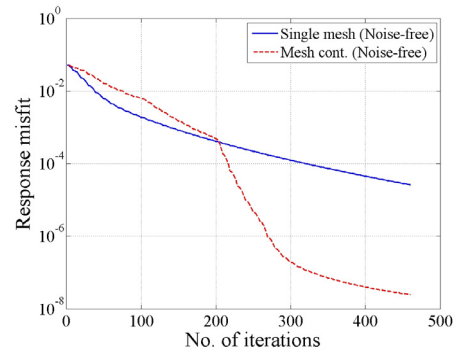


Fig. 13 Comparison of misfit variations between inversions using multiple meshes and a single mesh (case with no noise)

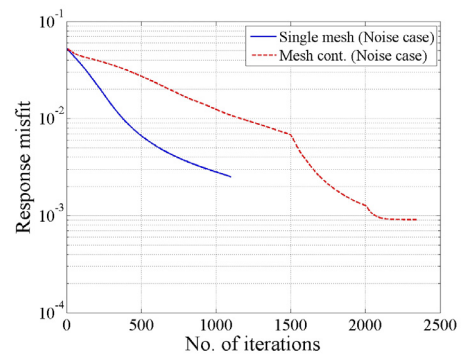


Fig. 14 Comparison of misfit variations between inversions using multiple meshes and a single mesh (case with 3% Gaussian noise)

보듯이 역해석의 초기 단계에서는 단일요소망을 사용하는 경우의 수렴속도가 유한요소망 연속기법을 사용하는 경우보다 빠르지만, 역해석이 진행되면서 유한요소망 연속기법의 수렴속도가 증가하고 이 경우 목적함수의 최종값이 단일요소망의 그것보다 감소함을 알 수 있다. Fig. 14는 측정응답에 노이즈가 존재할 때 유한요소망 연속기법을 사용한 경우와 단일요소망을 사용한 경우의 목적함수 변화를 나타낸다. 단일요소망을 사용한 경우에는 초기 수렴속도가 빨랐으나 1100회 반복계산에서 더 이상 진전되지 않았다. 그러나 유한요소망 연속기법의 경우에는 역해석 후반부의 수렴속도가 증가하였고 목적함수의 최종값이 단일요소망의 그것보다 작았다. 이상의 결과를 종합해 보면, 측정응답의 전체파형 역해석에 유한요소망 연속기법을 적용함으로써 단일요소망을 사용하는 경우보다 해의 수렴성과 정확도를 향상시킬 수 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 1차원 반무한 탄성체를 대상으로 PML을 이용한 시간영역 탄성파의 정해석 방법을 소개하고 표면에서

측정한 변위응답의 시간이력을 역해석하여 미지의 탄성파속도 분포를 추정하는 비선형 최적화 기법을 제시하였다. 그리고 역해석에 일반적으로 존재하는 해의 다중성(solution multiplicity) 문제를 완화하기 위하여 정규화기법과 함께 유한요소망 연속기법을 이용한 점진적 역해석 알고리즘을 제안하였다.

유한요소망 연속기법에서 사용되는 저밀도와 고밀도 요소망은 각각 측정응답의 저주파수와 고주파수 성분을 대상으로 역해석을 수행하므로 점진적으로 세밀한 물성치의 분포를 도출할 수 있으며 해의 수렴성을 높일 수 있다. 측정응답에 노이즈가 존재하는 경우에도 저밀도 요소망은 목표 탄성파속도의 개략적인 분포를 추정할 수 있었으며, 노이즈로 인한 오차가 있지만 고밀도 요소망을 사용하여 비교적 정확한 탄성파속도 분포도를 도출할 수 있었다.

이 논문의 연구는 2차원 또는 3차원에서의 탄성과 역해석을 위한 기반연구로서, 고차원 역해석 문제 해의 다중성과 수렴성을 개선하는데 유용한 정보를 제공할 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2013학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었습니다.

참 고 문 헌

Akcelik, V. (2002) Multiscale Newton-Krylov Methods for Inverse Acoustic wave Propagation. PhD Dissertation, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA.

- Born, M., Wolf, E.** (1980) Principles of Optics, 6th edition, Pergamon Press, New York, N.Y.
- Devaney, A.J.** (1982) A Filtered Back-propagation Algorithm for Diffraction Tomography, *Ultrasonic Imaging*, 4, pp.336~360.
- Epanomeritakis, I., Akcelik, V., Ghattas, O., Bielak, J.** (2008) A Newton-CG Method for Large-scale Three-dimensional Elastic Full-waveform Seismic Inversion, *Inverse Problems*, 24(034015).
- Kang, J.W., Kallivokas, L.F.** (2010) The Inverse Medium Problem in 1D PML-truncated Heterogeneous Semi-infinite Domains, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 18(6), pp.759~786.
- Kang, J.W., Kallivokas, L.F.** (2010) Mixed Unsplit-field Perfectly-matched-layers for Transient Simulations of Scalar Waves in Heterogeneous Domains, *Computational Geosciences*, 14(4), pp.623~648.
- Nocedal, J., Wright, S.** (1999) Numerical Optimization, Springer Verlag, New York, N.Y.
- Operto, S., Ravaut, C., Imbrota, L., Virieux, J., Herrero, A., Dell'Aversana, P.** (2004) Quantitative Imaging of Complex Structures from Dense Wide-aperture Seismic Data by Multiscale Travel-time and Waveform Inversions: a Case Study, *Geophysical Prospecting*, 52(6), pp.625~651.
- Pratt, R.G., Shipp, R.M.** (1999) Seismic Waveform Inversion in the Frequency Domain, Part 2: Fault Delineation in Sediments Using Crosshole Data, *Geophysics*, 64(3), pp.902~914.
- Vogel, C.** (2002) Computational Methods for Inverse Problems, SIAM, Frontiers in Applied Mathematics.

요 지

이 논문에서는 반무한 고체영역의 표면에서 측정된 변위응답의 시간이력으로부터 유한요소망 연속기법을 이용해 탄성파속도의 공간적 분포를 추정하는 역해석 문제를 소개한다. 반무한 영역에서의 역해석을 위해서는 해석 대상이 되는 유한영역의 경계에서 파동의 반사가 일어나지 않도록 하는 것이 중요하다. 이를 위해 유한영역의 경계면에 perfectly-matched-layers(PMLs)라는 수치적 파동흡수층을 도입하였고, PML을 경계로 하는 유한영역에서 역해석 문제를 정의하였다. 이 문제를 탄성파동방정식을 구조조건으로 하는 최적화 문제로 표현하였으며, 라그랑주 승수법에 기초한 비구속 최적화 기법에 의해 탄성파속도의 최적 분포를 결정하였다. 해의 정확도와 수렴성을 높이기 위해 유한요소망 연속기법을 도입하여 점진적으로 밀도가 증가하는 유한요소망에 대해 연속적으로 역해석을 수행하였다. 1차원 예제들을 통해 유한요소망 연속기법을 이용한 역해석으로부터 탄성파속도의 분포를 정확히 추정할 수 있음을 확인하였으며, 측정 응답에 노이즈가 존재하는 경우에도 제안한 역해석 기법은 목표 탄성파속도 분포에 근사한 결과를 도출하였다.

핵심용어 : 역해석, perfectly-matched-layers(PMLs), 최적화, 유한요소망 연속기법