

와이블 분포를 따를 때 수명성능지수의 추정과 활용

서순근¹⁾

동아대학교 산업경영공학과

Lifetime Performance Index for Weibull Distribution: Estimation and Applications

Seo, Sun-Keun

Dept. of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

Abstract

Application areas for Lifetime Performance Index(LPI), a kind of process capability index to be frequently used as a means of measuring process performance are illustrated with examples. Statistical properties for maximum likelihood and unbiased estimators of LPI are evaluated and discussed under Weibull distribution with known shape parameter. Furthermore, guidelines for selecting an estimator of LPI are also presented.

Keywords : lifetime performance index, maximum likelihood estimator, process capability indices, Weibull distribution, unbiased estimator

¹⁾이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.

논문접수일 : 2013년 08월 13일 논문수정일 : 2013년 09월 12일 게재확정일 : 2013년 09월 13일

1. 서론

1980년대 중반 이후 생산공정의 품질수준에 대한 가장 간편한 척도로 공정능력지수(Process Capability Index; PCI)가 널리 쓰인다(Kane(1986)). 공정능력이란 공정이 관리상태에 있을 때 얼마나 균일한 제품을 생산하는지를 나타내는 것으로 주로 양쪽 규격한계가 있을 때 품질특성치 분포의 6σ 를 이용한 C_p 등이 쓰이며, C_p 가 클수록 품질수준은 높다고 볼 수 있다. PCI의 유용성에 대해 일부 논란이 있지만, Yum and Kim(2010)에 의하면 2000~2009년간 약 530편의 논문과 전문서적이 발간되어 활발하게 연구가 진행되고 있는 주제이다. 이에 관한 최근 연구결과는 Anis(2008) 등을 참조하면 된다.

한편 클수록 바람직한 품질특성치일 경우에 규격하한만 주어지므로 C_{PL} 이 추천되고 있다. Tong et al.(2002)은 수명이 지수분포를 따르는 전자제품에 대한 C_{PL} 로 수명능력지수(Lifetime Performance Index; LPI)를 제안하고 이에 대한 일양최소분산추정량(Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator; UMVUE)의 통계적 성질을 조사하였으며, 완전자료(complete sample)일 때 가설검정 절차를 구축하였다. 이를 계기로 지수분포일 경우에 Lee et al.(2009)이, 파레토 분포일 때 Hong et al.(2007)이, 2-모수 지수분포일 경우에 Wu et al.(2007), Lee et al.(2010)과 Lee et al.(2011b)이, 와이블 분포일 때 Lee et al.(2011a), Lee(2011), Hong et al.(2012), Ahmadi et al.(2013a) 등이 LPI에 대한 후속연구를 수행하였다. 특히 본 논문에서 다루는 와이블 수명분포일 경우에 형상모수가 알려져 있을 때 Lee et al.(2011a)과 Lee(2011)는 각각 완전자료와 제2종 관측중단일 경우에, Ahmadi et al.(2013a)과 Hong et al.(2012)은 각각 형상모수가 알려져 있을 때와 알려져 있지 않을 때 sudden death 시험방식으로 점진적 관측중단을 적용하여 시험데이터를 획득할 경우에 LPI에 대한 점추정량을 제안하고, 이를 이용한 정확한 또는 근사적 가설검정절차를 제안하였다. 이에 대한 최근 연구동향은 Ahmadi et al.(2013b)을 참조하면 된다.

지금까지 수행된 모든 선행연구들이 C_{PL} 형태인 LPI에 대한 추정량을 구하고 이로부터 가설검정 수행절차와 이의 검정력 등을 검토하는 과정으로 전개되고 있어, 제안된 LPI의 유용성과 현업에서의 실제 활용 가능성을 파악하기 어렵다. 또한 LPI값이 음수일 때도 부적합률과 대응시키고 있어(지수분포일 경우는 Tong et al.(2002), 와이블 분포일 경우는 Lee(2011) 등을 참조) 공정능력지수에 속하는 척도로서의 부합도도 만족스럽지 않다.

따라서 본 논문은 먼저 LPI의 실제 활용 가능성을 제고하기 위해, 이를 기존 연구와 동일한 형태이지만 공정능력지수의 부적합률와의 관계처럼 수명자료 성격에 보다 적합하도록 몇 가지 방향으로 정의하여 지수의 의미를 명확히 할 수 있는 방향을 모색하고자 한다. 즉, 2절에서 규격하한을 신뢰성 분야에 널리 쓰이는 기준으로 설정하고, LPI를 이들 기준에 연관된 척도로 대응시켜 지수의 의미를 이해하고 파악하는데 도움을 주고자 한다. 또한 3절과 4절에서 수명분포로 널리 쓰이는 와이블 분포를 따를 경우를 대상으로 신뢰성 실증시험이나 표본크기가 작을 경우 등에 적용되는 형상모수가 알려져 있다고 가정할 때 LPI의 두 추정량에 대한 통계적 성질을 조사하고, 수치예제에 적용하여 이의 활용도를 보여 주고자 한다.

2. 수명성능지수

T 가 수명을 나타내는 확률변수이고 이의 기대값(MTTF)과 표준편차를 μ 와 σ , 규격하한을 L 로 나타낼 때 $LPI(C_L)$ 는 식 (1)과 같이 정의된다(Tong, et al.(2002)).

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma} = \frac{1}{CV} - \frac{L}{\sigma} \quad (1)$$

여기서 CV 는 변동계수임.

기존 연구[2, 3, 6, 10~16]에서는 L 을 단지 수명에 대한 규격하한으로, 이에 미달한 비율을 부적합률로 정의하고 있는데, 현업에서 수명자료에 대한 규격하한과 이에 따른 부적합률은 잘 이해되지 않는 설정체계이다.

따라서 본 논문에서 L 을 보증비용을 추산할 경우에 무상보증기간으로, 신뢰성 실증시험(Reliability Demonstration Test; RDT)을 적용할 경우는 기준 실증수명에 해당되는 B수명(분위수)으로, 설계검증단계에서는 달성해야 될 목표수명 등으로 설정하고자 한다.

여기서 수명이 형상모수와 척도모수가 각각 β , η 인 와이블 분포를 따를 때 확률밀도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-(t/\eta)^\beta}, \quad t > 0$$

일반적으로 와이블 분포의 형상모수 β 는 대상 제품에 대한 과거자료, 유사제품, 다양한 정보원으로부터 추정할 수 있으므로 RDT 등에서는 일반적으로 형상모수 값을 알고 있다고 가정하여 시험계획을 도출하고 있다. 즉, 수명 T 가 형상모수가 β 이고 척도모수가 η 인 와이블 분포를 따르면 T^β 은 평균이 η^β 인 지수분포를 따름을 이용한다.

여기서 $\mu = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ 이고 $\sigma^2 = \eta^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right) = \eta^2 M^2$ 이므로 식 (1)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$C_L = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} - \frac{L}{\eta \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}} \\ = \frac{1}{M} \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - k \right] \quad (2)$$

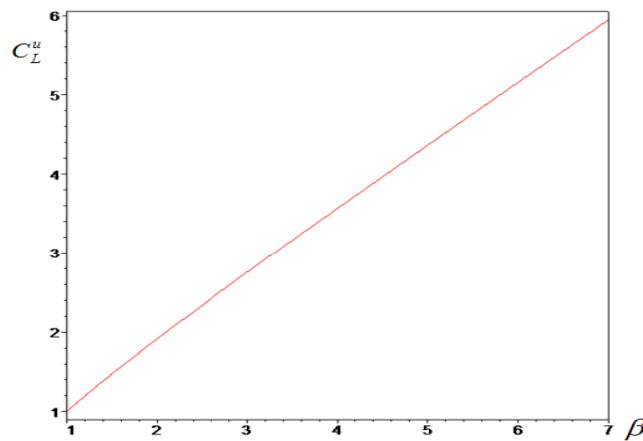
여기서, $M = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$ 이고,

두 번째 식은 $L = k\eta$ 로 표현될 경우임.

여기서 L 이 신뢰성분야에서 널리 쓰이는 무상보증기간, 실증수명, 목표 설계수명에 적용되면, 통상적으로 낮은 분위수(보통 0.01~0.1백분위수)가 되므로 식 (1)의 LPI는 음수가 아닌 양수가 되어 공정능력지수에 대한 상식적인 조건을 만족한다. 그리고 식 (2)에서 우변 첫째 항은 와이블 분포의 변동계수에 해당되는데, 이는 척도모수에 의존하지 않고 형상모수에만 의존하므로 LPI가 가질 수 있는 값의 상한은 음수인 두 번째 항을 감안하면 다음과 같이 주어진다.

$$C_L \leq \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{M} = C_L^u$$

이 상한 값인 C_L^u 을 β 의 실용적 범위(고장률 증가형인 경우 $1 \leq \beta \leq 7$)에 도시한 <그림 1>을 보면 지수분포($\beta=1$)일 때 LPI의 상한은 1이 되며, β 가 증가하면 이 값도 거의 선형적으로 증가하고 있다.



<그림 1> β 에 따른 LPI의 상한

한편 LPI 지수 값은 PCI 만큼 명확하지 않으며, 전술한 바와 같이 기존 연구에서 통념과 다르게 LPI가 음수 값을 가질 수도 있다. 따라서 이절에서는 L 을 신뢰성 분야에서 접할 수 있는 구체적인 기준으로 설정한 후에, LPI를 보증기간의 고장비율, 무고장 실증시험의 기준 실증수명(분위수로 표현)에 해당되는 고장확률, 안전계수와 의 대응관계로 나타내어 LPI의 활용가능성을 예시하고자 한다.

2.1 L 이 (무상)보증기간일 경우

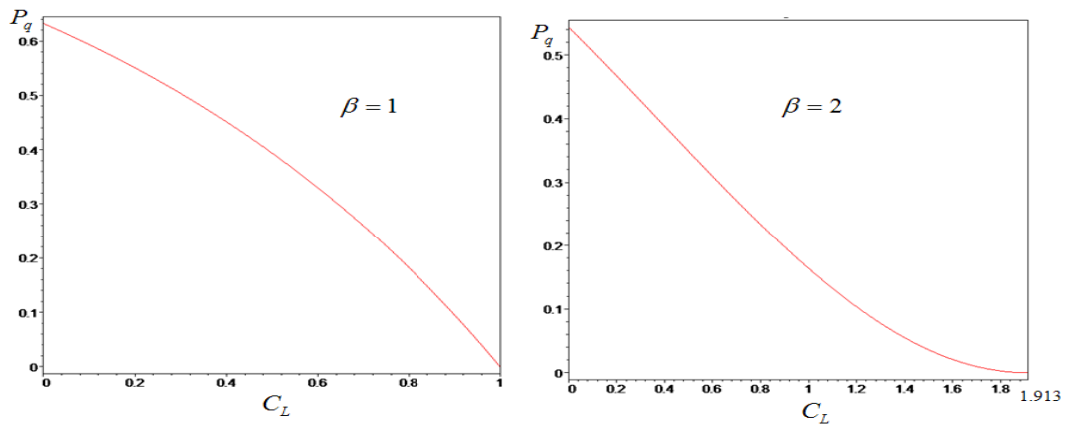
만약 L 이 무상 또는 유상 보증기간으로 정의되면 LPI에 따라 보증기간 내에 고장이 발생하는 비율(P_q)을 구할 수 있으므로 이에 따른 보증비용 총당금 설정이나 제품가격의 산정 시

보증비용을 반영하는데 활용할 수 있다.

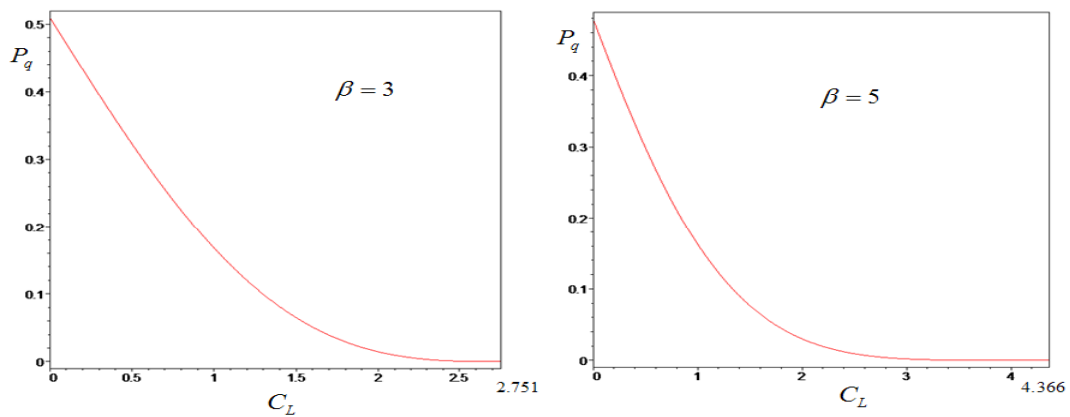
L 이 보증기간일 때 이 기간 내에 고장이 발생하는 비율(여기서 부적합률은 보증청구비율에 해당됨) P_q 는 LPI가 주어지면 식 (3)에 의해 구할 수 있다.

$$P_q = \Pr(T \leq L) = 1 - e^{-\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - M \cdot C_L\right)^\beta} \quad (3)$$

예를 들면 <그림 2>와 <그림 3>에서 β 가 각각 1, 2, 3, 5일 때 LPI와 P_q 의 관계를 볼 수 있으며, 이로부터 정규분포 하에서 공정능력지수와 규격에 부합되지 않는 제품비율과의 관계와 유사하게 C_L 과 β 가 규정되면 P_q 가 일의적으로 결정된다. 여기서 $\beta = 2, 3, 5$ 일 때 LPI의 최대값은 각각 1.913, 2.751, 4.366임을 알 수 있다.



<그림 2> LPI와 P_q 의 관계: $\beta = 1, 2$



<그림 3> LPI와 P_q 의 관계: $\beta = 3, 5$

2.2 L 이 분위수로 표현될 경우

제품이나 부품의 설계검증, 양산인가, 신뢰성 인증시험에 적용되는 $R100(1-q)/C100CL$ 실증시험은 $100q\%$ 백분위 수명 B_{100q} 를 주어진 신뢰수준 $100CL\%$ 로 보증하는 시험방식이 된다. 이런 RDT시험계획 중에서 최소 표본크기 시험계획은 n 개 단위를 t_1 까지 시험하여 만약 고장이 하나도 발생하지 않으면 이 실증시험은 성공하게 된다. 여기서 표본크기 n 또는 시험시간 t_1 은 신뢰수준 CL , 신뢰도 $1-q$ (분위수이면 q 분위수), 그리고 와이블 형상모수 β 에 의존한다.

따라서 RDT는 기준 실증수명이 $L = k\eta$ 로 규정되면 분위수 형태인 다음의 두 가설로 나타낼 수 있으며,

$$H_0 : B_{100q} = L \text{ (또는 } \leq L), H_1 : B_{100q} > L \quad (4)$$

여기서 k 는 $[-\ln(1-q)]^{1/\beta}$ 이고, 표본크기 n 가 주어질 때 무고장 시험시간은 다음 식에 의해 설정된다(서순근(2011)).

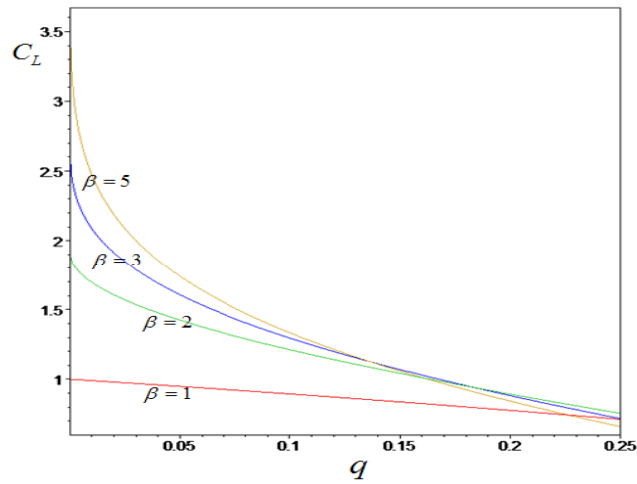
$$t_1 = L \left(\frac{\ln(1-CL)}{n \ln(1-q)} \right)^{1/\beta} \quad (5)$$

예를 들면 β 가 2일 때, R95/C90 무고장 시험계획에 대한 가설검정에서 식 (4)의 귀무가설은 식 (2)의 두 번째 식에 대입하여 LPI에 대한 규정조건으로 다음과 같이 바꿀 수 있으며, 2.1 절에 정의된 부적합률(P_q)은 0.05가 된다.

$$H_0 : C_L = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}} - \frac{(-\ln 0.95)^{1/2}}{\sqrt{\Gamma(2) - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}} = 1.424$$

따라서 $n=5$ 일 때 식 (5)에 대입하면 상기의 LPI 조건을 만족하는 R95/C90 무고장 시험의 시험시간은 $2.996L$ 이 된다.

상기의 RDT뿐만 아니라 목표 설계수명도 주로 분위수로 표현되므로, LPI의 활용도와 이해를 높이기 위해 β 가 1, 2, 3, 5일 때 낮은 분위수($q=0.0001 \sim 0.25$)와 LPI의 관계를 <그림 4>에 도시하였다. 그림에서 $\beta \geq 1$ 일 때 q 가 증가하면 LPI는 감소하며, 더욱이 $q \leq 1 - e^{-1}$ 일 경우에 β 가 큰 값을 가지면 LPI는 상대적으로 큰 값을 가짐을 쉽게 알 수 있다.



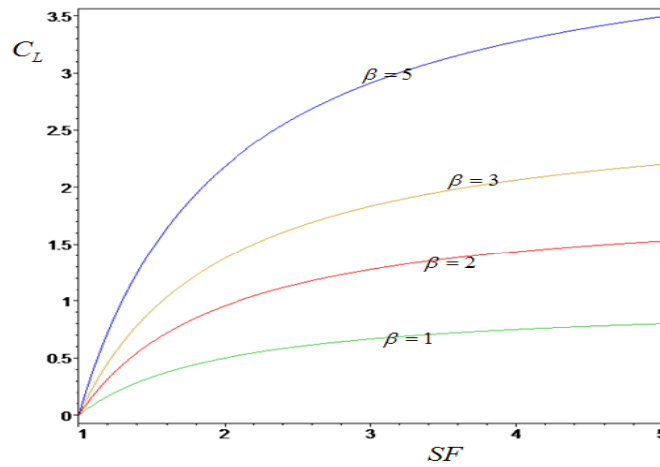
<그림 4> 기준 실증수명의 고장확률(q)와 LPI의 관계: $\beta = 1, 2, 3, 5$

2.3 L 이 안전수명일 경우

한편 Jiang and Murphy(2011)는 안전수명(safety life) S_L 과 안전계수 S_F 는 $S_L = \frac{\mu}{S_F}$ 로 표현되며, S_F 는 3 ~ 4정도의 값을 추천하고 있다. 여기서 L 을 안전수명으로 설정하면 LPI는 식 (6)으로 적을 수 있다.

$$C_L = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{M} \left(1 - \frac{1}{S_F}\right) = \frac{S_F - 1}{CV \cdot S_F} \tag{6}$$

따라서 식 (6)으로부터 S_F 는 $(1 - CV \cdot C_L)^{-1}$ 이 된다. 예를 들면 β 가 2일 때 CV 는 0.5227 이 되므로, S_F 가 3이면 C_L 은 1.275가 되고, 역으로 C_L 이 1.4로 주어지면 S_F 는 3.729가 된다. 설계자에게 도움이 될 수 있도록 안전계수($S_F = 1 \sim 5$)와 LPI의 관계를 β 가 1, 2, 3, 5일 때 <그림 5>에 도시하였다. 그림에서 $\beta \geq 1$ 일 때 S_F 가 증가하면 LPI는 증가하며, 더욱이 β 가 큰 값을 가지면 LPI는 상대적으로 큰 값을 가짐을 알 수 있다.



<그림 5> 안전계수(S_F)와 LPI의 관계: $\beta = 1, 2, 3, 5$

3. 수명성능지수의 추정

3.1 LPI의 추정량

Lee(2011)는 LPI에 대한 최우추정량(Maximum Likelihood Estimator; MLE)를 이용한 가설 검정법을 제안하고 UMVUE를 언급하였으나 두 종의 점 추정량의 통계적 성질을 조사하지 않았다. 본 논문에서는 가설검정보다는 어떤 추정량이 바람직한지 조사하여 이의 선택에 관한 정보를 제공하고자 한다.

n 개 시험단위를 동시에 투입하여 획득한 수명이 T_1, T_2, \dots, T_n 일 때 $W = \sum_{i=1}^n T_i^\beta$ 로 정의하면 $2W/\eta^\beta$ 는 자유도 $2n$ 인 χ^2 분포를 따른다(Lawless(2003)). 또한 η 의 MLE는 다음과 주어진다.

$$\hat{\eta} = \left(\frac{W}{n} \right)^{1/\beta}$$

따라서 LPI의 MLE는 이의 불변성(invariance property)에 의해 다음과 같이 구해진다 (Lee(2011)).

$$\hat{C}_L = \frac{1}{M} \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - \frac{L}{\hat{\eta}} \right] = \frac{1}{M} \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - k\eta \left(\frac{W}{n} \right)^{-1/\beta} \right] \quad (7)$$

먼저 X 가 자유도 $2n$ 인 χ^2 분포를 따르면, $X^{-1/\beta}$ 의 1, 2차 적률의 기대값은 식 (8)과 같이 주어지므로,

$$E[X^{-k/\beta}] = \int_0^{\infty} x^{-k/\beta} f(x | \chi_{2n}^2) dx = \frac{2^{-k/\beta} \Gamma\left(n - \frac{k}{\beta}\right)}{\Gamma(n)}, \quad k = 1, 2 \quad (8)$$

여기서, $f(\cdot | \chi_{\nu}^2)$ 는 자유도 ν 인 χ^2 분포의 확률밀도함수임.

$X^{-1/\beta}$ 의 분산은 식 (9)와 같이 구할 수 있다.

$$Var(X^{-1/\beta}) = \frac{2^{-2/\beta} \left[\Gamma\left(n - \frac{2}{\beta}\right) \Gamma(n) - \Gamma^2\left(n - \frac{1}{\beta}\right) \right]}{\Gamma^2(n)} \quad (9)$$

따라서 $W = \eta^\beta X/2$ 이므로 식 (8)를 이용하여 $W^{-1/\beta}$ 의 기대값을 구하면 다음과 같이 된다.

$$E[W^{-1/\beta}] = \frac{2^{1/\beta}}{\eta} E[X^{-1/\beta}] = \frac{\Gamma\left(n - \frac{1}{\beta}\right)}{\eta \Gamma(n)} \quad (10)$$

식(7)과 (10)으로부터 \widehat{C}_L 의 기대값이 식 (11)과 같이 되므로,

$$E[\widehat{C}_L] = \frac{1}{M} \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - \frac{n^{1/\beta} k \Gamma\left(n - \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(n)} \right) \quad (11)$$

\widehat{C}_L 는 편향의 추정량이 되며, 편향(bias)은 다음과 같이 주어진다.

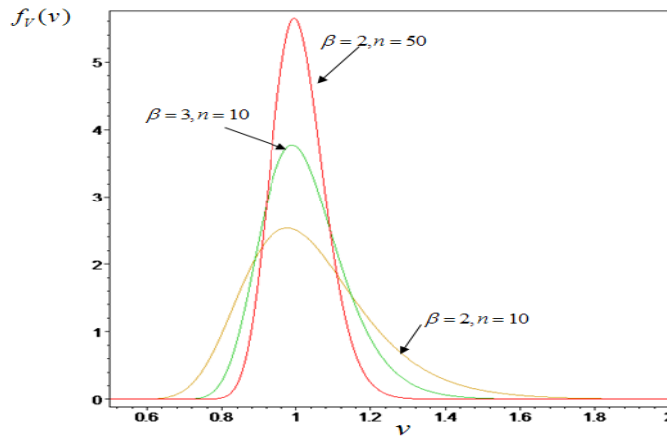
$$bias(\widehat{C}_L) = \frac{k}{M \Gamma(n)} \left(\Gamma(n) - n^{1/\beta} \Gamma\left(n - \frac{1}{\beta}\right) \right) \quad (12)$$

한편 \widehat{C}_L 는 $1/\widehat{\eta}$ 에 의존하므로 변수변환방법에 의해 $V = \frac{\eta}{\widehat{\eta}} = \left(\frac{n\eta^\beta}{W} \right)^{1/\beta}$ 의 확률밀도함수와 기대값을 다음과 같이 구하여 \widehat{C}_L 의 통계적 성질을 개략적으로 파악할 수 있다.

$$f_V(v) = \frac{\beta n^n v^{-n\beta-1} e^{-nv^{-\beta}}}{\Gamma(n)}, \quad v > 0$$

$$E[V] = \frac{n^{1/\beta} \Gamma\left(n - \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(n)}$$

n 과 β 의 세 가지 조합에 대해 확률밀도함수를 도시한 <그림 6>을 보면 β 가 커질수록, n 이 커질수록 V 의 기대값이 1에 가까워지며 산포도 작아짐을 알 수 있다.



<그림 6> V 의 확률분포

또한 편의 추정량인 최우추정량의 대안으로 식 (13)의 불편추정량 \tilde{C}_L 을 고려할 수 있는데,

$$\tilde{C}_L = \frac{1}{M} \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) - \frac{k\eta\Gamma(n)}{\hat{\eta}n^{1/\beta}\Gamma\left(n - \frac{1}{\beta}\right)} \right] \quad (13)$$

W 가 η 에 대한 충분추정량이므로(Tang et al.(2002)), \tilde{C}_L 은 UMVUE가 된다.

그리고 $2W/\eta^\beta$ 는 자유도 $2n$ 인 χ^2 분포를 따름을 이용하여 \hat{C}_L 에 의한 LPI에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰하한은 식 (14)와 같이 구할 수 있으며(Lee(2011)),

$$C_L \geq \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{M} - \left(\frac{\chi_{2n}^2(1-\alpha)}{2n} \right)^{1/\beta} \left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{M} - \hat{C}_L \right) \quad (14)$$

여기서 $\chi_\nu^2(1-\alpha)$ 는 자유도 ν 인 χ^2 분포의 $1-\alpha$ 분위수임.

\tilde{C}_L 에 의한 LPI에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰하한은 유사한 방식으로 식 (15)와 같이 구할 수 있다.

$$C_L \geq \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{M} - \left(\frac{\chi_{2n}^2(1-\alpha)}{2n}\right)^{1/\beta} \left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{M} - \tilde{C}_L\right) \frac{n^{1/\beta} \Gamma\left(n - \frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma(n)} \quad (15)$$

3.2 수치예제

다음은 1년(8,760시간)을 무상보증기간으로 설정하고 있는 전기부품 20개에 대해 얻은 수명자료이며, 이 수명자료는 형상모수가 1.5인 와이블 분포를 따른다고 알려져 있다.

먼저 η 의 최우추정값을 구하면, $\hat{\eta} = \left(\frac{7,168.97}{20}\right)^{1/1.5} = 50.46$ 이 되므로 식 (7)과 (13)에 대입하여

<표 1> 전기부품 수명자료

고장자료(단위: 1,000시간)
74, 34, 63, 107, 29, 13, 8.9, 15, 82, 29, 4.1, 18, 49, 96, 41, 24, 48, 95, 53, 28

구한 LPI에 대한 두 추정량은 다음과 같이 계산된다.

$$\hat{C}_L = 1.190, \quad \tilde{C}_L = 1.181$$

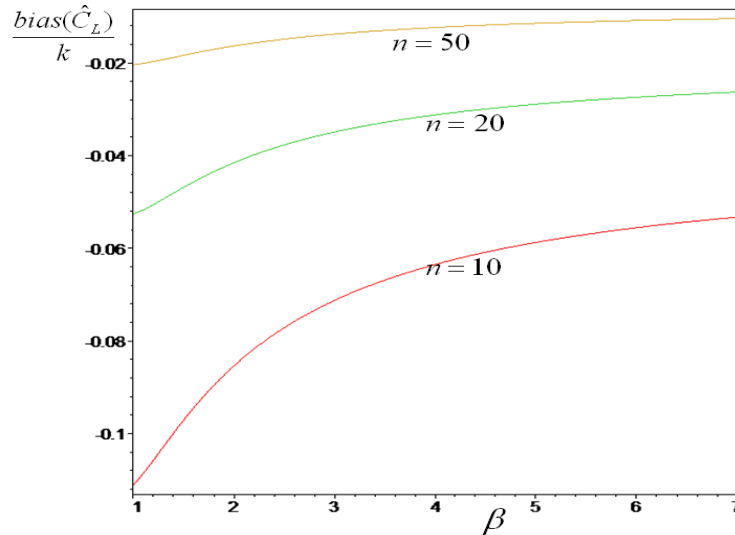
무상 보증기간에 고장이 발생하는 고장비율은 식 (3)에 따르면 $6.98\%(\hat{C}_L)$ 과 $7.27\%(\tilde{C}_L)$ 가 된다. 또한 식 (14)에 대입한 \hat{C}_L 에 의한 LPI에 대한 95% 신뢰하한과 이에 따른 무상 보증기간 내 고장비율의 상한은 각각 1.119와 9.59%가 되며, 식 (15)에 대입한 \tilde{C}_L 에 의한 LPI에 대한 95% 신뢰하한과 이에 따른 무상 보증기간 내 고장비율의 상한은 각각 1.109와 9.99%가 된다.

4. 추정량의 비교

본 논문에서는 어떤 추정량을 선택해야 좋은지에 지침을 제공하기 위해 두 추정량의 편의와 MSE(Mean Squared Error)을 구하여 비교하였다.

\hat{C}_L 의 편의는 3절의 식(12)로부터 구할 수 있으며, 특히 지수분포이면 $bias(\hat{C}_L)$ 는

$-k/(n-1)$ 이 된다. $n=10, 20, 50$ 일 때 $bias(\hat{C}_L)/k$ 를 β 에 대해 도시한 <그림 7>을 보면 모든 경우에 \hat{C}_L 는 LPI를 과소추정하고 있으며, n 이 커질수록, 또는 β 가 커질수록 편이의 절대값이 감소됨을 파악할 수 있다.



<그림 7> $bias(\hat{C}_L)/k : n = 10, 20, 50$

두 추정량의 통계적 우월성을 비교하는 척도로 MSE를 삼을 수 있으므로, 먼저 두 추정량의 분산은 식 (9)를 이용하여 구하면 다음과 같이 된다.

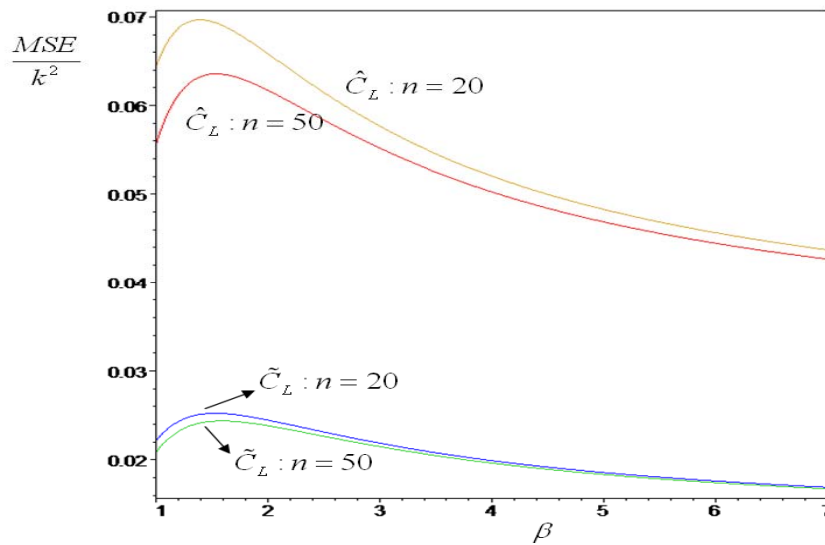
$$Var(\hat{C}_L) = \frac{k^2 n^{2/\beta} \left[\Gamma\left(n - \frac{2}{\beta}\right) \Gamma(n) - \Gamma^2\left(n - \frac{1}{\beta}\right) \right]}{M^2 \Gamma^2(n)} \quad (16)$$

$$Var(\tilde{C}_L) = MSE(\tilde{C}_L) = \frac{k^2 \left[\Gamma\left(n - \frac{2}{\beta}\right) \Gamma(n) - \Gamma^2\left(n - \frac{1}{\beta}\right) \right]}{M^2 \Gamma^2\left(n - \frac{1}{\beta}\right)} \quad (17)$$

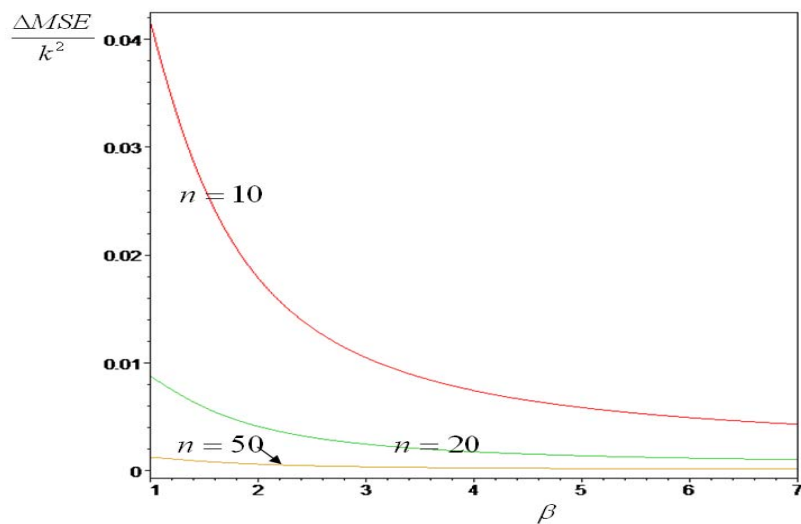
여기서, 지수분포를 따르면 $Var(\hat{C}_L)$ 과 $Var(\tilde{C}_L)$ 는 각각 $\frac{k^2 n^2}{(n-1)^2(n-2)}$ 과 $\frac{k^2}{(n-2)}$ 로 간략하게 표시되며, 후자가 전자보다 작음을 쉽게 알 수 있다. 그리고 \hat{C}_L 의 MSE는 식 (12)의 편이의 제곱과 식 (16)의 분산을 더하면 된다.

<그림 8>은 두 추정량의 MSE/k^2 을 도시한 것으로, 이를 보면 \tilde{C}_L 의 MSE가 \hat{C}_L 보다 작음을 알 수 있으며, 두 MSE는 β 가 구간 (1, 2)의 특정 값까지 증가하다가 그 이후에 감소

함을 알 수 있다. 두 추정량의 MSE/k^2 의 차($\frac{\Delta MSE}{k^2} = \frac{MSE(\hat{C}_L) - MSE(\tilde{C}_L)}{k^2}$)를 n 과 β 에 대해 도시한 <그림 9>를 보면 n 이 50정도가 되면 \hat{C}_L 와 \tilde{C}_L 의 MSE가 거의 근접해짐을 확인할 수 있다. 특히 지수분포를 따르면 MSE/k^2 의 차는 $3/[(n-1)(n-2)]$ 로 간략하게 구할 수 있다.



<그림 8> 두 추정량의 MSE/k^2



<그림 9> 두 추정량에 대한 $\Delta MSE/k^2$

두 추정량에 대한 편의와 MSE의 도출결과로부터 \tilde{C}_L 이 \hat{C}_L 보다 통계적 성질측면에서 우수

함을 알 수 있으며, 이의 우월성은 β 가 커지거나, n 이 증가함에 따라 점점 약화되고 있다. 한편 \widehat{C}_L 은 MLE의 바람직한 성질(유효성, 점근적 정규성, 불변성 등)을 가지고 있는 이점이 있으며, 편의 측면에서도 LPI를 과소 추정하는 보수적인 성질을 가지고 있어 β 가 작거나, 또는 n 이 작을 경우가 아니면 LPI의 추정량으로 충분히 활용할 수 있다.

5. 결론

공정의 균질성(uniformity)을 나타내는 공정능력을 간편하게 나타내는 단순한 척도로 공정능력지수가 널리 쓰인다. 본 논문에서는 정규분포를 따르는 경우를 주 대상으로 하는 이런 공정능력지수 중에서 규격하한만 존재하는 비정규 분포를 따르는 수명자료에 활용할 수 있도록 정의된 수명성능지수(LPI)에 대해 다양한 수명분포에 대한 가설검정절차만을 연구주제로 삼고 있는 기존연구와는 달리 이의 실제 활용 가능성을 세 가지 경우에 예시하였다. 또한 수명분포로 널리 쓰이는 와이블 분포를 따르며 형상모수가 알려져 있다고 가정할 때 LPI의 최우추정량과 불편추정량에 대한 통계적 성질을 조사하고 이의 선택에 도움이 될 수 있는 지침을 제공하였다.

본 논문의 대상은 완전자료를 한정하여 전개하고 있지만 제 2종 관측중단일 경우에 고장개수가 r 이고 $T_{(j)}$ 가 올림차순으로 정렬된 j 번째 고장시간일 때 $W = \sum_{i=1}^n (T_{(i)}^\beta + (n-r)T_{(r)})$

로 정의하면 $2W/\eta^\beta$ 는 자유도 $2r$ 인 χ^2 분포를 따르므로(Lawless(2002)), 3과 4절의 결과를 쉽게 이 상황에 적용할 수 있다.

앞으로 공정능력지수와 유사하게 현업에서 LPI의 지수 값이 보편적으로 인식될 수 있도록 다양한 응용사례를 개발하고 널리 보급할 필요가 있으며, 더불어 형상모수가 알려져 있다고 가정한 와이블 분포 외에 다양한 수명분포와 보다 포괄적인 시험상황에 적용할 수 있는 후속연구가 요망된다.

참고문헌

- [1] 서순근(2011), 2단계 신뢰성 실증시험의 통계적 설계, 품질경영학회지, 39권, 2호, 313-319.
- [2] Ahmadi, M. V., Doostparast, M., and Ahmadi, J.(2013a), "Estimating the Lifetime Performance Index with Weibull Distribution Based on Progressive First-Failure Censoring Scheme," Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 239, 93-102.
- [3] Ahmadi, M. V., Doostparast, M., and Ahmadi, J.(2013b), "Statistical Inference for the

- Lifetime Performance Index Based on Generalised Order Statistics from Exponential Distribution," *International Journal of Systems Science*, to appear.
- [4] Annis, M. Z.,(2008), "Basic Process Capability Indices: An Expository Review," *International Statistical Review*, Vol. 76, 347-367.
- [5] Hong, C-W., Wu, J-W., and Cheng, C-H.(2007), "Computational Procedure of Performance Assessment of Lifetime Index of Businesses for the Pareto Lifetime Model with the Right Type II Censored Sample," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 184, 336 - 350.
- [6] Hong, C-W., Lee, W-C., and Wu, J-W.(2012), "Computational Procedure of Performance Assessment of Lifetime Index of Products for the Weibull Distribution with the Progressive First-Failure-Censored Sampling Plan," *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2012, Article ID 717184, 13 pages.
- [7] Jiang, R. and Murthy, D. N. P.(2011), "A Study of Weibull Shape Parameter: Properties and Significance," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 96, 1619-1626.
- [8] Kane, V. E.(1986), "Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, 41-52.
- [9] Lawless, J. E.(2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, 2nd ed., John Wiley & Sons Inc., New York(USA).
- [10] Lee, H-M., Lee, W-C., Lei, C-L., and Wu, J-W.(2011a), "Computational Procedure of Assessing Lifetime Performance Index of Weibull Lifetime Products with the Upper Record Values," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, 1177 - 1189.
- [11] Lee, H-M., Wu, J-W., Lei, C-L., and Hung, W-L.(2011b), "Implementing Lifetime Performance Index of Products with Two-Parameter Exponential Distribution," *International Journal of Systems Science*, Vol. 42, 1305-1321.
- [12] Lee, W-C.(2011), "Inferences on the Lifetime Performance Index for Weibull Distribution Based on Censored Observations Using the Max p-Value Method," *International Journal of Systems Science*, Vol. 42, 931-937.
- [13] Lee, W-C., Wu, J-W., and Hong, C-W.,(2009), "Assessing the Lifetime Performance Index for Exponential Distribution," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 231, 648-656.
- [14] Lee, W-C., Wu, J-W., and Lei, C-L.,(2010), "Evaluating the Lifetime Performance Index with the Exponential Distribution under Progressively Type II Right Censored Samples," *Applied mathematical Modelling*, Vol. 34, 1217-1224.
- [15] Tong, L-I., Chen, K. S., and Chen, H. T.(2002), "Statistical Testing for Assessing the Performance of Lifetime Index of Electronic Components with Exponential Distribution", *International Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 19, 812

- 824.

- [16] Wu, J-W., Lee, H-M., and Lei, C-L.(2007), "Computational Testing Algorithmic Procedure of Assessment for Lifetime Performance Index of Products with Two-Parameter Exponential Distribution," Applied Mathematics and Computation, Vol. 190, 116 - 125.
- [17] Yum, B-J. and Kim, K-W.(2010), "A Bibliography of the Literature on Process Capability Indices," Quality and Reliability Engineering International, Vol. 27, 251-268.