

技術論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 41(10), 813-819(2013)

DOI:http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2013.41.10.813

반구형공진기 실험장치 개발과 진동패턴 제어

김동국*, 윤형주**, 진재현***

Development of a Test System for a Hemispherical Resonator
and Control of Vibrating Pattern

Dongguk Kim*, Hyungjoo Yoon** and Jaehyun Jin***

Sunchon National University*·***, Korea Aerospace Research Institute**

ABSTRACT

The authors have developed a test system for a hemispherical resonator gyroscope by using NI FPGA equipment. We have verified its suitability for the research of resonator gyroscopes through several tests: deriving resonance, controlling amplitudes, and estimating resonator parameters. The authors have adjusted a vibrating pattern to be aligned with the driving axis (or electromagnets). This pattern alignment is a basic and important operation of the FTR mode, which is one of operating modes for resonant gyroscopes.

초 록

본 논문에서는 반구형 공진자이로에 대한 연구를 위해 NI FPGA 장비를 기반으로 한 실험 장치를 개발하였고 공진유도, 진폭제어 및 회전실험을 통해 실험 장치에 대한 적합성을 판별하고 시스템에 대한 파라미터를 추정하였다. 또한 공진기의 형상 불균일로 인해 진동패턴이 표류하는 현상을 확인하고, 이를 정렬시킴으로써 구동모드중 하나인 FTR 모드 구현에 대한 선행연구를 수행하였다.

Key Words : Hemispherical resonator gyroscope(HRG, 반구형 공진 자이로), NI FPGA, Vibration pattern control(진동패턴제어), FTR mode(재평형 모드)

1. 서 론

항공우주 선진국에서는 초정밀급에 속하는 자이로를 개발하여 위성, 심우주 탐사선, 잠수함 등과 같이 전략 무기 시스템 및 우주시스템의 항법과 자세제어 장치에 활용하여 왔다. 특히, 1980년대부터 미국과 러시아에서는 기존 초정밀 자이로에 비해 뛰어난 성능을 가진 고체형의 반구형 공진 자이로스코프를 개발하였으며 탁월한 신뢰성과 우주환경에 대한 강인성 때문에 인공위성 및

심우주 탐사선과 같은 우주분야에 널리 적용되어 왔다. 하지만 선진국으로부터 초정밀 관성센서에 대한 기술이전은 엄격하게 제한되어 있으므로 국내에서의 독자적인 개발은 필수적이다.⁽¹⁾

공진 자이로는 1890년 Bryan의 와인 잔 실험을 통해 동작원리가 발견되었다. 공진기가 회전운동을 할 때, 공진에 의하여 발생하는 정상파(standing wave)가 기둥을 축으로 하는 각속도 입력에 비례하여 세차운동을 하는 원리를 이용한다. 공진기의 형상에 따라 반구형, 실린더형, 디

† Received: May 2, 2013 Accepted: September 9, 2013

*** Corresponding author, E-mail : donworry@sunchon.ac.kr

http://journal.ksas.or.kr/

pISSN 1225-1348 / eISSN 2287-6871

스크형, 링형 등으로 구분되며 이 중 반구형 공진자이로(Hemispherical Resonator Gyroscope, HRG)는 재료특성이 좋은 용융석영을 사용하여 우수한 환산계수, 온도특성 및 바이어스 안정도를 갖는다. 또한, 진동을 이용하므로 고정부와 구동부 사이에 마찰이 없어 마모현상이 없는 장점이 있다. 1980년대 미국 Delco사에서 실용품으로 개발한 이후 전략 급으로 발전해오고 있다^(2,5).

본 논문에서는 HRG의 동작원리 및 특성을 이해하기 위해 실험환경을 구축하고 공진 유도, 진폭제어 및 회전 실험을 수행한다. 또한 공진기 구동 모드중 하나인 FTR 모드구현을 위해 진동패턴을 정렬시킨다.

II. 공진 자이로의 이해

2.1 작동원리

HRG는 공진기의 세차운동에 의해 발생하는 각 변위를 통해 각속도를 측정할 수 있다. Fig. 1은 진동하고 있는 공진기를 위쪽에서 본 모습이다. 공진모드는 진동하는 동안 변위가 없는 4개의 노드점과 가장 큰 변위를 갖는 4개의 안티노드점이 발생하며 에너지 손실이 가장 적고 회전 각 측정이 용이한 2차 공진모드를 사용한다⁽⁶⁾.

Figure 1의 (a)와 같이 정상파가 형성된 상태에서 외부케이스가 (b)와 같이 반시계 방향으로 45° (θ)회전했다면 정상파는 기준점으로부터 시계방향으로 13.5° (0.3θ) 떨어지게 된다. 이 때 0.3은 세차계수로서 공진기의 형상에 의해 결정되는 값이다⁽⁷⁾.

HRG는 각속도와 회전각을 측정하기 위해서 두 가지의 동작모드를 가진다. 회전 입력에 따라 진동패턴이 자유롭게 세차운동을 하며 세차각을 이용해 회전각을 측정하는 Whole Angle(WA) 모드와 외부입력이 가해졌을 때 세차운동으로 인해 회전한 진동패턴을 재평형루프를 통하여 케이스와 정렬되도록 하는 Force to Rebalance(FTR)모드가 있다. FTR 모드는 정전 구동기에 인가된 힘을 통해 각속도 입력을 추정한다.

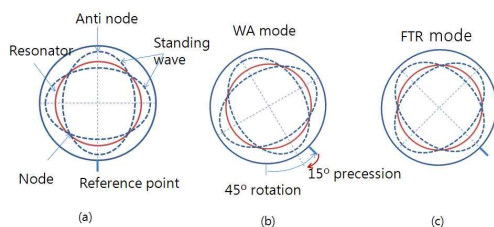


Fig. 1. Principle of HRG

2.2 공진기 지배방정식

반구형 공진자이로의 끝단부분 질점에 대한 운동방정식은 일반적인 CVG(Coriolis Vibratory Gyroscope)의 운동 모델로 표현할 수 있다. 이상적인 공진기 형상의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

공진기를 제작함에 있어 완벽한 반구형을 구현하는 것은 불가능한 일이며, 항상 결함이 존재하는 불균일한 형상이다. 이러한 형상은 제작된 공진기의 질량, 강성 및 댐핑이 고루 분포되어 있지 않는 형태를 나타낸다. 이것의 영향은 공진기의 공진 주파수가 분리(splitting)되고 모드의 위치가 변하며 각 모드의 댐핑 요소가 차이를 갖게 된다. 불균일성을 고려하고 가진력과 일정한 회전입력을 가했을 때의 운동방정식은 다음과 같이 표현 할 수 있다⁽⁸⁾.

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2k\Omega\dot{y} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)(\dot{x}\cos 2\theta_\tau + \dot{y}\sin 2\theta_\tau) \\ + \omega^2 x - \omega\Delta\omega(x\cos 2\theta_\omega + y\sin 2\theta_\omega) &= f_x \\ \ddot{y} + 2k\Omega\dot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{y} + \Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)(-\dot{x}\sin 2\theta_\tau + \dot{y}\cos 2\theta_\tau) \\ + \omega^2 y + \omega\Delta\omega(-x\sin 2\theta_\omega + y\cos 2\theta_\omega) &= f_y \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 x, y 는 45°를 이루는 두 좌표축으로 진동이 없는 원형에서 타원으로의 변위를 의미한다. Ω 는 공진기 축 방향으로의 회전입력, k 는 세차계수이며 세차각과 회전입력의 비로 표현된다. $\theta_\omega, \theta_\tau$ 는 각각 주고유진동수와 주댐핑 방향이 놓인 위치이며, f_x, f_y 는 x 및 y 방향의 가진력을 나타낸다. 공진기의 불균일한 형상으로 인해 x, y 축방향의 고유진동수와 감쇄율이 동일하지 않기 때문에 고유진동수를 ω_1, ω_2 , 댐핑 시상수를 τ_1, τ_2 으로 나타내고 식 (3)과 같이 표현 할 수 있다⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right), \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \\ \omega\Delta\omega &= \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}, \Delta\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \end{aligned} \quad (3)$$

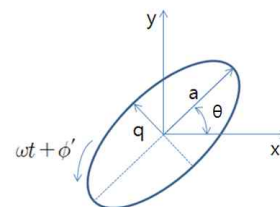


Fig. 2. Canonical variation

식 (1)의 해는 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} x &= a \cos\theta \cos(\omega t + \phi') - q \sin\theta \sin(\omega t + \phi') \\ y &= a \sin\theta \cos(\omega t + \phi') + q \cos\theta \sin(\omega t + \phi') \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)를 x, y 평면에 나타내면 Fig. 2와 같이 타원 궤도를 따라 움직인다. Fig. 2의 x, y 축은 직교하지만, $n=2$ 모드에서는 두 축이 45° 를 이루게 된다. 실제 공진기에서 x, y 축은 가진과 센싱 전극의 위치를 나타내며, x, y 는 각 축의 변위를 나타낸다. 타원의 장반경, 단반경, 장반경의 위치, 초기위상을 나타내는 표준변수 a, q, θ, ϕ' 는 이상적인 공진기의 경우에는 q 가 0이 되어 직선운동이 되지만, 공진기의 형상이 불균일하여 각 축의 고유진동수와 댐핑이 불일치하며 외부 각속도(Ω)가 존재하게 될 경우, a, q, θ, ϕ' 는 시간에 따라 천천히 값이 변하게 된다. 위의 변수들로 인해 진동패턴이 표류하는 쿼드러처 진동이 나타나게 된다⁽¹⁰⁾.

III. 실험장치 구축

3.1 공진기 준비

본 실험 장치는 공진자이로에 대한 이해를 위해 실제 공진 자이로보다 부피가 큰 공진기를 선택하였으며, 차후 공진기 형상에 대한 실험을 위해 공진기 교체가 가능하도록 제작하였다. 공진기는 고유진동수가 가청주파수에 속해 공진을 소리로 확인할 수 있는 제품을 선택하였고, 스테인리스 재질로 되어있으며 종탄성계수(E)는 $1.93e11$, 횡탄성계수(G)는 $7.366e10$, 두께는 0.25mm 이고 지름은 190mm 이다. Fig. 3은 ANSYS를 이용한 모드해석 결과이다. 2차 공진 모드는 4,5번의 189Hz 정도이다. Fig. 4는 공진기의 x 축에 Impulse를 가해 microphone을 통해 신호를 수집한 후, FFT해석을 수행한 결과이다. 170Hz 부근에서 2차 모드의 고유진동수가 나타났다. 해석 결과와 실험 결과가 다소 차이가

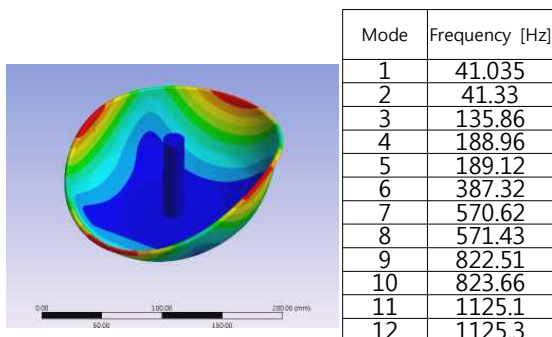


Fig. 3. Resonator modeling and modal analysis

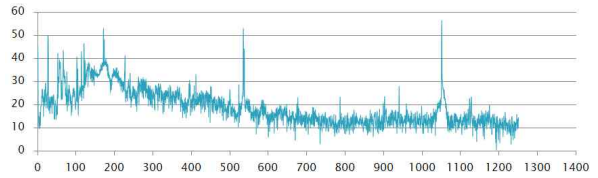


Fig. 4. FFT analysis of the impulse response

있지만 각 모드간 나타나는 주파수의 간격이 비슷하고 불완전한 공진기의 형상을 고려했을 때 해석의 결과가 의미 있는 데이터라 판단된다.

3.2 모니터링 시스템

Figure 5는 실험장치 구성도와 system을 제어하는 labview 프로그램이다. 실험 장치는 공진기, 전자석, 근접센서, NI FPGA, 회전테이블, 증폭기와 필터로 구성되어 있다. FPGA 장비를 통해 전압신호를 생성하고 신호를 증폭하여 전자석에 입력한다. 전자석에 의해 진동하는 공진기의 변위를 센서로 측정한다. 측정된 신호로부터 공진기의 변위 및 진폭을 모니터링하며 동시에 진폭을 제어 할 수 있도록 programming하였다. FPGA 장비의 성능은 최대 40MHz 의 속도로 신호를 입

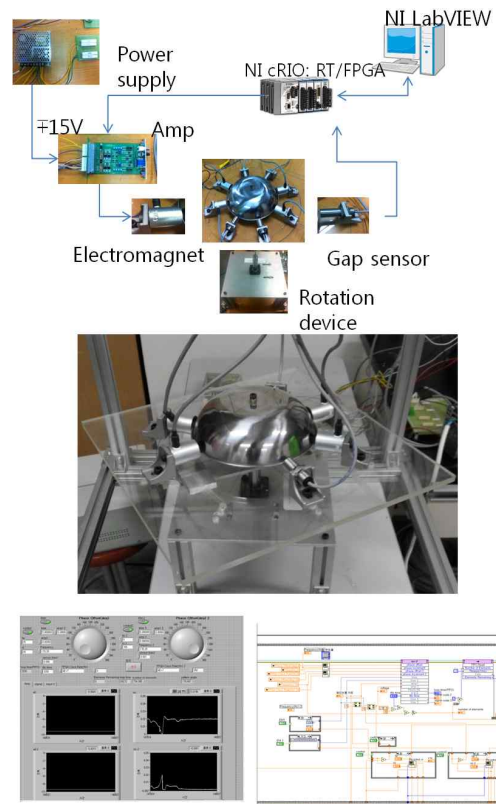


Fig. 5. Test system for resonator gyro

출력할 수 있으며, 이는 실제 공진기에도 적용할 수 있다. 그리고 루프를 병렬로 구성하여 사용할 수 있는 장점이 있다. 본 논문에서는 125Khz의 속도로 신호를 입출력하였으며, 신호(sin wave)의 진폭, 위상 및 bias를 조절할 수 있도록 루프를 구성하였다. 최대 출력전압이 ±10V인 FPGA 장비로는 전자식 구동에 어려움이 있으므로 증폭기를 통해 신호의 전류와 전압을 증폭시켜 전자석을 구동한다. 진동하는 공진기의 변위를 근접 센서를 사용해 측정하고, 200Hz의 차단주파수를 갖는 저역 통과 필터를 통해 노이즈를 감소시킨다. 필터링 된 신호는 다시 FPGA 장비로 입력해 신호를 제어한다.

3.3 필요 계산식

본 실험에서 사용하는 센서는 Fig. 6과 같이 비선형적으로 출력 값을 생성한다. 이 중 일부구간은 선형적으로 값이 변한다. 센서의 출력이 선형구간에서 작동하도록 배치하고 실험을 진행하였다. 이 때 센서의 전압 대비 거리의 기울기는 1.3이다. 진동의 변위는 1mm를 초과하지 않으므로 신호를 선형으로 가정한다. 센서에서 출력된 신호를 필터에 통과 시키므로 신호를 모니터링하기 위해서는 필터의 증폭비도 고려해야 한다.

필터 자체의 신호 증폭 비는 1.9이다. 실제 진폭 = 신호 진폭 / 1.9 * 1.3의 관계를 이용해 신호를 거리 단위(mm)로 나타낼 수 있다.

신호진폭은 식 (5)를 통해 얻을 수 있다.

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(k), b_n = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{k=0}^n (f(k) - a_0)^2} \quad (5)$$

a_0 는 bias 전압, b_n 은 출력신호의 진폭을 나타낸다. 여기서 n은 계산할 데이터 양으로 본 실험에

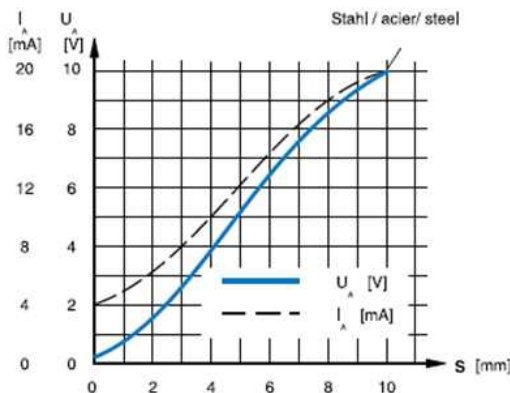


Fig. 6. Sensor response diagram

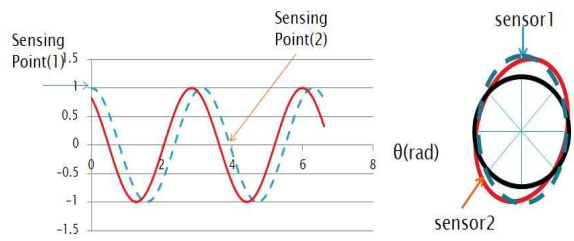


Fig. 7. Estimation of pattern angle

서는 신호의 10주기마다의 평균 진폭 값을 구한다. ($n = \text{샘플링시간} \times \text{가진 주파수} / \text{사용주기}$) 실험 데이터를 통해 두 개의 센서에서 얻은 값을 이용하여 패턴 표류 각을 계산할 수 있다. 공진기 패턴을 각도에 따른 공진기의 변위로 나타내면, Fig. 7과 같이 cosine wave로 나타낼 수 있다. cosine wave의 위상은 공진기의 패턴 표류 각을 의미하고, 진동 패턴은 식 (6)을 사용하여 추정할 수 있다.

$$y_1 = A \cos \psi, y_2 = A \cos(2\theta + \psi) \quad (6)$$

$$A = \frac{y_1}{\cos \psi} = \frac{y_2}{\cos(2\theta + \psi)}$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{y_1 \cos 2\theta - y_2}{y_1 \sin 2\theta} \right)$$

y_1, y_2 은 각 센서에서 측정한 값, θ 는 센서가 배치된 각이며 ψ 는 패턴 표류 각이다.

IV. 공진기 실험

4.1 공진 발생

Figure 8은 반구형 공진기의 2차 모드 진동 과정을 나타낸 것이다. 가진 방향으로 진동의 피크가 나타나고 90° 떨어진 곳에서 다시 한 번 피크가 나타나게 된다. Impulse 응답으로 얻은 공

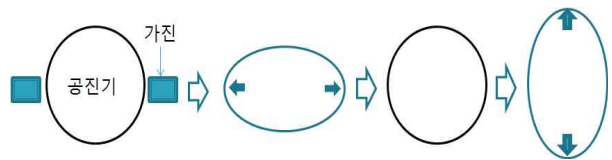


Fig. 8. N=2 mode vibration

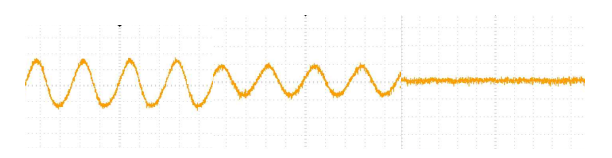


Fig. 9. Experiment of induced resonance (170.1Hz, 170Hz, 160Hz)

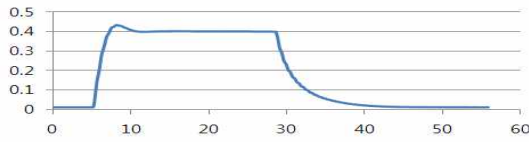


Fig. 10. Logarithmic decrement of resonator's amplitude

진기의 2차 모드의 고유진동수로 입력을 가해준다. 실험 결과 Fig. 9와 같이 170.1Hz에서 공진이 나타나고 다른 주파수에서는 현저하게 낮은 진동이 발생하였다.

4.2 공진기 파라미터 분석

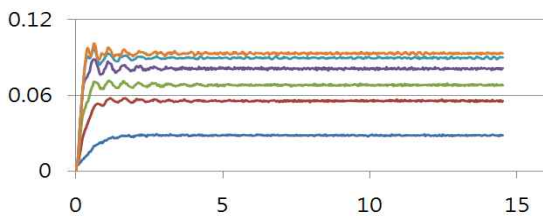
Figure 10은 공진기의 x축에 고유진동수로 전자석의 힘을 가한 상태에서 가진력을 제거하였을 때의 진폭변화를 나타낸다. 실험 데이터와 식(7)을 사용하여 대수감소율 δ 를 구할 수 있고, 이를 이용하여 시스템의 감쇄율 ζ 를 구한다. 여기서 T는 진동 주기이다. 계산 결과 ζ 값은 0.00032이며 시상수(τ)는 2.6 sec이다⁽¹¹⁾.

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+nT)} \right), \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}, \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} \quad (7)$$

4.3 진폭제어

실험 중 주변 온도나 밀도 등 실험 환경의 영향으로 인해 일정한 전압을 입력하여도 공진기 진폭은 다른 값을 나타낸다. 이러한 현상은 실제 공진자이로에도 적용되며, 신뢰성 있는 결과를 얻기 위해서는 진폭제어가 필수적이다. 이를 위해 P 제어를 통한 x축의 진폭제어를 수행하였다. Fig. 11은 초기 상태에서 0.1mm 입력을 주었을 때의 결과이다.

p gain에 따라 진폭의 오차는 줄어들었고 정상상태 오차가 0.007mm 정도이다. 이는 차후 PI 제어를 통해 정상상태 오차를 상쇄시킬 예정이다.



gain	10	30	50	100	200	300
Amp.(mm)	0.028	0.055	0.068	0.081	0.09	0.093

Fig. 11. Results of P control

4.4 패턴정렬

불균일한 형상을 가지고 있는 공진기는 주파수와 감쇠의 분산에 의해 진동패턴이 표류하는 현상이 나타난다. FTR모드 구현을 위해서는 구동축과 45° 떨어진 곳에서의 진폭이 0을 유지하도록 진동패턴을 제어 할 수 있어야 한다. 본 실험에서는 감쇠 차이에 의한 패턴의 표류를 확인하고, 이를 제어한다. x, y는 가진 및 센싱 축으로써 이상적인 공진기의 안티노드점과 노드점을 나타내고, 주파수 분산과 입력 가속도에 대한 영향을 없애기 위해 각축의 입력 주파수는 동일하며, 가속도 입력은 고려하지 않았다. 실험 방법은 x축 방향으로 가진하였을 때 진동패턴의 표류로 인해 나타나는 y축 방향의 진동에 대해 반대위상의 힘을 가해주어 노드 점의 진동을 감쇄시키는 원리를 적용하고, 개루프 방식으로 진행하였다.

Figure 12는 x축 방향의 전자석으로만 가진한 실험을 수행한 결과이다. y축 방향에 진동이 나타났으며 이는 진동 패턴이 표류 되어있음을 의

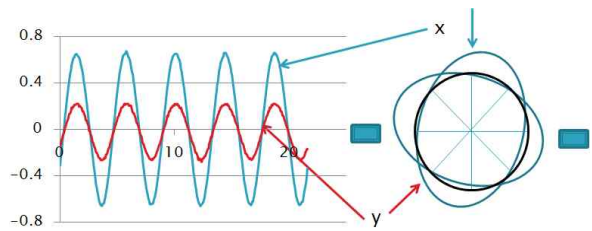


Fig. 12. Measurement of pattern only using excitation electromagnets(E.M)

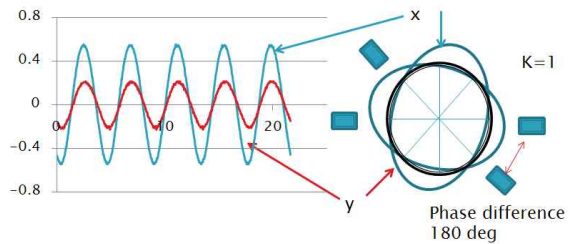


Fig. 13. Measurement of pattern (input phase difference 180°)

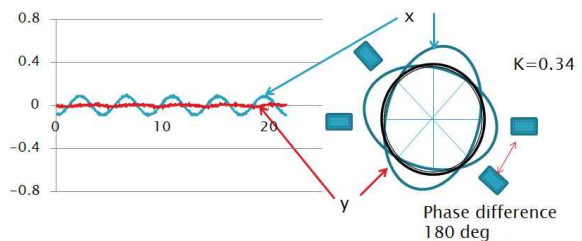


Fig. 14. Measurement of pattern (input phase difference 180° and K=0.34)

미한다. x축과 y축의 진폭 비는 2.756이며 표류 각은 20° 이다. Fig. 13은 x축과 y축 전자석에 180° 위상차를 주어 실험한 내용이다. 실험결과 진폭은 16.2 ~18.9% 정도 감소하였고 진폭 비는 2.8125로 증가하였다. 패턴 표류 각은 19° 이다. Fig. 14는 x축과 y축 전자석 사이에 입력전압의 크기에 차이를 주고 실험한 결과이다. V_x 를 x축 전자석에 대한 입력, V_y 는 제어용 전자석에 대한 입력이라 할 때, $V_x = KV_y$ 관계를 이용해 실험하였다. 여러 차례의 실험 결과 $K=0.34$ 일 때 최적으로 나타났다. 실험 결과 진폭 비는 10.0으로 입력 신호 간 위상차만 존재할 때 보다 증가하였고 표류 각은 4° 로 감소하였다.

실험결과로부터 각축에 입력되는 힘의 비율에 따라 y축의 변위의 진폭이 변화하는 것 알 수 있었고, 특정한 비율에 대해서 y축의 변위가 0에 가깝게 수렴하였다. 이는 진동 패턴이 정렬되는 것을 나타내며, FTR 모드 구현을 위한 중요한 조건을 만족시킨다. 그리고 각속도 추정을 위해 필요한 y축에 인가된 힘의 정보를 얻을 수 있다.

4.5 회전 의 영향

FTR 모드에서는 각속도의 크기에 따라 노드의 진폭이 변하고, 이것을 0으로 만드는데 사용된 힘으로부터 각속도를 추정한다. Fig. 15는 패턴이 정렬되지 않은 상태에서 공진기가 회전했을 때, x축과 y축의 진폭변화를 나타낸 것이다. 실험은 공진기에 일정한 전압을 가한 후 공진기를 1회전했을 때 각속도의 크기에 따른 진폭변화를 관찰한다. 현재 사용하고 있는 회전 장비는 입력 각속도의 상대적인 크기만 구별할 수 있는 제한이 있다. 실험결과는 입력되는 각속도의 크기와 진

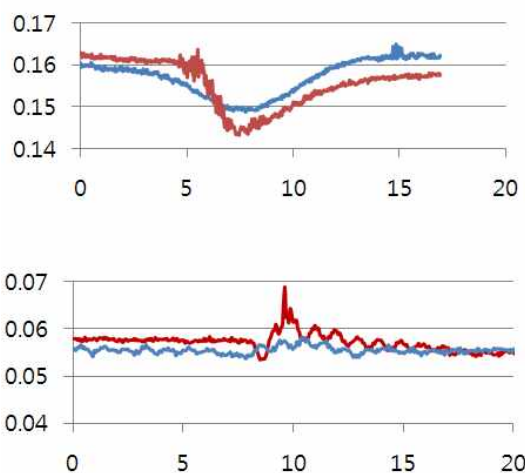


Fig. 15. Effect of rotation(anti node, node)

폭변화율이 비례하는 것을 보여준다. 이는 y축을 0으로 수렴시키는데 인가되는 힘도 각속도의 크기도 비례하게 적용되는 것을 알 수 있고, 본 시스템이 각속도를 추정하는데 있어 기본적인 조건을 만족시키는 것을 확인하였다. 차후 실험에서는 회전에 대한 정확한 값을 입력할 수 있는 장비를 구축하여 각속도와 진폭변화에 대한 실험을 할 계획이다.

V. 결 론

고성능의 초정밀 자이로인 반구형 공진자이로의 연구를 위해 실험 장치를 제작하였다. 실험 장치에 대해 공진기 제어에 필수적인 공진 및 진폭제어를 수행하여 외란에 대해서 일정한 공진 상태를 유지하도록 하였으며, 회전응답실험 및 시스템의 파라미터를 추정하여 시스템의 기초적인 성능 및 특성을 알아냈다. 그리고 개루프 방식으로 수행된 패턴 정렬을 통해 y축의 진폭을 0에 근접하게 수렴시켰고, 각속도를 추정하기 위해 필요한 y축 방향의 힘에 대한 정보를 얻을 수 있었다. 본 실험으로부터 얻은 정보를 통해 향후 PI제어를 통한 진폭제어와 각속도 측정 및 FTR 모드 구현을 위한 알고리즘을 개발할 계획이다.

References

- 1) M. Kang, "Controller Design for a Solid state Resonating Gyro", M.D. Dissertation, Konkuk University, August 2009.
- 2) S. Park, "Oscillation Control Loop Design and Test for Precision Resonant Gyroscope under Noise Conditions", M.D. Dissertation, Konkuk University, May 2012.
- 3) C. Hyun, "Design of robust digital controller for hemispherical resonator gyroscopes", Ph.D. Dissertation, Seoul University, February, 2011.
- 4) M. Kang, T. Kang, Y. Lee, S. Sung and K. Lee, "Research on High Precision Solid State Gyroscope", Proc. of the 2007 Fall Conference of KSAS(I), 2007, pp.911-914.
- 5) H. Kong, S. Hong, J. Kim, "The Implementation and Experiments of Open-Loop Cylindrical Vibratory Gyroscope", Journal of Control, automation and Systems Engineering,

vol. 10, No. 8, 2004, pp. 669-672.

6) C. Hyun, T. Kang, "Signal Detection and Control of Hemispherical Resonator Gyroscopes", Journal of Sensor Science and Technology, Vol. 21, No. 3, 2012, pp. 204-210.

7) Q. Yang, G. Yi, B. Shen, H. Wang, "Kinetic Model Analysis and Testing of HRG", Systems and Control in Aerospace and Astronautics, ISSCAA 2006, 1st International Symposium, 2006, pp.105-109

8) P. W. Loveday, "Analysis And Compensation Of Imperfection Effects In Piezoelectric Vibratory Gyroscopes", Ph.D. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and

State University, February, 1999.

9) D. D. Lynch, "Vibratory Gyro Analysis by Method of Averaging" Proceedings of the 2nd International Conference on Gyroscopic Technology and Navigation, St. Petersburg, Russia, 1995, PP.26-34.

10) H. Myoung, H. Bang J. Lee and J. Lim, "Controller Design of Hemispherical Resonator Gyroscopes using Feedback Linearization", Proc. of the 2008 Fall Conference of KSAS, 2008, pp.911-914.

11) D. Inman, Engineering vibration, 3rd Ed., Pearson Education International, New Jersey, 2008, pp.66-67.