

수심평균 유동 모형의 매개변수와 내부 경계조건에 따른 유속구조 및 전단력 분석

송창근 · 우인성 · 오태근[†]
인천대학교 안전공학과
(2013. 7. 15. 접수 / 2013. 9. 5. 채택)

Analysis of Velocity Structures and Shear Stresses by Parameters and Internal Boundary Conditions of Depth-averaged Flow Model

Chang Geun Song · In Sung Woo · Tae Keun Oh[†]
Department of Safety Engineering, Incheon National University
(Received July 15, 2013 / Accepted September 5, 2013)

Abstract : In this study, a finite element model based on the SU/PG scheme was developed to solve shallow-water equations and the influences of parameters and internal boundary conditions on depth-averaged flow behavior were investigated. To analyze the effect of roughness coefficient and eddy viscosity on flow characteristics, the developed model was applied to rectangular meandering channel with two bends, and transverse velocities and water depth distributions were examined. As the roughness coefficient adjacent to wall increased, the velocities near the wall decreased, and the reduced velocities were compensated by the expanding mid-channel velocities. In addition, the flow characteristics around a circular cylinder were analyzed by varying the internal boundary conditions as free slip and no slip. The assignment of slip condition changed the velocity distribution on the cylinder surface and reduced the magnitude of the shear stress up to one third.

Key Words : depth-averaged flow model, SU/PG, roughness coefficient, eddy viscosity, internal boundary conditions, shear stress

1. 서론

1.1. 연구배경 및 필요성

3차원 연속방정식과 운동량방정식을 시간 적분과 수심 적분하고 비압축성 유체, 정수압 및 Boussinesq 근사, 와점성계수의 도입, 동역학적 자유수면 경계조건과 바닥에서의 무활조건, 밀도의 성층현상을 무시한 순압성 조건, 수평방향 차원이 연직방향에 비해 매우 크다는 조건 등을 적용하면 천수방정식을 얻을 수 있다. 천수방정식을 수치모형화하여 지형자료, 경계조건 및 매개변수를 입력하면 수평 2차원 평면 내에서의 유속과 수심을 구할 수 있다. 천수방정식의 매개변수로는 바닥 및 벽면의 거칠기 정도를 대표하는 조도계수와 유체 흐름특성을 반영하는 점성계수가 있다. 그러나 벽면 조도계수와 텐서형 점성계수가 사행하는 유속구조에 미치는 영향에 관한 분석은 아직 부족한 실정이다.

RMA-2, Telemac-2D, River2D 등 기존의 대부분 국내외 천수흐름해석 상용모형에서는 내부 경계인 하천구조물과 외부 경계인 측벽에서의 경계조건을 활동조건(slip condition)으로 가정하여 흐름장을 계산하였다. 그러나 실제로 벽면에서는 마찰력에 의해 흐름이 존재하지 않는 무활조건(no slip

condition)이 물리적으로 타당하므로 내부 구조물 경계조건에 따른 유속구조 및 전단력 분포를 분석하는 것은 올바른 흐름거동을 해석하기 위해 중요하다.

본 연구에서는 SU/PG 유한요소법을 이용한 수심평균 유동 해석모형을 개발하고 천수흐름 해석모형의 매개변수와 내부 경계조건에 따른 유속구조 및 전단력을 분석하였다.

1.2. 연구목적

본 연구에서는 천수방정식을 Galerkin법과 Newton-Raphson 법에 의해 이산화한 수치모형을 개발하여 수심평균 유동모형의 매개변수와 내부 경계조건에 따른 유속구조 및 전단력을 분석하였다. 천수방정식의 매개변수인 조도계수와 난류점성계수에 따른 사행수로에서의 유속 및 수심 분포를 수치모의하였다. 벽면조도계수와 텐서형 난류점성계수를 변화시켜 8가지 수치모의 조건을 구성하였으며, 만곡부 정점에서의 횡방향 유속분포를 수리실험에 의한 측정값과 비교하였다. 또한 내부 구조물이 존재하는 영역에서 경계면 표면에서의 유속이 존재하는 활동조건과 존재하지 않는 무활조건 등의 내부경계조건을 부여하여 내부 유속 경계조건이 천수흐름 및 전단력에 미치는 영향을 분석하였다.

[†]Corresponding Author: Tae Keun Oh, Tel: +82-32-835-8294, E-mail: tkoh@incheon.ac.kr
Department of Safety Engineering, Incheon National University, 119, Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Korea

2. 본론

2.1. 내부경계조건

하천 및 수로에서 흐름해석을 하는 경우 벽면 경계조건은 좌안과 우안 및 내부 구조물에 적용된다. 유한요소모형에서는 내부 및 외부 경계에서의 유속성분을 접선방향과 법선방향으로 구분하여 계산한다. Fig. 1과 같은 지형의 경우 검은 색으로 표시된 점에서의 단위 법선벡터는 다음 식과 같이 이 절점을 포함하는 요소의 형상함수(ϕ)의 편미분에 의해 구할 수 있다¹⁾.

$$n_x = \frac{1}{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \quad (1a)$$

$$n_y = \frac{1}{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega \quad (1b)$$

$$n = \sqrt{\left(\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \right)^2 + \left(\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega \right)^2} \quad (1c)$$

위 식에서 $\Omega(=I+II)$ 는 해당 절점을 포함하는 요소의 면적을 의미한다. 이 단위 법선벡터를 이용하면 직교좌표계 상의 유속 (u, v)과 회전좌표계 상의 유속 (u_n, u_t)은 다음의 관계를 갖는다²⁾.

$$u_n = n_x u + n_y v \quad (2a)$$

$$u_t = -n_y u + n_x v \quad (2b)$$

따라서 벽면에서의 접선방향 유속만이 존재하는 활동 경계조건을 이용하는 경우 식 (2a)에서 $u_n = 0$ 이 부여되며 벽면에서의 접선 및 법선방향 유속이 모두 0인 무활동 조건을 적용하는 경우에는 $u_t = u_n = 0$ 을 부여한다.

2.2. 수치모형

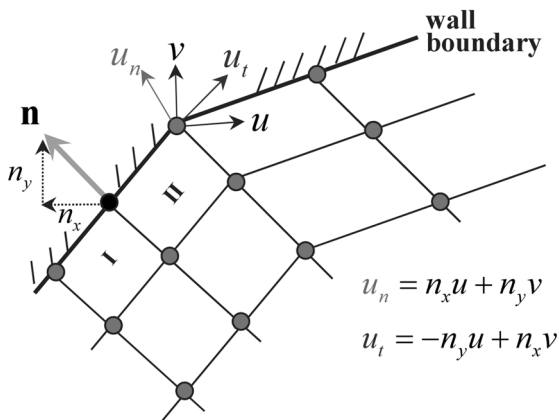


Fig. 1. Velocities at wall boundary.

본 연구에서는 수심평균 유동모형의 매개변수와 내부 경계조건에 따른 유속구조 및 전단력을 분석하기 위해 비보존형 천수방정식을 이용하였다. 질량보존방정식인 식 (3a)와 난류점성계수를 텐서형태로 변형한 x, y -방향 운동량 보존 방정식인 식 (3b) 및 식 (3c)를 지배방정식으로 하여 수평 2차원 평면 내에서 4개의 방향성을 가지는 난류점성계수를 도입하고 다양한 흐름 조건에서 복잡한 유속구조를 보다 정확히 재현할 수 있도록 하였다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial(H+h)}{\partial x} + \nu_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_{yy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - gn^2 \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial(H+h)}{\partial y} + \nu_{xx} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - gn^2 \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3c)$$

위 식에서 u 는 직교 좌표계 상의 x 방향 수심평균 유속, v 는 y 방향 수심평균 유속을 의미하며 ν_{ij} 는 ij 방향으로 작용하는 텐서 형태의 난류점성계수, n 은 조도계수, H 와 h 는 각각 기준선으로부터 하상까지의 거리와 수심을 나타낸다. 지배방정식을 풀기위해 식 (3a)에는 대표적인 유한요소기법인 Galerkin법을 적용하였으며, 식 (3b)와 (3c)에는 SU/PG 기법을 적용하여 수치모형을 구성하고 이송이 지배적인 흐름을 안정적으로 모의할 수 있도록 이산화하였다. 비선형 항인 이송가속도항을 처리하기 위해 Newton-Raphson법을 적용하였으며 theta법으로 시간미분항을 차분하여 해의 정확성과 안정성을 조절할 수 있도록 하였다. Gauss 구적법을 이용하여 수치적분을 수행하였으며 지형에 따라 삼각망과 사각망을 혼용하여 사용할 수 있도록 코드를 작성하였다. 선형대수방정식의 해는 프론탈 기법을 이용하여 구하였다. 지배방정식의 구성, 수치모형의 유도과정과 수치기법 등은^{3,4)}에 상술되어 있다.

2.3. 매개변수의 영향 분석을 위한 수치 모의조건

본 연구에서는 천수방정식의 매개변수인 조도계수와 난류 점성계수에 따른 사행수로에서의 유속분포를 수치모의하기 위하여 조도계수와 텐서형 난류점성계수를 변화시켜 Table 1과 같이 8가지 수치모의 조건을 구성하였다. 수로의 바닥 및 벽면의 재질은 페인트칠된 강재로 제작되어 약 0.010-0.017의 조도를 가지므로, 본 연구에서는⁵⁾에 제시된 페인트칠된 매끄러운 철의 거칠기 정도인 0.013을 기준으로 이보다 약 2배, 3배 및 4.6배 큰 조도계수를 고려하였다. 또한 난류동점성계수의 값을 정하기 위해 $10 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ 범위의 값 중 32개를 적용해 본 결과 $10 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ 의 범위 값을 적용한 경우 만곡부에서의 유속이 적합하게 계산되지 않았

Table 1. Simulation conditions for analyzing parameters influence.

RUN	$Q(m^3/s)$	$h(m)$	n		Kinematic viscosity(m^2/s)		
			Adjacent to wall	Interior	ν_{xx}	ν_{yy}	ν_{zz}
M1-1	0.06	0.3	0.013	0.013	10^{-3}		
M1-2			0.025				
M1-3			0.040				
M1-4			0.060				
M2-1			0.013		10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}
M2-2					10^{-3}	5×10^{-3}	10^{-3}
M2-3					5×10^{-3}	10^{-3}	5×10^{-3}
M2-4					5×10^{-3}	5×10^{-3}	5×10^{-3}

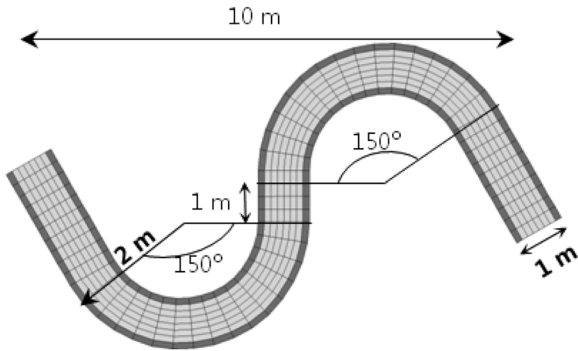


Fig. 2. Finite element and material assignment for analyzing parameters influence

으며, 10^{-7} - 10^{-8} m^2/s 범위의 값을 적용한 경우에는 흐름의 분리 현상이 과도하게 발생하였다. 10^{-3} - 10^{-6} m^2/s 범위의 값을 적용한 경우 만곡부 내외측의 유속차를 정확히 계산하였으며 만곡부에서의 흐름양상은 직선부를 중심으로 대칭적이였다. 이 범위의 난류동점성계수 값을 적용한 경우 모의 결과는 모두 거의 일치하였으므로 본 연구에서는 10^{-3} m^2/s 의 난류동점성계수값을 기준으로 ij 방향 텐서를 고려하여 이보다 5배 큰 값을 포함하여 모의케이스를 구성하였다. 만곡부 정점에서의 횡방향 유속분포를 수리실험에 의한 측정값과 비교하였다. 모의에 적용한 수로는 Fig. 2와 같이 폭(b) 1.0 m, 중심각이 150° , 사행도(시점에서 종점까지 폭의 중앙 지점을 따른 곡률거리를 직선거리로 나눈 값) 1.52인 두 개의 만곡부를 가지는 직사각형 단면 사행수로이며,⁶⁾에 제시된 초당 50개의 유속 측정이 가능한 micro-ADV 장치를 이용하여 실측한 8개의 수리실험 케이스 중 만곡부에서의 내외측 유속차가 크게 발생하는 케이스를 선정하여 수치모의 결과와 비교하였다. 수치모의를 위한 격자망은 518개의 절점과 448개의 요소를 가지는 사각망으로 제작하였으며, 벽면에 인접한 요소의 조도계수를 Table 1 및 Fig. 2와 같이 별도로 설정하여 벽면 조도계수에 의한 영향을 분석하였다.

2.4. 내부경계조건의 영향 분석을 위한 수치 모의조건

벽면에서의 접선방향 유속이 존재하는 활동조건과 벽

Table 2. Computational domain and flow properties for analyzing influence of internal boundary conditions.

Geometry		
Variable	Symbol	Value
Channel width	B	2 m
Channel length	L	4 m
Pier diameter	D	0.22 m
Bottom slope	S_0	6.25×10^{-4}
Flow properties		
Properties	Symbol	Value
Slip condition	SL	-
No slip condition	NS	-
Upstream velocity	u_∞	0.1 m/s
Downstream depth	h_∞	0.185 m
Roughness coeff.	n	0.012

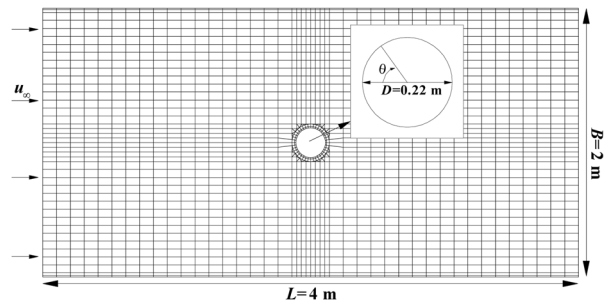


Fig. 3. Finite element for analyzing influence of internal boundary condition.

면에서 유속이 없는 무활조건에 따른 원형 내부 구조물 주변에서의 유속, 수위 및 전단력 분포를 해석하기 위해 Table 2와 같이⁷⁾에서 수치모의 및 수리실험에 사용한 조건을 이용하였다.

교각 직경(D) 0.22 m, 상류단 유속(u_∞) 0.1 m/s, 하류단 수심(h_∞) 0.185 m, 수로 경사(S_0) 6.25×10^{-4} m/m, 조도계수 0.012로 설정하였으며, 활동조건을 SL, 무활조건을 NS으로 칭하였다. 수치모의를 위한 격자망은 Fig. 3과 같이 1,912개의 절점과 1,835개의 삼각 및 사각 요소망으로 구성하

였으며 무활조건을 보다 정확히 재현하기 위해 벽면 근처에서는 조밀한 격자를 구성하였다.

3. 모의결과

3.1. 매개변수의 영향 분석

벽면에 접한 요소의 조도계수를 0.013, 0.025, 0.04, 0.06으로 변화시키고 이외의 영역에서는 0.013으로 적용하여 수치모의하고 두 개의 만곡부 정점에서의 수로 폭방향 유속 모의 결과를 실측값과 비교하여 Fig. 4에 도시하였다. 이 그림에서 조도계수가 커질수록 벽면에서의 유속이 감소하여 실측값과 가까워지지만 벽면근처 이외의 영역에서는 오히려 유속이 증가하여 실측값보다 커지는 경향을 알 수 있다. 따라서 조도계수를 0.013으로 통일하여 적용한 경우의 결과가 전반적으로 실측값과 일치함을 확인하였다.

텐서형 난류동점성계수의 변화에 따른 만곡부 정점에서의 유속분포를 비교하였다. 난류동점성계수가 $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ 보다 작은 경우 횡방향 유속 분포가 $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ 인 경우와 매우 근사하므로 이보다 작은 경우는 고려하지 않았다. Table 1의 M2 케이스와 같이 4가지 경우를 고려하였으며 모의 결과를 Fig. 5에 도시하였다.

이 그림에서 RUN2-4는 RUN2-1에 비해 모든 방향으로 5배 큰 난류점성계수를 가지므로 만곡부 내측과 외측의 유속차가 RUN2-1보다 10% 정도 작았다. xx 와 yy 방향으로 가중된 난류점성계수를 가지는 RUN2-3이 xy 방향으로

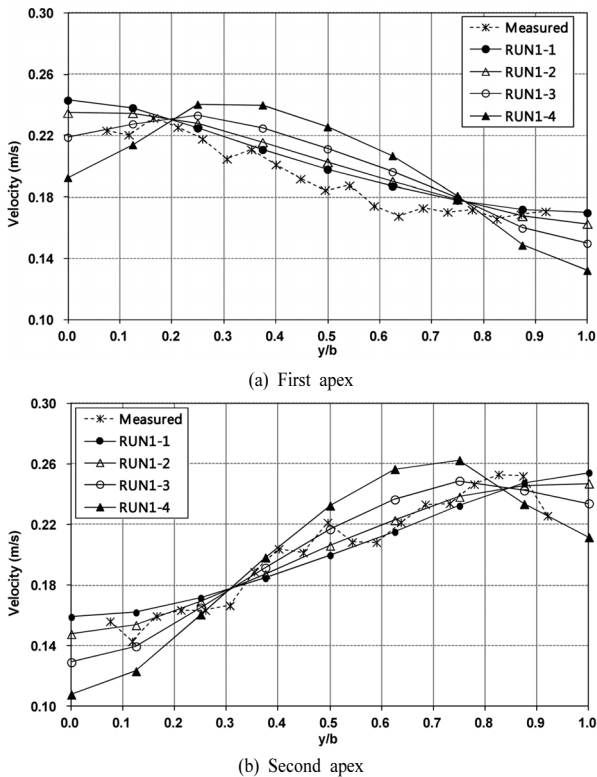


Fig. 4. Velocity distributions by n .

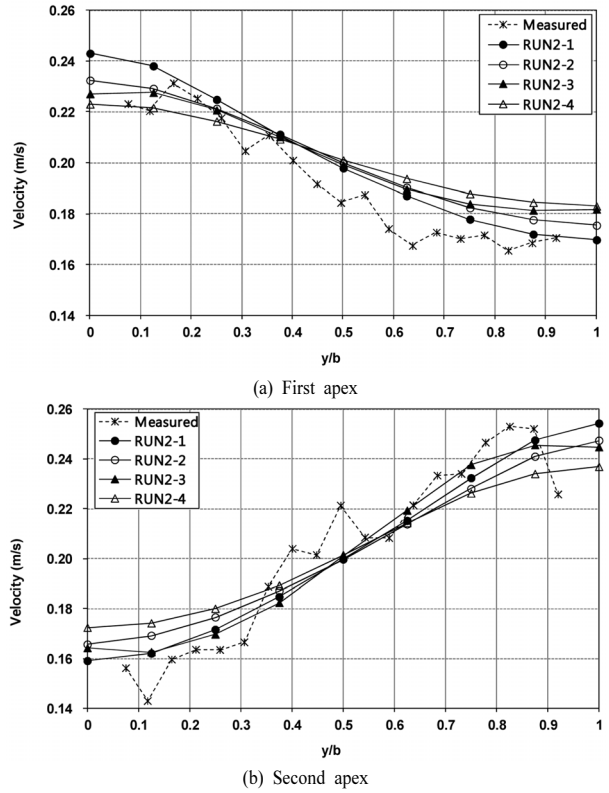


Fig. 5. Velocity distributions by ν .

가중된 난류점성계수를 가지는 RUN2-2에 비해 내외측 유속차가 약간 작게 나타났으며, 유속분포는 $y/b=0.5$ 인 지점을 기준으로 대칭적이었다. 두 번째 만곡부에서도 Fig. 5(b)와 같이 동일한 결과를 얻었다.

Fig. 4와 5를 통해 조도계수와 난류동점성계수를 실측값과 잘 일치하는 0.013과 $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$ 로 입력하여 얻은 유속 벡터도, 등유속도 및 등수심도를 Fig. 6과 7에 수록하였다.

만곡부 유입 이전에는 수로 폭 방향으로 균일한 유속이 발생하나 첫 번째 만곡부에 접근하면서 내측의 유속이 외측에 비해 40% 이상 빠르게 분포하며 첫 번째 만곡부가 종료된 이후의 직선구간에서 국부적으로 균일한 유속이 나타났다. 이 후 두 번째 만곡부에서 다시 내측에 빠른 유속이 분포하고 만곡부 종료 이후 하류단까지 균일한 유속분포가 나타났다. 수로 전체에 걸친 유속분포는 두 만곡부의 중심을 기준으로 대칭적이었다. 이와 같은 유속구조에 의해 Fig. 7과 같이 두 만곡부에서 미약한 편수위 현상이 발생하였다.

3.2. 내부경계조건에의 영향 분석

Table 2의 수치모의 조건에 의해 계산된 유속장을 Fig. 8에 도시하였다. NS의 경우 교각 측면부를 지나는 유속이 SL의 경우에 비해 크게 나타났으며 교각 후면부에서는 무활조건에 의한 흐름의 분리 현상이 잘 나타났다. 또한 SL의 경우 교각 표면을 따라 큰 유속이 분포하고 후면에서도 관성력에 의해 흐름방향 유속이 두드러지게 나타났

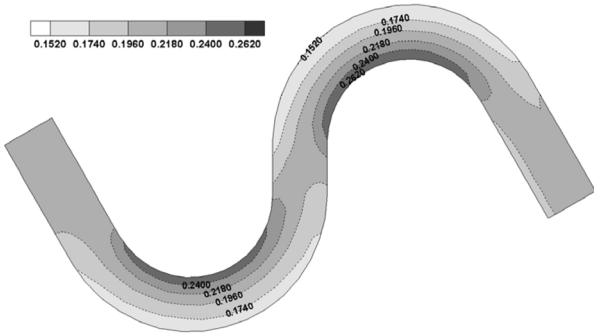


Fig. 6. Velocity contour of M1-1(Unit: m/s).

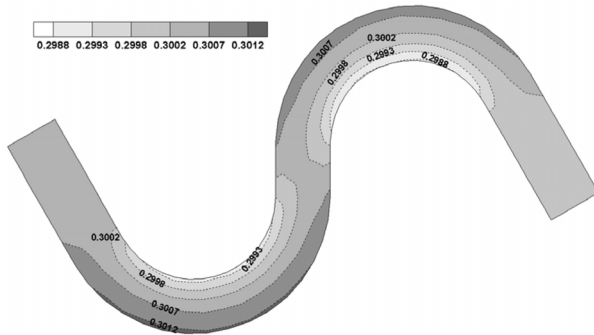
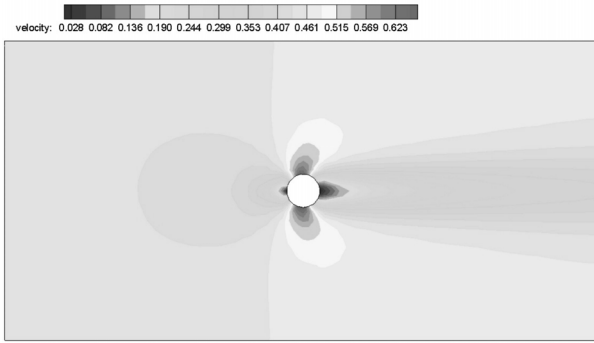
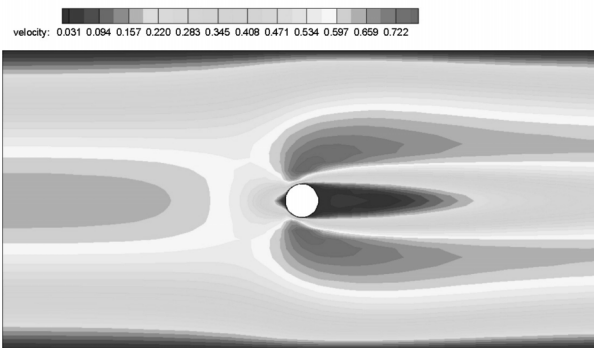


Fig. 7. Depth contour of M1-1(Unit: m).



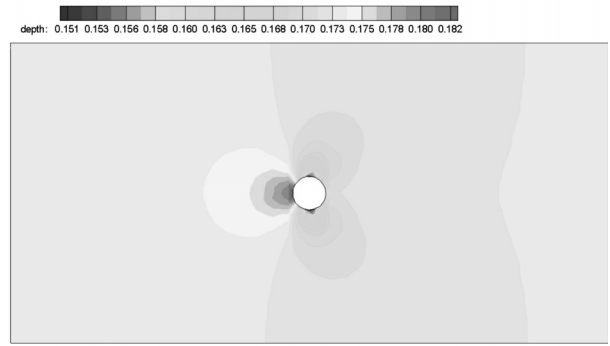
(a) SL



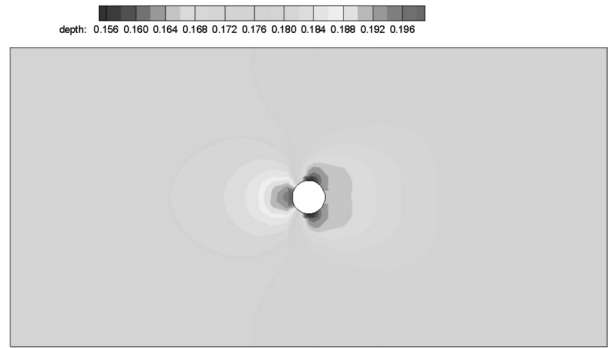
(b) NS

Fig. 8. Velocity contours(Unit: m/s).

으나 NS의 경우 무활조건에 의해 교각 후면에서 와가 형성되고 후류현상이 두드러지게 나타났다.



(a) SL



(b) NS

Fig. 9. Water depth contours(Unit: m).

수치모의에 의한 등수심도 결과를 Fig. 9에 수록하였다. NS의 경우 무활조건에 의한 교각 주위에서의 흐름의 분리현상이 SL에 비해 더욱 두드러지므로 선수파(유체의 흐름에 의해 구조물 전면부 수면에서 발생하는 파)가 4 cm 정도 높게 나타났으며 교각 측면부에서는 2 cm 높게 나타났다. 한편 교각 후면에서는 후류의 영향으로 SL에 비해 수면이 2 cm 낮게 분포하였다

위에서 구한 유속장과 아래 식 (4)를 이용하여 내부 구조물에 작용하는 전단력을 Fig. 10~12에 도시하였다.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (4)$$

위 식에서 μ 는 점성계수이다. 전단력은 유속경사에 비례하므로 무활조건을 적용한 NS의 경우가 SL에 비해 매우 크게 나타났다. xx 방향 전단력은 SL의 경우 $-30.0 \sim 26.0 \text{ N/m}^2$, NS의 경우 $-90.0 \sim 16.0 \text{ N/m}^2$ 의 크기를 가졌으며 원형 실린더의 형태에 의해 방사방향으로 크게 나타났다. yy 방향 전단력은 y 방향 유속의 횡방향 변화량에 의해 계산되므로, SL과 NS 모두 45도와 315도에서 최소값 및 최대값을 나타냈다. xy 방향 전단력은 SL의 경우 원형 구조물을 중심으로 y 축 대칭의 형태로 분포하였고, NS의 경우 x 축 대칭으로 나타났다.

구조물 원주에 작용하는 전단력을 Fig. 3에 표시된 원형 좌표계를 기준으로 아래 그림에 도시하였다. 이 그림에서 실선으로 표시된 무활조건에 의한 전단력이 점선으로 표

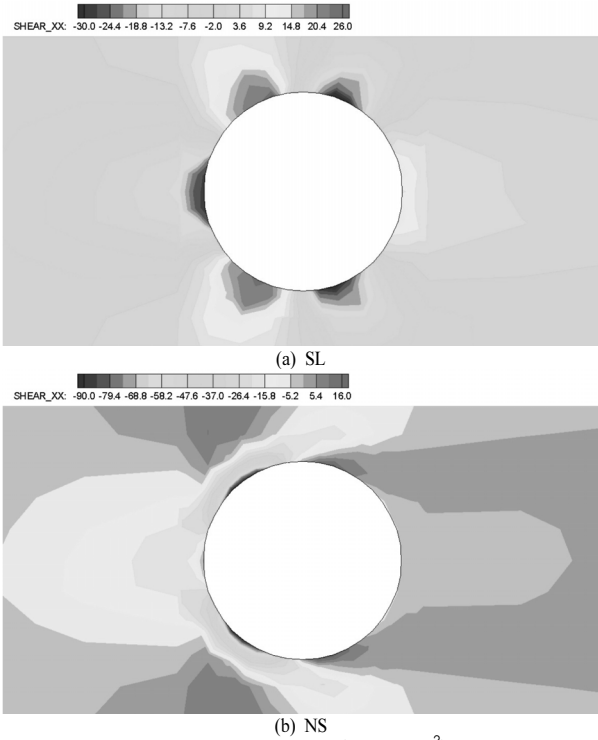


Fig. 10. Shear stress in xx-direction(Unit: N/m²).

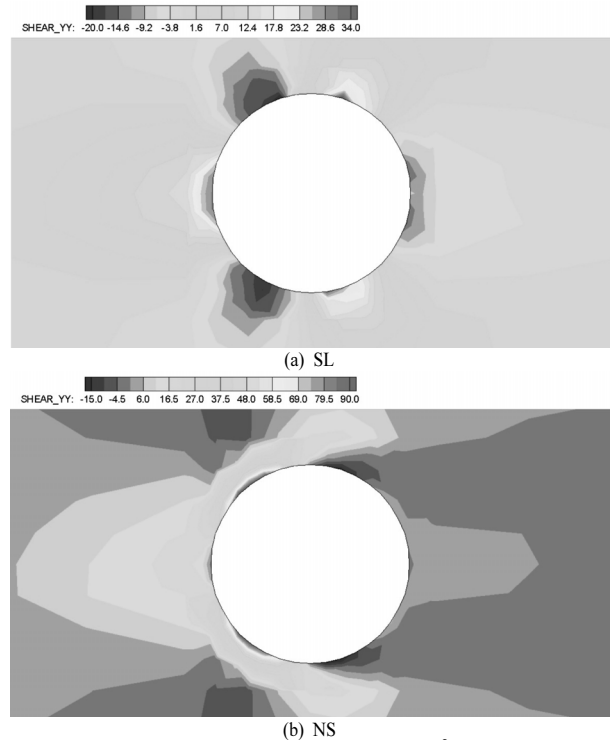


Fig. 12. Shear stress in yy-direction(Unit: N/m²).



Fig. 11. Shear stress in xy-direction(Unit: N/m²).

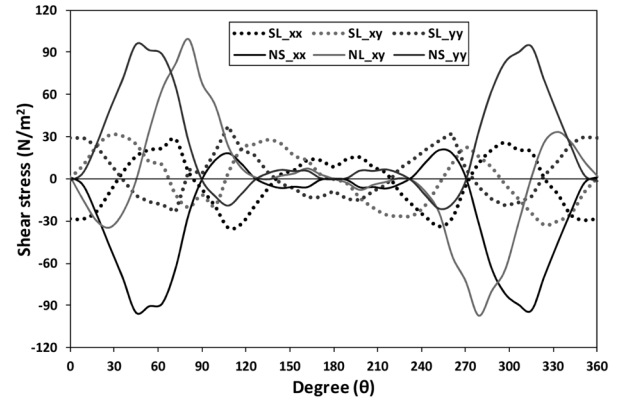


Fig. 13. Shear stress comparisons.

향 전단력은 0도와 180도에서 최소값, 90도와 270도에서 최대값을 가졌다.

4. 결론

본 연구에서는 천수방정식을 Galerkin법과 Newton-Raphson 법에 의해 이산화한 수치모형을 개발하여 수심평균 유동모형의 매개변수와 내부 경계조건에 따른 유속구조 및 전단력을 분석하였다.

천수방정식의 매개변수인 조도계수와 난류점성계수에 따른 사행수로에서의 유속분포를 수치모의하기 위하여 벽면 조도계수와 텐서형 난류 점성계수를 변화시켜 8가지 수치모의의 조건을 구성하였다. 벽면 조도계수가 커질수록 벽

시된 활동조건에 의한 전단력에 비해 약 3배 큰 것을 알 수 있으며 xx방향의 전단력은 yy방향의 전단력과 크기는 동일하나 방향이 반대인 것을 확인할 수 있다. 또한 xy방

면에서의 유속이 감소하여 실측값과 가까워지지만 벽면 이외의 영역에서는 오히려 유속이 증가하여 실측값보다 컸다. 난류점성계수가 커질수록 만곡부 내외측의 유속차는 작게 나타났으며 xx 와 yy 방향으로 가중된 난류점성계수를 가지는 경우가 xy 방향으로 가중된 난류점성계수를 가지는 경우에 비해 내외측 유속차가 약간 작게 나타났다.

또한 벽면에서의 접선방향 유속이 존재하는 활동조건과 벽면에서 유속이 없는 무활조건에 따른 교각에서의 유속, 수위 및 전단분포를 해석하였다. 활동경계조건을 적용한 경우 교각표면을 따라 큰 유속이 분포하고 후면에서도 관성력에 의해 흐름방향 유속이 두드러지게 나타났으나 무활조건을 적용한 경우 교각 후면에서 와가 형성되고 후류현상이 두드러지게 나타났다. 무활조건을 적용한 경우 교각 전면부에서는 선수파(bow wave)가 4 cm 정도 높게 나타났으며 교각 측면부에서는 2 cm 높게 나타났다. 반면 교각 후면에서는 후류의 영향으로 수면이 2 cm 낮게 분포하였다. 교각부에 작용하는 전단력을 분석한 결과 무활조건을 적용한 경우가 활동조건을 적용한 경우에 비해 최대 3배 높은 전단력이 나타났다.

내부 경계면 주변의 유속구조는 구조물의 안정성 진단을 위한 기본자료로 이용할 수 있으며, 물의 흐름에 의해 발생하는 전단력 분포를 해석하여 구조물에 작용하는 외력을 계산할 수 있으므로 본 연구에서 적용한 방법론은 교각 안정성 평가, 극한 홍수사상에 의한 하중도의 보강위치 설계 등에 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글: 이 논문은 인천대학교 2012년도 자체연구비 지원에 의하여 연구되었음.

References

- 1) G. F. Pinder and W. G. Gray, "Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology", Academic press, 1977.
- 2) M. S. Engelman and R. L. Sani, "The Implementation of Normal and/or Tangential Boundary Conditions in Finite Element Codes for Incompressible Fluid Flow", International Journal for Numerical Methods in Fluid, Vol. 2, pp. 225~238, 1982.
- 3) I. W. Seo and C. G. Song, "Development of 2D Finite Element Model for the Analysis of Shallow Water Flow", Journal of Korean Society of Civil Engineers, Vol. 30, No. 2B, pp. 199~209, 2010.
- 4) C. G. Song and I. W. Seo, "Numerical Simulation of Convection-Dominated Flow using SU/PG Scheme", Journal of the Korean Society of Civil Engineers, Vol. 32, No. 3B, pp. 175~183, 2012.
- 5) V. T. Chow "Open channel Hydraulics", McGraw Hill, 1973.
- 6) I. W. Seo and S. W. Park, "Effects of Velocity Structures on Tracer Mixing in a Meandering Channel", Journal of the Korean Society of Civil Engineers, Vol. 29, No. 1B, pp. 35~45, 2009.
- 7) B. Yulistiyanto, Y. Zech and W. H. Graf, "Flow Around a Cylinder: Shallow Water Modeling with Diffusion-Dispersion", Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 124, No. 4, pp. 419~429, 1998.