

큐잉 데이터 기반 하층방어 요격체계의 초고속 표적 탐지 방향 지정을 위한 정밀 궤적예측 기법

A Precise Trajectory Prediction Method for Target Designation Based on Cueing Data in Lower Tier Missile Defense Systems

이 동 관* 조 길 석* 신 진 화* 김 지 은* 권 재 우*
Dong-Gwan Lee Kil-Seok Cho Jin-Hwa Shin Ji-Eun Kim Jae-Woo Kwon

ABSTRACT

A recent air defense missile system is required to have a capability to intercept short-range super-high speed targets such as tactical ballistic missile(TBMs) by performing engagement control efficiently. Since flight time and distance of TBM are very short, the missile defense system should be ready to engage a TBM as soon as it takes an indication of the TBM launch. As a result, it has to predict TBM trajectory accurately with cueing information received from an early warning system, and designate search direction and volume for own radar to detect/track TBM as fast as it can, and also generate necessary engagement information. In addition, it is needed to engage TBM accurately via transmitting tracked TBM position and velocity data to the corresponding intercept missiles. In this paper, we proposed a method to estimate TBM trajectory based on the Kepler's law for the missile system to detect and track TBM using the cueing information received before the TBM arrives the apogee of the ballistic trajectory, and analyzed the bias of prediction error in terms of the transmission period of cueing data between the missile system and the early warning system.

Keywords : Tactical Ballistic Missile(전술탄도미사일), Target Designation(표적 지정), Kepler Law(케플러 법칙), Cueing Data(큐잉 정보), Engagement Control System(교전통제시스템)

1. 서 론

단거리 탄도미사일(TBM : Tactical Ballistic Missile)과 같은 초고속 표적은 미래의 전장 환경뿐만 아니라

현대전에서도 그 위협도가 날이 증가하고 있는 무기체계로, 이에 대한 방어무기체계 구축에 대한 연구의 필요성이 커지고 있다. 따라서 최근의 탄도탄 요격체계는 단거리 초고속 표적에 대하여 효과적인 교전통제를 수행하여 요격할 수 있는 정밀교전 능력이 필수적이다. 초고속 표적의 궤적은 발사 단계(Boost Phase), 탄도비행 단계(Ballistic Phase), 재진입 단계(Reentry Phase)와 같이 세 단계로 분류된다. 방어무기

† 2013년 3월 8일 접수~2013년 6월 21일 게재승인

* 국방과학연구소(ADD)

책임저자 : 이동관(leedg@add.re.kr)

체계는 Boost Phase에서 비행 중인 초고속 표적의 정보를 획득하는 것이 탄도미사일을 요격하고 방어하는 임무를 효과적으로 수행하는 데 매우 유리하다. 센서에 의해 획득된 초고속 표적 데이터를 교전통제에 활용하기 위해서는 먼저 초고속 표적에 대한 상태추정에 대한 연구가 선행되어야 하며, 최근에는 IMM (Interacting Multiple Model) 필터를 사용한 방법들이 제안되고 있다^{1)~3)}. 일반적으로 지구상에서 초고속 표적은 케플러 법칙에 의거하여 지구 중심에 초점을 둔 타원 궤도를 형성하며, 한 시점에서 초고속 표적의 위치와 속도 벡터를 정확히 알면 수식적으로 표적의 타원 궤도를 정확히 계산할 수 있다^{4)~6)}. 계산된 표적의 타원 궤도를 이용하여 초고속 표적이 날아갈 위치와 속도를 예측하면 요격체계가 표적의 예상 탐지영역을 산출하는 것이 가능하고, 발사지점과 낙하지점도 예측할 수 있다. 초고속 표적의 궤적을 예측하는 방법으로 표적의 가속도 모델을 적분함으로써 궤적을 구하는 것을 고려해 볼 수 있으나 실시간성이 부족하고, [7]에서는 운용자 중심의 간이 축약식을 제안하였으나 예상 탐지영역을 정밀하게 산출하는 데 활용하기에는 어려움이 따를 것으로 생각한다. 또한 초고속 표적의 궤적에 대한 대기의 영향이 미미한 Ballistic Phase 구간에서는 중력의 영향만 존재하므로 표적이 날아갈 위치를 선형적으로 예측하는 것도 고려할 수 있으나 표적이 타원 궤도의 정점을 지나기 전에는 적용하기가 쉽지 않다. 전술탄도탄과 같은 단거리 초고속 표적은 비행시간이 짧아 대응시간이 빨라야 하기 때문에 발사 직후가 포착되면 요격체계는 즉시 교전 준비를 수행하여야 한다. 또한 초고속 표적 방어를 위한 대응책으로서 가능한 한 빨리 포착해서 예상되는 경로를 만들어 내야 하는 시간이 매우 촉박하므로 사전에 충분한 데이터와 빠른 계산방식이 준비되어 있어야 한다. 따라서 요격체계는 초고속 표적의 발사 초기 단계에 조기경보체계로부터 수신되는 큐잉정보를 이용하여 초고속 표적이 날아갈 비행궤적을 정확하게 예측하고 신속한 탐지 및 추적을 수행하여 교전정보를 생성하여야 하며, 업링크를 통하여 요격유도탄으로 표적정보를 제공하여 정밀하게 표적을 요격해야 한다. 이에 본 논문에서는 초고속 표적에 대하여 요격체계가 전송 주기가 긴 상부 작전통제센터가 제공하는 초고속 표적에 대한 큐잉 정보를 이용하여 전송 주기간의 표적 위치, 속도를 정밀하게 예측함으로써 신속하게 요격 대상이 되는 초고속 표적을 조기에 탐지

및 추적할 수 있도록 표적의 궤적을 추정하고, 이를 기반으로 미래의 위치 및 속도를 예측하는 기법을 제안하고자 한다. 이를 위해 표적의 정점 이전부터 수신되는 큐잉정보를 통해 케플러 제1, 제2법칙에 근거하여 예상되는 표적의 궤적을 산출하는 기법을 제안하고, 표적의 궤적을 정밀하게 예측하기 위한 큐잉정보 주기에 대한 분석결과를 제시한다. 큐잉정보 주기 분석은 큐잉정보 수신 주기에 따른 초고속 표적의 예측 시간 간격 관점에서 수행한다. 제안하는 알고리즘이 단거리 초고속 표적에 적용될 때 발생하는 문제로 인하여 궤적 예측을 초고속 표적 궤적의 정점(Apogee)을 기준으로 두 가지 관점으로 나누어 고려하였다. 정점 이전에는 최대한 긴 미래 시간의 위치와 속도를 예측하고, 정점 이후에는 최대 전송 시간 주기만큼만 위치와 속도를 예측하는 방안을 고려하였다. 정점 이후부터 초고속 표적은 재진입 단계로 들어옴으로써 이때부터는 초고속 표적을 요격하기 위한 준비를 시작해야 하므로 가능한 한 실시간 표적 데이터를 이용해야 하기 때문이다. 초고속 표적을 이용한 공격의 효과를 극대화하고, 요격 정확도를 높이기 위해 탄도미사일 비행궤적에 대한 오차 해석⁸⁾은 초고속 표적의 설계나 탄착오차에 대한 분석 시에 중요한 정보를 제공한다. 이러한 관점에서 본 논문에서 사용된 초고속 표적의 궤적은 초고속 표적이 기준 궤적으로부터 이탈하는 것을 최소화 하도록 정확한 연소 종료 시점과 그 때의 위치, 속도 및 각도 오차, 그리고 중력장 편향에 의한 오차 등이 적절한 유도제어에 의해 최소화되어 생성된 것으로 가정하였다. 시뮬레이션을 통하여 상부체계로부터 수신되는 큐잉 정보의 주기가 큰 경우 또는 연속적으로 수신에 불가한 경우가 발생하는 것을 가정하여, 이러한 경우에 현재의 가용한 상부체계의 초고속 표적 큐잉 정보를 이용하여 미래에 예상되는 초고속 표적의 위치와 속도 예측 결과를 보고자 한다. 또한 큐잉 정보의 정확도의 영향을 살펴 보고자 한다.

2. 초고속 표적의 궤적 특성

탄도궤적(Ballistic Trajectory)은 자유낙하 경로의 의미를 내포하고 있으며, 비행을 함에 있어 자유낙하로 특징 지워지는 미사일을 탄도미사일이라고 부른다. 탄도미사일은 일반적으로 발사대로부터 추진되어 비행

초기에 동력단계를 가지며, 이 단계가 종료되는 시점에 전 비행을 완료하는데 필요한 최대 속도를 얻고, 그 속도를 이용하여 포물선 궤적으로 비행한다^{6,8,9)}. 초고속 표적은 3가지 비행단계로 구분되어 최대 속도를 얻는 부스트 단계와 중력에 의하여 탄도 궤적을 그리는 중기 비행 단계, 그리고 목표물을 타격하기 위하여 하강 비행하는 종말 비행 단계로 이루어진다. 부스트 단계에서는 목표지점에 도달하도록 탄도미사일이 원하는 경로를 따르면서 최적의 연소 종료조건을 갖도록 하기 위한 조종 명령집합인 피치프로그램 등을 통해 탄도미사일을 유도 제어 하며, 진공단계에서는 연소 종료점의 위치와 속도 벡터는 목표지점에 도달하기 위한 타원 궤도 상의 위치 및 속도와 일치하여야 한다. 이 때 타원 궤도는 지구를 균일한 완전한 구로 가정할 경우 케플러 운동 법칙을 만족한다^{6,8)}. 초고속 표적은 부스트 단계가 종료되는 시점의 고도와 속도에 따라 나머지 구간의 탄도 궤적이 정해지며, 이때의 고도 및 속도 오차가 최종 탄착지점의 오차로 전파되며, 종말단계에서 유도를 하여 궤적을 성형하지 않는 한 타원 궤도를 따라 비행한다. 연소 종료점에서의 초고속 표적의 정보(위치, 속도, 이탈 각도)는 전구간의 궤적을 결정하는데 사용되는 중요한 목표 값이 된다⁸⁾. 보정항법 및 종말유도를 적용하고 GPS 보정장치를 사용하여 CEP를 줄여 정확도를 향상시킨다 하더라도 이는 추력 중단 시점의 위치와 속도에 대한 오차를 보정하기 위한 것이다. 종말유도 시점은 공력 제어가 가능한 고도 30km 이하로 가정한다. 이러한 근거에 따라 초고속 표적의 궤적 예측 알고리즘을 유도하고자 한다. 전 비행구간에 대하여 유도를 수행하고 종말비행단계에서 종말제어를 통해 사거리를 연장하거나 혹은 목표 지점에 대한 입사각을 조절하기 위해 궤적 변경이 가능한 초고속 표적은 본 연구의 범위에서 제외하며, 그러한 유도탄은 추후 별도로 다루어야 할 것이다. 본 논문에서 다루고자 하는 초고속 표적의 궤적 예측의 목적은 요격체계가 상부체계로부터 수신한 초고속 표적에 대한 큐잉 정보를 기반으로 하여 재진입하는 초고속 표적을 원거리에서 탐지를 수행하기 위한 위치를 산출하는 것으로서 초고속 표적의 종말제어가 가능한 고도보다 높은 곳에서 탐지가 가능하다고 가정함으로써 초고속 표적의 종말제어에 의한 궤적 변경은 무시한다. 하층방어에서 표적의 요격고도에 해당하는 10~15km의 구간은 본 논문에서는 고려대상이 아니다.

3. 초고속 표적 궤적 예측

가. 타원궤도 방정식

지구상에서 탄도 비행궤적을 가지는 초고속 표적은 수식적으로 케플러 제1법칙 및 제2법칙을 따르는 타원 궤도로 유도할 수 있다^{4~6)}. 케플러 제2법칙은 뉴턴의 제2법칙으로부터 유도할 수 있으며, 역학적으로 각운동량의 보존법칙에 해당한다. 초고속 표적의 타원 궤도는 2체 문제(Two-Body Problem)로 접근하며, 다음 2가지 가정을 전제로 한다. 첫째는 각 Body는 완전구체(질량이 중심에 집중됨)이고, 둘째는 작용하는 힘은 오직 중력뿐이라는 것이다. 따라서 이 2체 문제는 초고속 표적의 비행단계 중 에너지가 지속적으로 축적되는 Boost Phase와 대기 마찰에 의해 에너지가 소실되는 Reentry Phase에는 적용하지 못하며, 오직 중력만 영향을 미치는 Ballistic Phase에만 적용한다. 지구와 초고속 표적에 대해 2체 문제를 적용하면 다음과 같은 수식 (1)을 얻을 수 있다. 여기서 r 은 지구중심에서 표적까지의 거리, G 는 만유인력 상수, M 은 지구 질량, m 은 표적의 질량이다.

$$\vec{r} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r} \quad (1)$$

$M \gg m$ 이면, $G(M+m) \simeq GM \equiv \mu$ 로 근사할 수 있으며, 이를 중력상수라 부른다. 식 (1)을 다시 쓰면 아래 (2)식과 같다.

$$\vec{r} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} = 0 \quad (2)$$

식 (2)에 \vec{r} 을 내적하여 유도하면, 에너지를 질량으로 나눈 양인 Specific Mechanical Energy(E)^[4]라 부르는 다음의 식 (3)을 얻을 수 있다.

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \left(C - \frac{\mu}{r}\right) = \frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff} \quad (3)$$

여기서, V_{eff} 를 유효 위치에너지라 부르며, C 는 적분상수로서 임의의 값을 가질 수 있다. 편의상 $C = 0$ 으로 설정하면, 이는 위치에너지가 0인 Zero Reference를 무한대의 거리에 위치시킨 것과 같고, 초고속 표적의 위치에너지는 항상 음수가 됨을 의미한다^[4]. 식 (2)

에 \vec{r} 을 외적하면, 각운동량 보존법칙을 적용하여 각운동량을 질량으로 나눈 양인 Specific Angular Momentum (\vec{h})^[4]이라 부르는 다음의 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (4)$$

여기서, \vec{v} 는 표적의 속도이다. \vec{h} 는 \vec{r} 과 \vec{v} 를 포함하는 평면에 항상 수직이며, \vec{h} 가 상수 벡터이므로 \vec{r} 과 \vec{v} 는 항상 동일 평면에 존재한다. 이것을 orbital plane이라 부르며, 공간상에서 고정된 평면이면서 초고속 표적의 궤적을 항상 포함한다. 다시 식 (2)에 \vec{h} 를 외적하고 유도하면, 다음과 같은 타원 궤도 방정식을 얻을 수 있으며, 이는 초고속 표적의 비행각도(ν)와 비행거리(r) 사이의 관계를 나타낸다.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} \quad (5)$$

여기서, p 는 Orbital Parameter, e 는 Eccentricity, ν 는 근지점(Perigee)부터 거리 \vec{r} 이 이루는 각도이며, Fig. 1에 나타나 있다^[4].

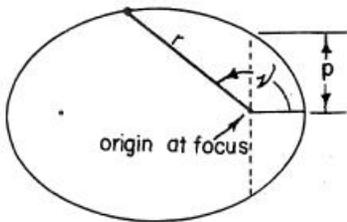


Fig. 1. Definition of Elliptical Trajectory & Parameters

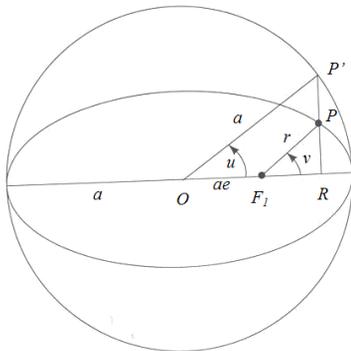


Fig. 2. Definition of Eccentric Anomaly & True Anomaly

초고속 표적의 비행거리(r)와 비행시간(TOF : Time of Flight, t) 사이의 관계는 Fig. 2에 나타나 있듯이 타원 궤도와 타원 궤도를 포함하고 반지름이 타원의 장축의 길이와 같은 원의 상관관계로부터 유도할 수 있다. 비행시간은 근지점부터의 시간을 의미한다.

Fig. 2에서 a 는 타원의 장축의 길이, u 는 이심근점이각(Eccentric Anomaly), ν 는 비행각도로서 진근점이각(True Anomaly), r 은 비행거리로서 초점(F_1)과 점 P 사이의 거리, R 은 P 를 타원의 장축에 투영시킨 지점이고, P' 은 선분 \overline{PR} 이 원과 만나는 지점이다. Fig. 2의 관계로부터 비행거리(r)와 이심근점이각(u) 사이의 관계와 이심근점이각(u)과 진근점이각(ν) 사이의 관계는 각각 식 (6)과 식 (7)로 유도된다.

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (6)$$

$$\cos u = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu} \quad (7)$$

식 (4)의 Specific Angular Momentum과 식 (6), 식 (7)을 이용하여 비행시간(t)과 이심근점이각(u) 사이의 관계를 유도하면 다음과 같다^[6].

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (u - e \sin u) = \frac{\tau}{2\pi} (u - e \sin u) \quad (8)$$

여기서, τ 는 타원궤도의 주기이다.

나. 초고속 표적의 궤적 예측

1) 좌표변환

초고속 표적의 정보가 생성되는 3D 좌표계(ECF)와 타원 궤도가 포함되는 2D의 Orbital Plane 사이의 좌표변환을 정의하면, ECF의 X축은 경도 0인 지점을 통과하고, Z축은 북극을 향하며, Y축은 오른손 좌표계를 만족하는 방향으로 향한다. ECF에서 Orbital Plane으로의 좌표변환을 위해 먼저 ECF의 Z축을 중심으로 회전시키고, 이 회전에 의해 생성된 좌표계의 X'축을 중심으로 회전시킨 후에, 마지막으로 회전된 좌표계의 Z''축의 속도성분이 0이 되도록 Y''축으로 회전시킨다. 최종 좌표변환 행렬 A 는 다음 식 (9)와 같다.

$$A = Rot_{Y''}(\theta_2) Rot_{X'}(\theta_1) Rot_Z(-\theta_3) \quad (9)$$

여기서, $\theta_3 = \sin^{-1}(X/\sqrt{(X^2+Y^2)})$, $\theta_1 = \sin^{-1}$

(Z/R_t) , $\theta_2 = \tan^{-1}(-V_Z/V_X)$ 이다. V_X 과 V_Z 은 각각 X축과 Z축 상의 속도이며, $R_t = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ 는 지구중심부터 표적까지의 거리를 나타낸다. 2D Orbital Plane의 Z축 속도는 0이다.

2) 타원궤도 방정식(Orbital Motion)

식 (5)~식 (8)에 사용되는 파라미터는 아래 식 (10)~식 (13)과 같이 계산된다. 여기서, V_{ti} 와 V_{tng} 는 각각 ECF 상의 표적 속도 크기와 표적 속도의 Tangential 성분을 나타낸다.

$$p = \frac{(R_t^2 V_{tng}^2)}{\mu} \quad (10)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{(V_{ti}^2 - 2\mu/R_t)p}{\mu}} \quad (11)$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (12)$$

$$\tau = 2\pi\mu(2\mu/R_t - V_{ti}^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (13)$$

식 (10)~식 (13)의 관계식을 이용하여 현재 표적의 위치와 속도를 정확히 알면 표적의 탄도 궤도를 정확히 계산함으로써 표적이 날아갈 위치와 속도를 예측할 수 있다. 위에서 $V_{ti} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}$, $V_{tng}^2 = V_{ti}^2 - V_R^2$ 이며, $V_R = (XV_X + YV_Y + ZV_Z)/R_t$, 그리고 V_X , V_Y , V_Z 는 ECF 상의 표적 속도이다.

3) 표적의 위치 및 속도 예측

표적 위치를 예측하려면, 먼저 현재 표적 정보를 생성한 시점까지의 비행시간과 비행각도가 필요하다. 이후 예측 시간동안의 표적의 비행각도와 비행거리를 계산하여, 이를 다시 3D 좌표계(ECF)로 변환하는 과정을 수행한다. 먼저 식 (6)을 이용하여 타원 궤도의 근지점으로부터 현재 표적의 위치까지 비행각도(이심근점이 각, Eccentric Anomaly, u_{cur})를 계산한다. 식 (5)에서 ν_{cur} 을 구하고, 식 (7)을 이용하여 u_{cur} 를 계산할 수 있다. u_{cur} 가 구해지면, 식 (8)을 이용하여 현재 표적의 비행시간(t_{cur})을 계산하고, 여기에 시간간격(ΔT_{pred})을 더하여 예측시간을 계산한다.

$$t_{pred} = t_{cur} + \Delta T_{pred} \quad (14)$$

t_{pred} 를 식 (8)에 대입하고, Newton-Raphson Method를 적용하여 t_{pred} 동안의 비행각도 u_{pred} 를 구하고, 이 u_{pred} 를 식 (7)을 이용하여 True Anomaly의 예측값인 ν_{pred} 를 구하여 식 (5)에 대입함으로써 t_{pred} 동안에 초고속 표적이 타원 궤도 상에서 움직인 위치(R_{TD})를 예측할 수 있다.

위와 같은 과정을 거쳐 타원 궤도 상에서 구해진 표적위치를 다시 지구 중심의 3D 좌표계(ECF)로 변환해야 한다. 이 변환에는 $\Delta\nu = \nu_{pred} - \nu_{cur}$ 만큼의 각도 변화량이 보상되어야 한다.

$$\bar{P}_{ECF} = A^T \begin{bmatrix} \sin(\Delta\nu) \\ \cos(\Delta\nu) \\ 0 \end{bmatrix} (R_{TD} + H_{TD}) \quad (15)$$

$$\bar{V}_{ECF} = A^T C_{2Dpred}^{2Dcur} \begin{bmatrix} \bar{V}_{gr} \\ \bar{V}_{hr} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{2Dpred}^{2Dcur} = \begin{pmatrix} \cos(\Delta\nu) & -\sin(\Delta\nu) & 0 \\ -\sin(\Delta\nu) & -\cos(\Delta\nu) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

여기서, \bar{V}_{gr} 와 \bar{V}_{hr} 은 각각 표적 속도의 수직 (Vertical)과 접선(Tangential) 방향의 성분이고, R_{TD} 는 예측된 표적위치 방향의 지구중심부터 지표까지 거리이고, H_{TD} 는 지표부터 표적까지의 해수면 고도로서 식 (16)과 같이 계산된다.

$$H_{TD} = R_{TD} - \frac{R_e}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{Z + V_Z \Delta T_{pred}}{R_{TD}} \right)^2}} \quad (16)$$

$$R_{TD} = \frac{R_e}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \sin^2(\lambda_{TD})}}$$

여기서, ϵ 은 지구곡률이고, λ_{TD} 는 표적 예측위치의 위도로 다음 식 (17)과 같이 계산되며,

$$\lambda_{TD} = -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\phi_{cur} + \Delta\nu) + \sin(\theta_1)\cos(\phi_{cur} + \Delta\nu) \quad (17)$$

ϕ_{cur} 은 타원궤도의 정점(Apogee)에서 현재 위치까지의 각도를 나타내며, $\cos\phi_{cur} = \cos(\nu_{cur} - \pi)$ 이다.

타원 궤도 상에서 예측된 속도는 다음과 같이 계산한다.

$$\bar{V}_{gr} = \frac{\sqrt{\mu p}}{R_{TD}}, \bar{V}_{hr} = \sqrt{V_{TD}^2 - \bar{V}_{gr}^2} \quad (18)$$

$$\bar{V}_{TD} = \sqrt{V_{ti}^2 + \frac{2\mu(R_t - R_{TD})}{R_t R_{TD}}}$$

\bar{V}_{TD} 는 예측된 표적의 위치에서의 속도로서 식 (3)을 이용한 에너지 보존의 법칙에 의거하여 계산된다.

4. 시뮬레이션 및 고찰

본 논문에서 제안하는 상부체계의 큐잉정보 기반 초고속 표적의 위치를 예측하기 위해서 다음과 같이 가정하였다.

- 상부체계
 - EWR(Early Warning Radar)로부터 항적정보 수신
 - 항적 전송주기에 최신의 EWR항적정보 전송
- 체계간 항적정보 전송 시간지연 없음
- 체계간 좌표계 정렬 오차 없음
 - 좌표변환에 따른 데이터 손실 없음
- 지구모델 : WGS-84 모델 사용
- EWR
 - 표적 갱신 주기 : 130msec
 - 측정오차(1σ) : 거리 30m,
각도 1.5mrad(방위각, 고각)

가. 초고속 표적 궤적

본 논문에서 제안한 초고속 표적의 위치를 예측하는 알고리즘을 확인하기 위해 사거리 500km급 전술탄도미사일에 대하여 시뮬레이션을 수행하였다. 초고속 표적 궤적을 모델링하기 위해 지구 자전과 타원형의 지구 모형이 고려되었다. 표적은 위도 40도에서 남쪽 방향으로 발사된 것으로 가정하였으며, 비행시간은 약 413초, 최대 고도는 약 150km, Burn-Out 시점은 약 68.1초이고, 이 때 속도는 약 2,000m/s이다. 표적제원 및 주요 비행특성은 다음의 Table 1과 같다.

Fig. 3은 ECF 좌표계에서 표적의 고도 및 속도 프로파일을 나타낸다.

Table 1. Target Specification & Flight Characteristics

표적 제원	페이로드중량	: 870kg
	추진제질량	: 4,330kg
	구조물 질량	: 890kg
	총중량	: 6,090kg
	탄도직경	: 0.6082m
비행 특성	추력	: 135,000N
	비추력	: 216.1154
	공력 계수	: 0.7
	연소종료	속도 : 2,006m/s
	정점	속도 : 1338m/s 고도 : 150,700m
비행 특성	최대속도	속도 : 2080m/s 고도 : 9,570m
	탄착	속도 : 1,879m/s 총비행시간 : 413.4초 사거리 : 500km
	피치프로그램	수직상승 : 시간 - 7초 각도 -0도
		피치선회 : 시간 -14초 각도 -25도
연소시간(s) : 68.1초		

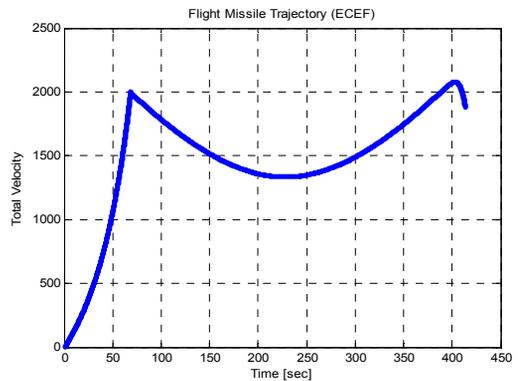
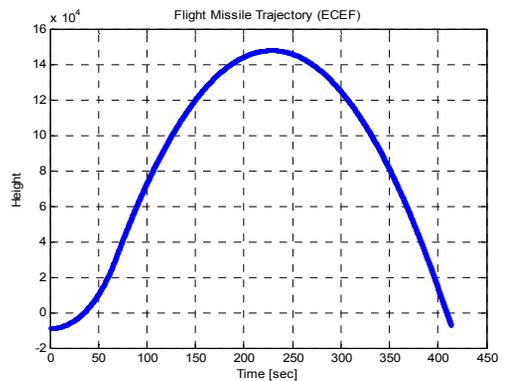


Fig. 3. Target Height & Velocity Profile

나. 정점 이전의 큐잉 정보를 이용한 궤적 예측

시뮬레이션을 위한 시나리오로서 초고속 표적을 방어하기 위한 요격체계는 상부의 조기경보체계와 연동되어 자체적으로 표적을 탐지하기 전에 상부체계로부터 원거리 표적에 대한 큐잉정보를 수신하며, 상부체계에서 표적은 Burn-Out 시점 이후인 비행시간 70초부터 탐지되고, 큐잉정보는 타원 궤도의 정점(Apogee) 이전부터 10초 간격으로 상부체계로부터 요격체계로 전송되는 것으로 가정하였다. 요격체계는 신속한 교전통제를 위해 ECF 좌표계 기준으로 수신된 큐잉정보의 위치, 속도를 이용하여 표적지정 위치를 계산하여 자체 레이더를 표적의 예상 진입방향으로 지향시켜 표적을 탐지/추적하여야 하며, 이를 위해 큐잉정보를 수신한 시점부터 60초 이후, 즉 정점 이후의 표적 위치를

예측하는 상황을 고려하였다. 단거리 초고속 표적을 방어하는 체계에서 60초 정도는 숙련을 통해 충분한 대응 준비가 가능한 시간으로 가정하였다. 자체 레이더는 위도 35.5도에 위치한다. 자체 레이더를 기준으로 230초 부근에서 표적이 정점에 도달하며, 속도는 약 1340m/s이다. EWR에 사용된 표적 추적필터는 LIMM^[2]를 적용하였으며, 측정오차는 1 σ 에서 거리는 30m, 각도는 1.5mrad이라 가정하였다. Fig. 4부터 Fig. 9까지는 몬테칼로 시뮬레이션 50회를 수행하여 자체 레이더 ENU(East/North/Up) 좌표계를 기준으로 시간에 대한 X, Y, Z축의 궤적 예측 결과를 위치 및 속도 추정과 그 오차를 비교한 것으로 정점에 근접하여 지나치게 할수록 실제 궤적으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 상위체계 큐잉정보는 정점까지의 데이터를 사용하였다.

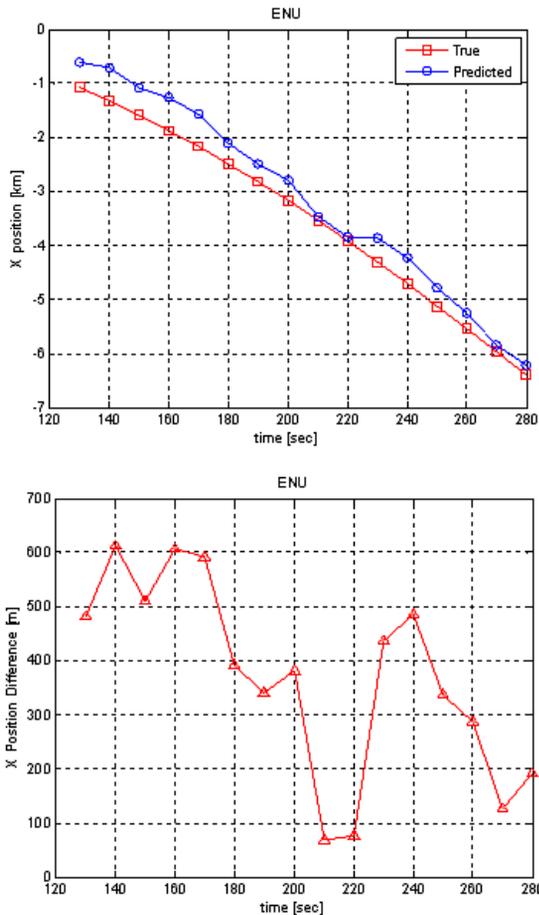


Fig. 4. Comparison of True and Predicted Position and their Difference vs time - X axis

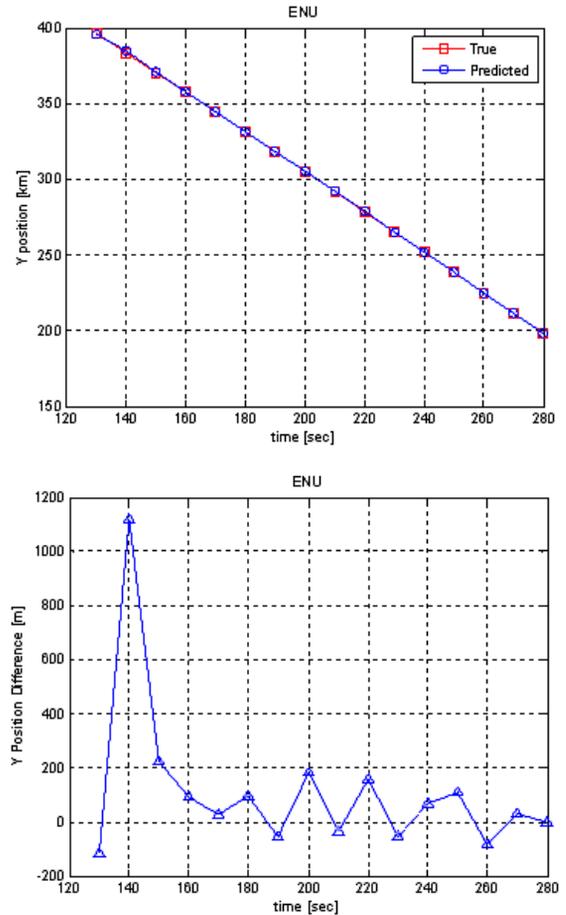


Fig. 5. Comparison of True and Predicted Position and their Difference vs time - Y axis

Fig. 4부터 Fig. 9까지의 추정결과를 보면, EWR이 초고속 표적을 처음 탐지하여 필터가 초기화 되고 수렴되는 구간 및 초고속 표적이 정점을 지나는 시점에서 속도 추정치가 약간 튀는 현상이 나타남을 볼 수 있다. 이것은 초고속 표적의 기동으로 해석할 수 있으며, 이러한 기동이 발생하면 필터가 다시 수렴하는 시간이 필요하다. 비록 초기 단계 및 정점에서의 속도 오차가 발생하지만, 하층방어용 요격체계 관점에서 상승단계에 있는 표적은 요격과는 무의미하며, 정점을 전후하여 지나온 표적에 대하여 의미가 있다. 이는 오직 초고속 표적의 진입 방향을 미리 예측하기 위한 수단이다. 그러나, 정점을 지난 이후의 큐잉정보를 사용하여 60초 이상의 예측을 수행하면 Fig. 10과 같은 비정상적으로 궤적을 예측하는 현상이 발생한다. 이러한 원인을 분석하기 위하여 정점의 위치추정

결과를 통해 ECF상의 표적 위치, 속도 정보를 이용하여 초고속 표적의 궤적을 추정한 결과를 살펴보고자 한다. Fig. 11은 상부체계로부터 초고속 표적에 대한 큐잉정보를 수신한 때 순간 추정된 타원궤적의 근지점(Perigee)으로부터 현재 위치까지의 비행각도이다. 정상인 경우 Perigee로부터 Apogee까지의 비행각도는 180°로서 초고속 표적의 비행각도는 180°를 기준으로 작은 값에서 시작하여 Apogee를 지나면서 180°보다 커져야 한다. 그러나 Fig. 11에서는 현재 초고속 표적의 비행 각도가 항상 Apogee 도달 전으로 예측되는 것을 볼 수 있다. 이는 Kepler Motion에 의해 추정된 2D 평면의 타원 궤적의 거리가 항상 Apogee에 가깝게 추정된 것으로서 지구반경에 비해 초고속 표적의 고도가 상대적으로 매우 작기 때문인 것으로 판단된다.

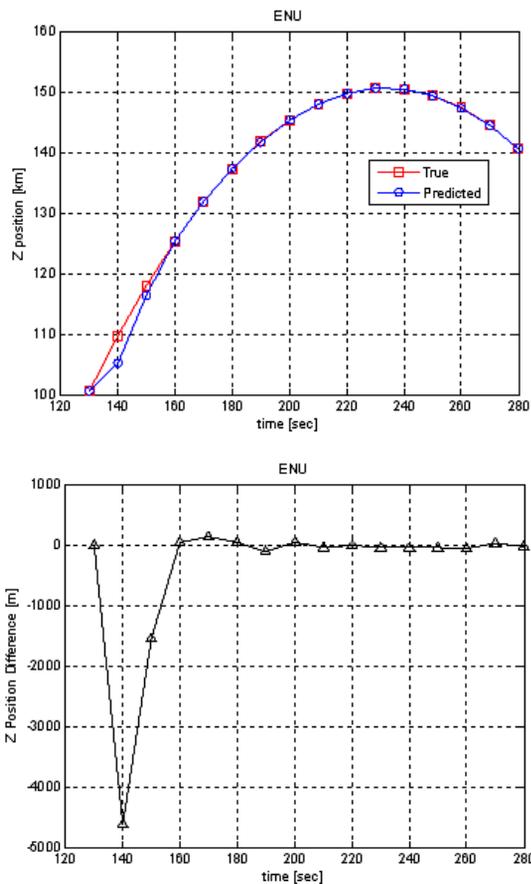


Fig. 6. Comparison of True and Predicted Position and their Difference vs time - Z axis

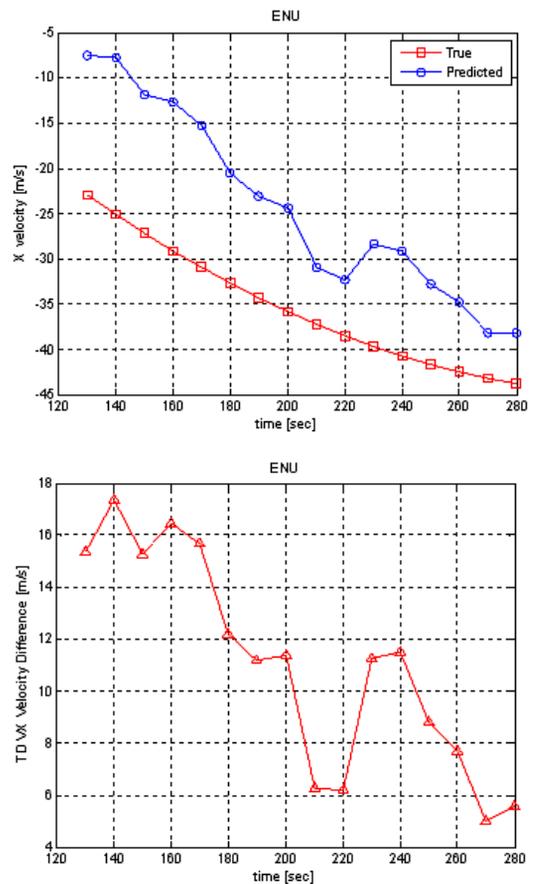


Fig. 7. Comparison of True and Predicted Velocity and their Difference vs time - X axis

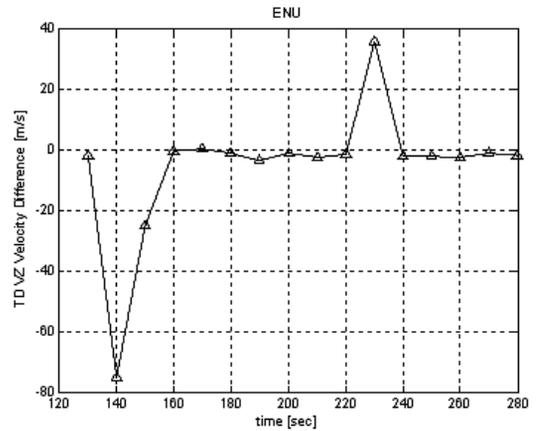
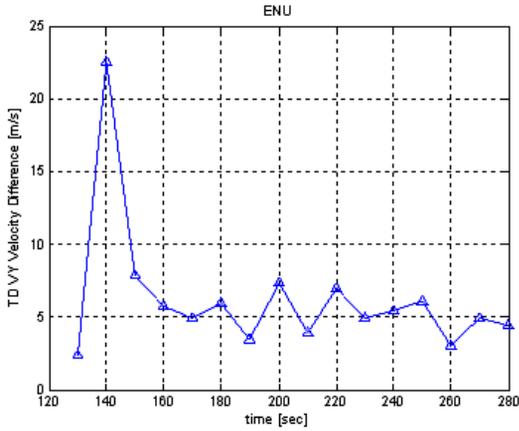
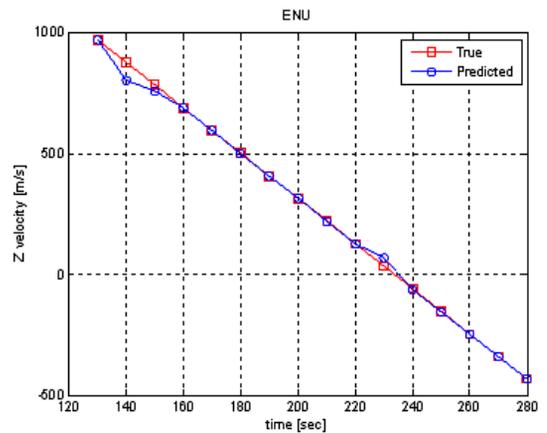
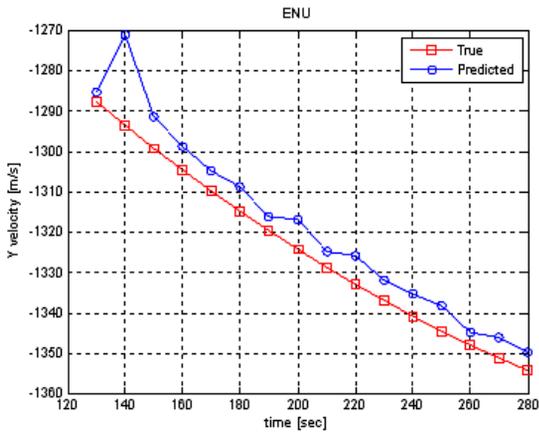


Fig. 8. Comparison of True and Predicted Velocity and their Difference vs time - Y axis

Fig. 9. Comparison of True and Predicted Velocity and their Difference vs time - Z axis

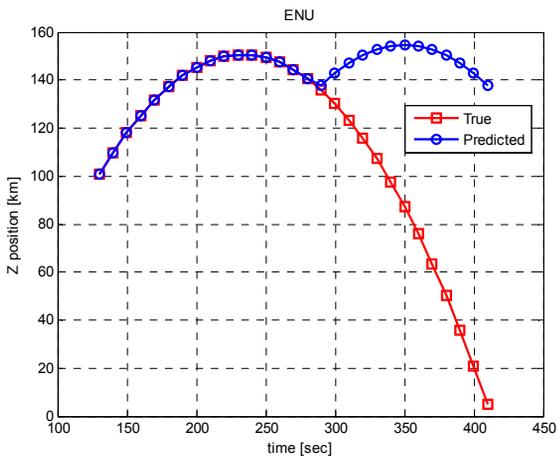


Fig. 10. Irregular trajectory prediction using cued data after apogee

다. 정점 이후의 큐잉 정보를 이용한 궤적 예측 및 주기분석

초고속 표적이 정점 지나 재진입 단계로 들어선 후에는 초고속 표적의 속도에 비해 상대적으로 60초 이상의 긴 미래위치 예측은 Fig. 10과 같이 부정확한 예측이 수행될 수 있으며, 또한 이는 하층방어 요격체계 관점에서는 불필요하며, 요격 관점에서 최대한 실시간의 빠른 주기의 큐잉정보를 상위체계로부터 수신해야 한다. 상위체계와 요격체계간의 데이터 전송 주기가 최대 10초 내에서 가변이 가능하다는 가정 하에 초고속 표적의 큐잉정보를 이용하여 자체 레이더의 표적 지정에 사용가능한 지 여부를 예측 시간의 간격에 따른 예측 성능의 변화로 살펴보고자 한다. Apogee 이후의 표적 예측 정확도에 대한 큐잉정보 주기의 영향을 분석하기 위해 표적이 타원궤도의 Apogee를 지난 시

점부터 1초, 5초, 10초 주기로 큐잉정보가 전송되고, 이를 이용하여 수신된 직후와 다음 전송 주기 직전 그리고 전송 주기의 중간 시간 지점까지 예측을 수행하여 레이더를 기준으로 약 75km지점에서의 표적지정 결과를 비교하였다. 각각의 전송주기에 대해 경우를 Case 1/2/3(0.1/0.5/0.9초, 0.1/2.5/4.9초, 0.1/5.0초/9.9초)로 구분하여 분석하였다. 위치 및 속도 예측 결과에 대한 성능인자로 몬테칼로 시뮬레이션 50회 수행 후에 위치와 속도 예측 오차에 대한 평균(Bias)을 Table 2에서 Table 4까지 나타내었다. 수신된 직후 예측과정 없이 바로 사용한 경우에는 위치 및 속도 오차가 거의 없으나 예측시간이 길어질수록 오차정도가 커지는 것을 확인할 수 있다. Table 2~Table 4에서는 큐잉정보 주기가 길고, 예측하는 시간이 길어질수록 오차가 커지는 경향이 잘 나타나 있다. Z축의 경우 위치 오차가 상대적으로 크게 발생하는데, 이는 앞의 Fig. 11의 결과와 유사한 것으로 판단된다. Apogee 이후 궤적을 예측하기 위해 식 (17)의 H_{TD} 를 계산할 때 R_{TD} 대신에 ECF 좌표계에서 예측된 거리를 사용하는 것이 실험적으로 정밀도를 향상시킬 수 있음을 확인하였다.

Table 2. Target Designation Error at 75km from Radar (Target Transfer Rate : 10sec)

	X축 위치 오차	Y축 위치 오차	Z축 위치 오차	X축 속도 오차	Y축 속도 오차	Z축 속도 오차
case 1 (0.1초)	-3.822 m	-0.726 m	-597.9 m	-2.063 m/s	3.202 m/s	1.526 m/s
case 2 (5.0초)	-12.7 m	16.23 m	-477.4 m	-2.133 m/s	6.634 m/s	92.82 m/s
case 3 (9.9초)	-26.54 m	35.68 m	-114.8 m	-2.8 m/s	7.906 m/s	180.6 m/s

Table 3. Target Designation Error at 75km from Radar (Target Transfer Rate : 5sec)

	X축 위치 오차	Y축 위치 오차	Z축 위치 오차	X축 속도 오차	Y축 속도 오차	Z축 속도 오차
case 1 (0.1초)	3.704 m	5.16 m	-596.6 m	0.6088 m/s	5.101 m/s	3.1 m/s
case 2 (2.5초)	6.319 m	9.464 m	-558 m	0.7182 m/s	5.918 m/s	48.65 m/s
case 3 (4.9초)	-1.1 m	23.07 m	-448.5 m	-0.4118 m/s	7.945 m/s	92.99 m/s

Table 4. Target Designation Error at 75km from Radar (Target Transfer Rate : 1sec)

	X축 위치 오차	Y축 위치 오차	Z축 위치 오차	X축 속도 오차	Y축 속도 오차	Z축 속도 오차
case 1 (0.1초)	-1.152 m	-5.706 m	-592.0 m	-0.278 m/s	1.896 m/s	3.181 m/s
case 2 (0.5초)	-1.269 m	-6.097 m	-590.1 m	-0.297 m/s	2.16 m/s	10.63 m/s
case 3 (0.9초)	-1.812 m	-11.42 m	-584.9 m	-0.487 m/s	0.9414 m/s	18.44 m/s

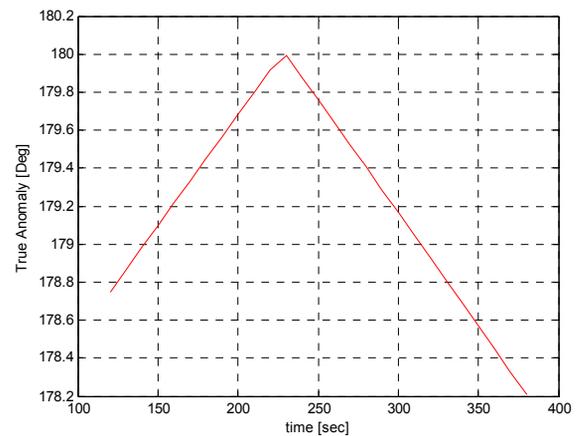
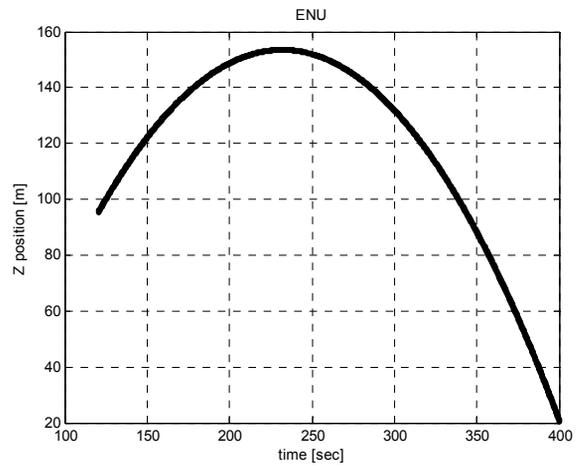


Fig. 11. Target Height and Estimated True Anomaly

Fig. 12~Fig. 15는 궤적 예측 시간 간격의 속도 예측에 대한 영향을 나타내고 있다. 이 때 초고속 표적의 정보는 실제 궤적 값을 사용하였다. 예측 시간 간

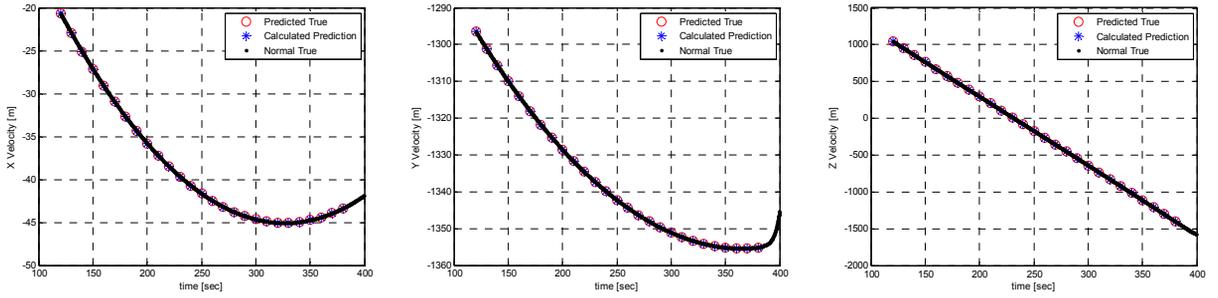


Fig. 12. Results of velocity prediction when prediction interval is 0sec

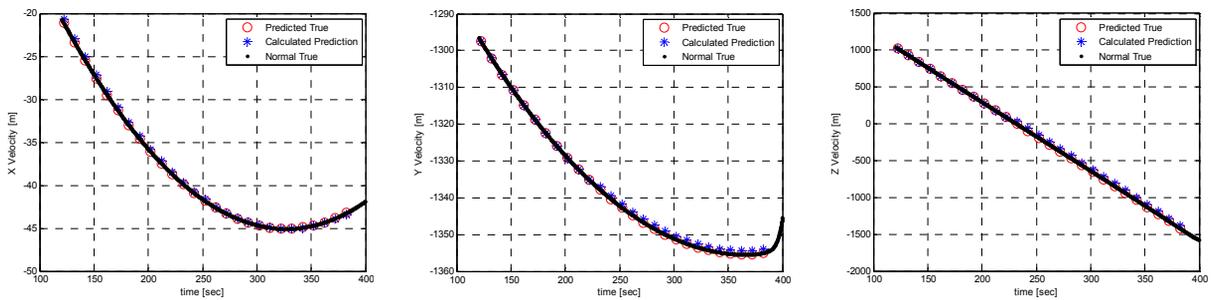


Fig. 13. Results of velocity prediction when prediction interval is 2sec

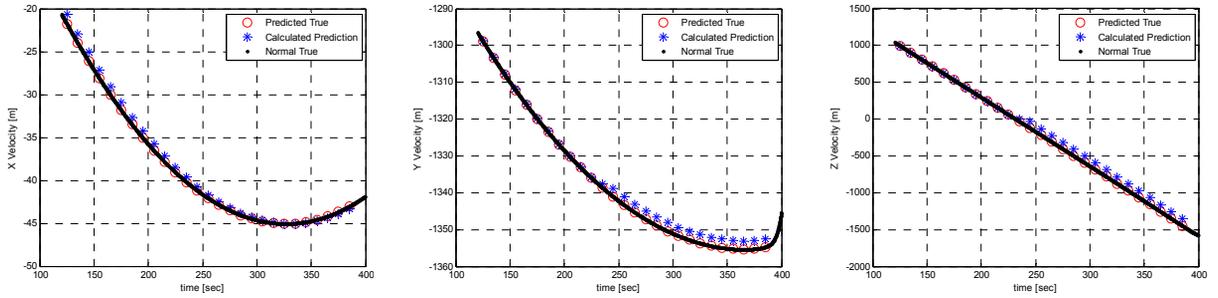


Fig. 14. Results of velocity prediction when prediction interval is 5sec

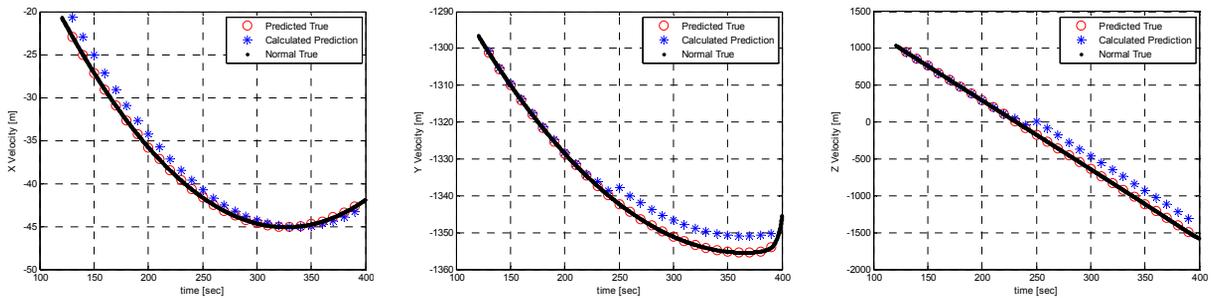


Fig. 15. Results of velocity prediction when prediction interval is 9.9sec

격은 0초, 2초, 5초, 9.9초로 설정하였다. 예측 시간이 길어질수록 속도 예측 값이 실제 값과 벌어지는 것을 확인할 수 있다. 특히 Y, Z축의 경우 정점 이후부터 속도 추정 값에 Bias가 발생되는 것으로 보인다. 이 오차들을 거리와 각도, 거리방향 속도로 환산하였을 때, 거리 600m 이하, 거리방향 속도 180m/s 이하, 각도는 1도 이하가 됨을 확인하였다. 거리오차의 경우 거리가 가까워질수록 증가하는 경향이 나타나는데 Fig. 16~ Fig. 18과 같이 2D 평면상의 Kepler Motion의 오차 요인들을 고려해 보면 충분히 가능한 현상으로 판단되며, 또한 비행각도의 오차 요인이 속도 추정치에도 영향을 주는 것으로 판단된다. Δr , Δu , $\Delta \nu$ (Appendix 참조)의 변화 양상을 보면 Apogee에 근접할수록 절대 값이 작아지고, Apogee에서 멀어질수록 절대 값이 커지는 것을 볼 수 있다.

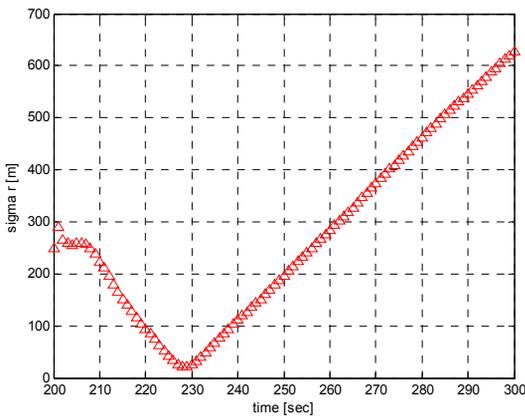


Fig. 16. Variation of Range(r)

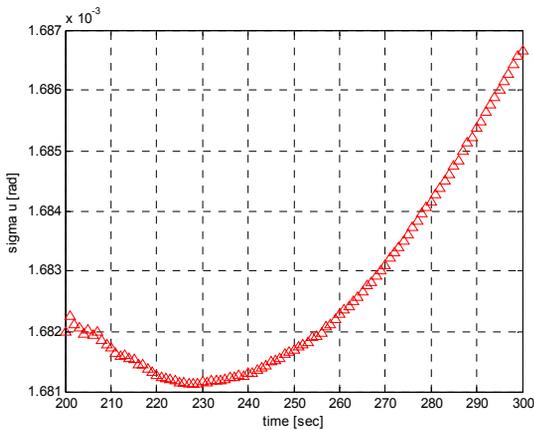


Fig. 17. Variation of Eccentric Anomaly(u)

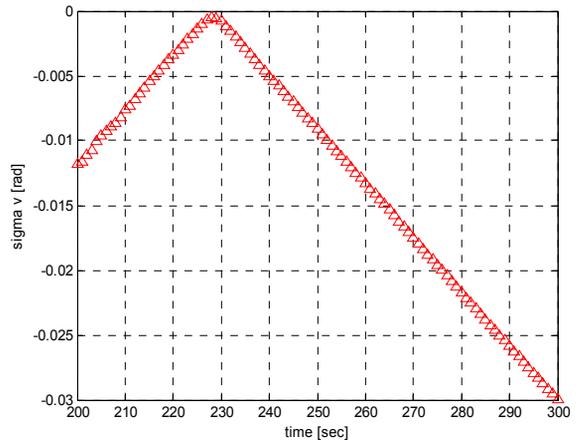


Fig. 18. Variation of True Anomaly(ν)

라. 정점 이후 큐잉 정보 정확도에 따른 궤적 예측 및 분석

본 절에서는 상부체계의 큐잉 정보 정확도에 따른 궤적 예측 성능을 분석해 보고자 한다. 큐잉 정보의 정확도는 상부체계 EWR의 표적 추적 성능에 좌우되는 것으로서 이는 EWR의 표적 추적 갱신 주기와 측정잡음의 표준편차 및 사용되는 추적 필터의 종류에 매우 의존적이다. 따라서 본 논문에서는 큐잉 정보의 정확도에 따른 궤적 예측 성능을 분석하기 위해 측정잡음 없이 실제 값을 사용한 경우와 측정잡음이 고려된 경우를 비교하였다. 단, 측정 잡음을 고려한 경우는 필터링 된 표적의 상태변수 값을 사용하지 않고 실제 값에 측정 잡음만 추가하였으며, 이는 잡음이 섞인 큐잉 정보를 이용한 궤적 예측의 추세를 보고자 함이다. 표적 추적 갱신 주기는 130msec로 앞의 시뮬레이션 상황과 동일하게 유지하였으며, EWR을 중심으로 하는 구좌표계의 측정잡음을 직교좌표계로 변환하여 각 축별 실제 값에 잡음을 더하였고, 각 축별 위치와 속도 잡음은 1-Sigma를 계산하여 가우시안 분포를 적용하였다. 측정잡음에 대한 오차공분산의 변환식은 아래 식 (19)와 같으며, 추적 갱신 주기가 매우 짧기 때문에 속도 잡음이 크게 계산되므로 속도 추정오차가 속도 초기값의 20% 이내로 수렴한다고 가정하여, 계산된 속도의 1-Sigma 값의 20%에 해당하는 값을 속도 잡음으로 사용하였다.

$$COV = \begin{bmatrix} R_{Cart_k} & R_{Cart_k}/\Delta T \\ R_{Cart_k}/\Delta T & (R_{Cart_{k-1}} + R_{Cart_k})/\Delta T^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서, R_{Cart_k} 는 현재 시간의 오차공분산, $R_{Cart_{k-1}}$ 은 이전 시간의 오차공분산으로서 3×3 행렬이고, $R_{Cart_k} = JR_{spherical_k}J^T$ 로 계산할 수 있으며, J 는 Jacobian으로서 J 를 계산하기 위한 거리(R), 방위각(Az), 고각(El)과 x, y, z축 사이의 관계는 식 (20)과 같다.

$$R_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \quad (20)$$

$$Az_k = \tan^{-1}(x_k/y_k)$$

$$El_k = \tan^{-1}(z_k/\sqrt{x_k^2 + y_k^2})$$

$$R_{spherical_k} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Az}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{El}^2 \end{bmatrix}$$

Table 5는 큐잉 정보 전송주기 10초이고, 9.9초 동안 예측하는 case3에 측정잡음을 증가시켰을 경우에 대한 50회의 몬테카를로 시뮬레이션 결과로서 거리 약 75km에서 각 축별 위치 및 속도 오차에 대한 평균(Bias)을 나타낸 것이다. 측정 잡음이 없는 경우에도 Z축의 예측오차에 약간의 Bias가 있는 것을 볼 수 있으나, 이는 Fig. 11의 결과로 판단된다. 거리 잡음과 각도 잡음의 단위는 각각 m(미터)와 mrad이다. Table 5는 큐잉 정보에 추가되는 잡음의 크기가 커질수록 이에 기반한 초고속 표적의 위치 및 속도 예측오차가 커지는 경향을 잘 보이고 있다. 전술탄도탄의 상태변수 추정 성능이 우수한 추적 필터를 사용한다면 레이더 측정잡음의 영향을 효과적으로 줄일 수 있을 것이다.

Table 5. Target Designation Error at 75km from Radar (Target Transfer Rate : 10sec)

	X축 위치 오차	Y축 위치 오차	Z축 위치 오차	X축 속도 오차	Y축 속도 오차	Z축 속도 오차
$\sigma_R = 0$ $\sigma_{Az} = 0$ $\sigma_{El} = 0$	-0.002 m	0.464 m	-2.623 m	-0.011 m/s	0.139 m/s	3.694 m/s
$\sigma_R = 50$ $\sigma_{Az} = 2$ $\sigma_{El} = 2$	64.14 m	10.97 m	-89.68 m	6.722 m/s	1.287 m/s	-3.969 m/s
$\sigma_R = 100$ $\sigma_{Az} = 4$ $\sigma_{El} = 4$	-161.0 m	-54.56 m	159.2 m	-16.43 m/s	-5.666 m/s	20.31 m/s

5. 결론

전술탄도탄과 같은 단거리 초고속 표적에 대하여 요격체계가 신속하게 교전통제를 수행하기 위해 상부체계로부터 표적의 정점 이전부터 수신되는 큐잉정보를 가지고 케플러 법칙에 근거하여 표적의 예상 궤적을 산출하는 기법에 대한 연구를 수행하였다. 초고속 표적 궤적의 Apogee를 중심으로 두 가지 관점에서 궤적예측을 수행하는 기법을 제안하였다. 궤적에 미치는 대기의 영향이 미미한 Ballistic Phase 구간에서는 본문에서 제안한 기법으로 초고속 표적의 궤적을 예측하는데 효용성이 있음을 보였고, 또한 큐잉주기가 짧을수록 표적궤적의 예측이 정확해 질 수 있음을 확인하였으며, 큐잉 정보의 정확도가 높을수록 궤적 예측 성능이 향상될 수 있음으로 보였다. 또한 고도 40km 이상의 고공에서는 공기밀도가 낮아 초고속 표적의 비행궤적에 거의 영향을 주지 않기 때문에 진공상태에서의 순수 궤도 비행으로 간주하여 운동방정식을 풀어도 궤적에 큰 오차가 없는 것으로 판단되고 레이더의 탐지 능력이 뒷받침되어 준다면, 이론적으로는 상부체계 큐잉 정보에 의한 자체탐지가 충분하다고 판단된다.

추후 연구내용으로서는 초고속 표적에 대한 방어 차원에서 초고속 표적이 Boost Phase인지 또는 Apogee를 통과 했는지의 여부에 따라 고려해야 할 사항들이 다른 것으로 보이며, 이러한 비행단계들에 대한 각각의 심층적인 연구가 필요할 것으로 보인다. 또한 초고속 표적의 궤적 예측과정에서 타원 궤도 방정식을 적용하는데 있어 추가적인 오차분석이 필요하며, 다양한 사거리의 표적에 대해 가속도 모델의 적분을 통한 궤적을 산출하는 방법과 비교하여 정밀도와 실시간성을 분석하는 것이 요구된다. 추가하여 큐잉정보의 공분산을 이용한 표적지정의 정확도 분석과 요격체계 배치에 대한 연구도 수행되어야 할 것이다.

References

- [1] William J. Farrell, III, "Interacting Multiple Model for Tactical Ballistic Missile Tracking", IEEE Transactions on AES, Vol. 44, No. 2, pp. 418~426, 2008. 4.
- [2] 이동관, 송택렬, "Glint가 존재하는 상황에서 LIMM

을 이용한 Re-entry 궤적의 추적”, 제12차 유도무기 학술대회, pp. 180~183, 2003.

- [3] Robert L. Cooperman, “Tactical Ballistic Missile Tracking using the Interacting Multiple Model Algorithm”, Proceedings of the Fifth International Conference on Information Fusion, Vol. 2, pp. 824~831, 2002.
- [4] Roger R. Bate et al, Fundamental of Astrodynamics, Dover Publications, Inc., 1971.
- [5] Francis J. Hale, Introduction to Space Flight, Prentice Hall, 1994.
- [6] 이운형, “탄도 비행궤적의 특성 고찰”, 국방기술연구, 제4권, 제4호, pp. 62~77, 1998. 10.
- [7] 권용수, 김정희, 이경행, “성공적 하층 미사일방어 수행을 위한 시스템 요구능력 도출”, 한국국방경영분석학회지, 제37권, 제2호, pp. 11~24, 2011. 6.
- [8] 권용수, 석근봉, “탄도미사일의 비행궤적 오차해석”, 제10차 유도무기학술대회, pp. 23~27, 2000.
- [9] 고덕근, “단거리 탄도탄 기술 동향”, 국방과학기술플러스, Vol. 18, 2006. 9.

Appendix

시간 경과에 따른 궤적 예측의 오류 전파 경향을 살펴보기 위하여 식 (6)과 식 (7)로부터 각각 초고속 표적의 비행거리(r)과 비행각도(ν , 진근점이각)에 대한 1차 미분을 통하여 근사적으로 살펴보고자 한다. 식 (6)의 1차 미분으로부터 근사적으로 다음과 같이 초당 비행거리(r)에 대한 오차 변화를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{d}{dt}r = a(-\dot{e} \cos u + \dot{e} \sin u) \\ &\approx \sigma_r = a(-\sigma_e \cos u + \sigma_u e \sin u) \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

마찬가지 방식으로 비행각도(ν)에 대한 근사적인 오차는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저 식 (7)로부터 ν 를 구하면, $\cos \nu = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$ 이고 이를 1차 미분하여 근사적으로 초당 비행각도(ν)에 대한 오차변화를 구할 수 있다.

$$-\sin \nu \dot{\nu} = -\sin \nu \frac{d}{dt}r$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\dot{u}(e^2 - 1 - e \cos u) \sin u + \dot{e}(e \cos u - 1) + e \sin u \cos u}{(1 - e \cos u)^2} \\ &\approx \sigma_\nu \propto \frac{\sigma_u(e^2 - 1 - e \cos u) \sin u + \sigma_e(e \cos u - 1) + e \sin u \cos u}{(1 - e \cos u)^2} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

여기서, ν 는 Apogee에 가깝게 추정됨으로써 $\sin \nu$ 값이 매우 작은 상수이기 때문에 오차변화의 경향을 살펴보기 위하여 비례식으로 대체하였다. 이심근점이 각(u)의 초당 변화량은 식 (8)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_u = \frac{\frac{2\pi}{\tau} + \sigma_e \sin u}{1 - e \cos u} \quad (\text{A-3})$$

위에서 σ_e 는 근사적으로 식 (11)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\sigma_e = \frac{\frac{1}{\mu} \left\{ \left(2V_{ti} \sigma_{V_{ti}} + \frac{2\mu}{R_t^2} \sigma_{R_t} \right) p + \left(V_{ti}^2 - \frac{2\mu}{R_t} \right) \sigma_p \right\}}{2 \sqrt{1 + \frac{\left(V_{ti}^2 - \frac{2\mu}{R_t} \right) p}{\mu}}} \quad (\text{A-4})$$

위 식에서 σ_p 는 식 (10)으로부터

$$\sigma_p = \frac{2}{\mu} (R_t \sigma_{R_t} + V_{tn} \sigma_{V_{tn}}) \quad (\text{A-5})$$

σ_{R_t} 와 $\sigma_{V_{R_t}}$ 은 $R_t = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ 과 \dot{R}_t 로부터 각각

$$\begin{aligned} \sigma_{R_t} &= \frac{X\sigma_X + Y\sigma_Y + Z\sigma_Z}{R_t} \\ \sigma_{V_{R_t}} &= \frac{(\sigma_X^2 + X\sigma_{V_X} + \sigma_Y^2 + Y\sigma_{V_Y} + \sigma_Z^2 + Z\sigma_{V_Z})R_t - (X\sigma_X + Y\sigma_Y + Z\sigma_Z)\sigma_{R_t}}{R_t^2} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

이고, $\sigma_{V_{ti}}$ 와 $\sigma_{V_{tn}}$ 은 각각 아래와 같이 근사화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{V_{ti}} &= \frac{V_X \sigma_{V_X} + V_X \sigma_{V_X} + V_X \sigma_{V_X}}{V_{ti}} \\ \sigma_{V_{tn}} &= \frac{V_{ti} \sigma_{V_{ti}} + V_{R_t} \sigma_{V_{R_t}}}{V_{tn}} \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$