韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 27집 제 3호, 2013. 9. 267-281

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 27, No. 3, Sep. 2013. 267-281

함수의 도입을 위한 사다리타기 게임의 수학적 분석

이 광 연 (한서대학교)
이 광 상 (한국교육과정평가원)†
유 기 종 (안법고등학교)

본 연구는 사다리타기 게임을 중학교 수학에서 함수의 도입과 고등학교에서의 합성함수의 도입을 위한 소재로서의 가능성을 탐색하고 있다. 사다리타기 게임에 사용되는 사다리그림은 일대일대응이 되므로 집합을 도입하지 않고도 직관적으로 쉽게 함수의 개념을 도입할 수 있다. 또한 하나의 가로선을 갖는 사다리그림은 일대일대응이므로 r개의 가로선을 갖는 사다리그림은 r개의 일대일대응의 합성함수를 결정함을 알 수 있다. 본 연구에서는 일대일대응에 대한 기본적인 몇 가지 사실에 대하여 사다리그림을 이용하여 수학적으로 증명하였고, 중학교에서의 함수와 고등학교에서 합성함수를 사다리타기 게임으로 도입할 수 있음을 제시하였다. 일대일대응에 대한 사다리그림은 학생들의 흥미와 집중을 유도할 수 있을 뿐만 아니라 함수의 개념을 직관적으로 쉽게 이해하게 하는 좋은 소재로 활용할 수 있다.

Ⅰ. 서 론

교육과학기술부(2012)에서는 2012년 1월에 현재의 입시 대비 변별력 확보를 위해 수학교육을 미래 대비 사고력과 창의력을 키우는 수학교육으로 개선하고, 수학에 흥미와 긍정적 인식을 높이기 위하여 「수학교육 선진화 방안」을 발표하였다. 교육과학기술부에서는 이 방안의 수립 배경을 다음과 같이 크게 세 가지로 제시하였다. 첫째, 수업 및 평가가 수학 지식의 암기 및 문제풀이 위주로 이루어져 창의적 인재를 육성하는데 한계가 있다. 둘째, 다양하고 실질적인 수학교육에 대한 관심과 투자가 부족하다. 셋째, 학업 성취도는 높지만, 수학 공부를 왜 해야 하는지에 대한 학습 동기는 낮은 수준이다.

이에 교육과학기술부는 학교 수학교육을 수학 교육과정에 부합하는 방향으로 내실화하고, 수학에 대한 인식 개선 및 자기주도 학습 동기 부여가 필요하다는 인식하에 2009 교육과정 개정에 발맞추어 교실, 교과서 및 수업 · 평가 등 수학교육을 개선하기 위한 대책을 제시하였다. 이 대책의 기본방향은 크게 세 가지로 '생각하는 힘을 키우는 수학', '쉽게 이해하고 재미있게 배우는 수학', '더불어 함께하는 수학'의 구현이다. 세 가지 가운데 '쉽게 이해하고 재미있게 배우는 수학'에는 실생활 연계, 스토리텔링(Story-telling), 수준별 맞춤형 등 다양한 교수학습방법을 통해 수학에 대한 관심과 흥미, 긍정적 인식을 높임으로써 자발적인 학습을 촉진하기 위한 계획이 포함되어 있다. 이 계획을 성공으로 이끌기 위해서는 쉽고 재미있게 배우는 수학 교과서의 제작이 필요하다. 교육과학기술부에서는 이러한 교과서를 제작하기 위하여 "요약된 설명과 공식, 문제 위주로 구성되어 있는 기존

* 접수일(2013년 4월 12일), 심사(수정)일(1차: 2013년 6월 4일, 2차: 2013년 8월 14일), 게재확정일(2013년 9월 3일)
* ZDM 분류 : D43, D44, U63, U64
* MSC 분류2000분류 : 05A05, 97C80
* 주제어 : 스토리텔링, 사다리그림, 함수, 일대일대응, 합성함수, 치환
† 교신저자 : leeks@kice.re.kr

교과서에 수학적 의미, 역사적 맥락 및 실생활 사례 등을 Story-telling 방식을 통해 유기적으로 연계하여 수학에 대한 이해와 흥미를 높인다(p.7).”고 하고 있다.

스토리텔링에 대한 연구는 초등학교(권혁일, 2008과 오영범, 박상섭, 2010), 고등학교(백조현, 박수홍, 강문숙, 2010), 대학교(곽경숙, 2011)의 연구결과를 참고할 수 있다. 아울러 박교식(2012)은 교육과학기술부에서 발표한 「수학교육 선진화 방안」에서 예로든 지수용육도와 지수귀문도가 스토리텔링 방식 적용의 소재로 적합한지 연구하였다.

박교식(2012)은 수학교육 분야에 스토리텔링 방식을 도입하는 것은 새롭다고 할 수 있지만 교육과학기술부의 이와 같은 선언적 발표만으로는 스토리텔링의 의미가 확연히 드러나지 않는다고 하였다. 이는 수학교육 분야에서 스토리텔링과 관련된 선행연구가 많지 않기 때문이다. 스토리텔링에 대한 이해의 부족에도 불구하고 권기석(2012)은 스토리텔링을 도입하면 수학이 재미있어진다고 주장하고 있다. 전반적인 학교수업에 스토리텔링을 도입하는 것에 대한 논문은 몇 편 있으나 수학교육만을 전문적으로 다룬 스토리텔링에 관련된 논문은 많지 않은 편이다. 이에 대해서는 박교식(2012)도 같은 주장을 하고 있다. 따라서 교육과학기술부에서 발표한 「수학교육 선진화 방안」이 성공적으로 이루어지기 위해서 뿐만 아니라 수학교육의 발전을 위해서도 스토리텔링을 주제로 한 수학교육과 스토리텔링 수업에 사용될 제재(題材)에 대한 연구의 필요성이 제기되고 있다.

교육과학기술부에서는 스토리텔링의 구조로 수학사 탐구형, 실생활 연계형, 혼합형의 세 가지를 제시하면서, 그 각각의 내용을 간략히 예시하고 있다. 한편, 권오남(2012)은 수학 교사의 스토리텔링 교과서에 대한 이해를 연구하며 교육과학기술부가 제시하였던 세 가지 구조를 확장·수정하여 수학사 탐구형, 실생활 연계형, 학문 융합형, 의사 결정형, 도구 활용형의 다섯 가지를 제시하였다. 아울러 그가 제시한 다섯 가지 유형은 소재를 기반으로 구분한 것이므로 스토리텔링 구성 방식에 대한 연구가 더 필요할 것으로 판단된다.

2009 개정교육과정은 학습량 경감과 학년군제의 도입 등 2007 개정교육과정과 구별되는 뚜렷한 몇 가지 차이가 있다. 이런 차이점 가운데 특히 2007개정교육과정의 중학교 1학년에서 다루어지고 있던 집합이 2009개정교육과정에서는 고등학교 수학II에서 다루도록 개정되었다. 이에 따라 중학교에서 처음 도입되는 함수는 기존의 집합을 이용한 정의역과 공역, 치역을 다룰 수 없게 되었다. 즉, 2009 개정교육과정의 중학교 1~3학년군에서 함수의 개념은 다양한 상황에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입하고 있다(교육과학기술부, 2011). 이것은 19세기 코시(A. L. Cauchy, 1789~1857)가 함수의 정의를 두 변수 사이의 관계(대응)으로 규정한 것을 디리클레(P. G. L, Dirichlet, 1805~1859)가 계승하여 x의 각 값에 y의 대응으로 보는 함수의 개념을 확립한 것을 따르고 있다(김용운, 김용국, 1994).

2009 개정교육과정에 의하면 중학교에서 처음 도입되는 함수의 학습내용 성취 기준은 “다양한 상황을 표와 식으로 나타내고, 함수의 개념을 이해한다.”고 되어 있다. 또 교수 학습 상의 유의점에 “함수를 도입할 때 정비례와 반비례 이외의 상황을 다룰 수 있다. 함수의 개념은 다양한 상황에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입한다.”고 제시하였다. 또한 고등학교 수학II에서 다루는 함수의 학습내용 성취 기준에서는 “함수의 뜻을 알고 그 그래프를 이해한다. 함수의 합성을 이해하고 합성함수를 구할 수 있다. 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.”고 되어 있다.

이에 사다리타기 게임의 수학적 분석 내용을 근거로 중학교에서의 대응을 이용한 함수개념의 도입, 고등학교에서의 집합을 이용한 함수의 도입에 활용하는 것은 의미가 있다고 할 수 있다. 또한 사다리타기 게임은 이러한 함수 개념의 이해와 더불어 역함수와 합성함수의 개념을 효과적으로 지도하는 데에도 중요한 역할을 할 것으로 판단된다. 사실 사다리타기 게임은 일찍부터 함수를 설명하는데 사용되어져 왔다. 그러나 사다리타기 게임의 수학적 이론의 배경이 제시되지 않았기 때문에 단순히 흥미를 끄는 정도에 그쳤었다. 본 연구에서는 사다리타기 게임에 사용되는 사다리그림을 수학적으로 분석하여 이런 맹점을 극복하고자 하였다. 즉, 사다리타기 게임에 대한 수학적 근거가 확실하고 충분히 제시되었기 때문에 사다리타기 게임을 함수 도입을 위한 스토리텔링의 제재

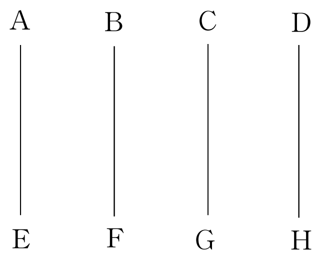
로 활용할 수 있다.

본 연구에서는 집합을 이용하지 않고 함수를 도입해야 하는 중학교 수업현장에서 함수를 쉽고 흥미롭게 도입할 수 있으며, 권오남(2012)이 제시한 실생활 연계형, 도구 활용형 스토리텔링의 제재로 활용할 수 있는 사다리타기 게임을 소개한다. 이를 위하여 사다리타기 게임을 하는 방법을 소개하고, 사다리타기 게임에 사용되는 사다리그림이 일대일대응이라는 것을 수학적으로 증명하고, 중학교에서의 함수 도입과 고등학교에서의 합성함수의 도입에 활용할 수 있는 스토리텔링을 제시하였다. 사다리타기 게임이 2009 개정교육과정의 중학교에서 함수의 도입뿐만 아니라 고등학교 수학II에서 다루게 될 함수의 합성과 역함수까지도 직관적으로 도입할 수 있는 좋은 소재라는 것을 제안하고자 한다.

Ⅱ. 사다리타기 게임의 수학적 분석

본 연구를 진행하기 위하여 필요한 사다리타기 게임을 간단히 알아보자. 우리가 흔히 하는 게임인 사다리타기 게임의 기원은 확실하지 않지만 남녀노소 누구나가 즐길 수 있는 쉽고 간단한 게임이다. 예를 들어 이 게임은 여러 사람들이 모여 점심이나 저녁 메뉴를 정할 때라든지, 어떤 게임이나 운동경기에서 같은 팀을 정할 때 사용된다. 특히 Lange와 Miller(1992)는 사다리타기 게임을 'Random Ladder Game'이라고 부르며 Markov chain 모델을 제시하기도 하였다. 한편 Culin(1958)은 사다리타기 게임 말고도 우리나라에서 전해지고 있는 여러 가지 고전적인 게임을 소개하고 있다. 따라서 사다리타기 게임은 우리나라뿐만 아니라 다른 나라에도 알려진 게임임을 짐작할 수 있다.

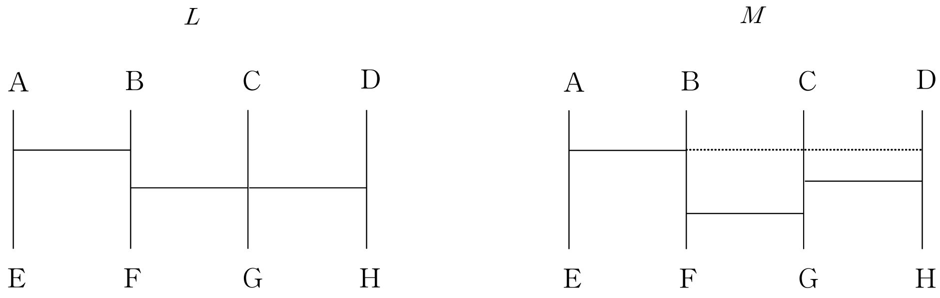
사다리타기 게임의 원리는 다음과 같다. 먼저 <그림 II-1>과 같이 윗부분에서 아랫부분으로 서로 만나지 않도록 그리는 길이가 같은 선분을 세로선이라고 하고 세로선의 위와 아래에 각각 이름을 부여한다.



<그림 II-1>

두 번째로 인접한 두 세로선 사이에 가로로 그린 선분을 가로선이라고 하자. 이때 가로선은 인접한 두 세로선 사이에만 그릴 수 있고, 세로선을 지나가게 그릴 수 없다. 따라서 <그림 II-1>에 그려진 인접한 세로선 사이에 몇 개의 가로선을 그려 넣는다. 이때 인접한 세로선 사이에 그리는 가로선은 어떤 가로선도 같은 높이를 갖지 않게 그린다. '같은 높이를 갖는다.'는 것은 세로선 사이에 같은 높이의 위치에서 각각 오른쪽과 왼쪽으로 가로선을 그린다는 것이다. <그림 II-2>의 그림 L을 살펴보자. 세로선 AE와 BF 사이에 그려진 가로선은 세로선 BF와 CG 사이에 그려진 가로선과 같은 높이에 있지 않다. 그러나 세로선 BF와 CG 사이에 그려진 가로선은 세로선 CG와 DH 사이에 그려진 가로선과 같은 높이를 갖는다. 한편 <그림 II-2>의 그림 M에는 세 개의 가로선이 그려져 있지만 같은 높이를 갖지 않는다. 세로선 CG와 세로선 DH 사이에 가로선을 그릴 때 세로선 AE와 세로선 BF 사이에 그려진 가로선과 높이가 같지 않게 그렸다. 점선은 이들 가로선이 같은 높이에 있지 않음을 보여주기 위해 그린 것이다. 이와 같은 방법으로 완성한 M과 같은 그림을 '사다리그림(Ladder Diagram)'이라고

한다. 한편, 그림 L은 같은 높이를 가지므로 사다리그림이 아니다.



<그림 II-2>

본 연구에서 다루게 될 사다리그림은 일대일대응을 결정한다. 그리고 일대일대응은 함수의 뜻을 이해하는데 중요할 뿐만 아니라 함수의 합성과 역함수의 뜻을 이해하는데도 반드시 필요하다. 따라서 사다리타기 게임에 사용되는 사다리그림이 일대일대응을 결정하고 일대일대응의 기본적인 성질을 설명하는데 유용하게 사용된다면 중학교와 고등학교에서도 함수를 도입하는데 이론적 배경을 제공할 뿐만 아니라 함수의 합성과 역함수를 이해하는데 흥미로운 제재로 활용될 수 있다.

사실 중학교나 고등학교 수업현장에서 함수를 설명하기 위하여 사다리타기 게임을 이용하는 사례는 종종 있었다. 그러나 사다리타기 게임에 사용되는 그림이 정확하게 함수인지 아닌지 또 그 성질은 어떠한지에 대한 논의 없이 사용되어 왔다. 실제로 김현옥(1990)은 사다리타기 게임을 순열로 나타내는 연구를 하였고, 전승미(2008), 주수아(2003) 등은 함수와 게임을 연구하며 사다리타기 게임을 소개하였지만 이는 단순히 사다리타기 게임만을 소개하고 그에 대응하는 치환을 제시한 것에 불과하다. 결국 현재까지 우리나라에서 사다리타기 게임이 수학적으로 엄밀히 분석된 연구는 전무한 실정이다.

따라서 본 장에서는 이런 문제점들을 해결하여 사다리타기 게임을 수학적으로 도입하고 그 성질을 밝힐 것이다. 이는 중학교와 고등학교에서 함수, 합성함수, 역함수를 도입할 때 사용하는 사다리타기 게임이 수학적으로 의미가 있다는 확실한 이론적 배경을 제공하기 위한 것이다. 이를 통하여 사다리다기 게임을 함수를 도입하기 위한 스토리텔링의 제재로 삼을 수 있게 하려는 것이다. 이제 사다리타기 게임을 수학적으로 분석해 보자.

정리 1 *사다리그림은 일대일대응을 결정한다.*

사다리그림의 윗부분과 아랫부분에 각각 왼쪽에서부터 오른쪽으로 차례로 $1, 2, \cdots, n$을 써 넣은 사다리그림을 생각하면 사다리그림 L은 치환

$$f_L : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$$

을 결정한다. 특히 가로선이 하나도 없는 사다리그림은 항등함수이고 i번째와 $(i+1)$번째 세로선을 연결하는 가로선 단 하나만 있는 사다리그림은 나머지는 모두 자신을 자신으로 보내고 i와 $(i+1)$만 바꾸는 일대일대응, 즉 호환(transposition)을 결정한다. 따라서 임의의 사다리그림은 이러한 호환들의 합성이므로 일대일대응이다.

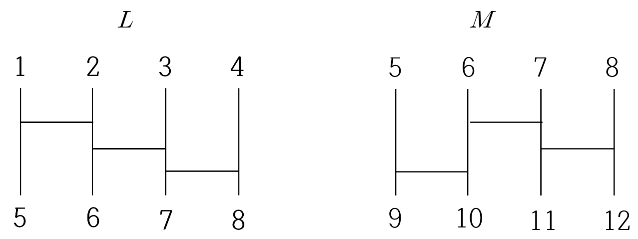
집합 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$이고 S_n은 X 위의 치환 전체의 집합이라고 하자. 그러면 $\sigma \in S_n$이 호환이란 $i<j$인 두 수 i, j에 대하여 $\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=i$이고 $k \notin \{i, j\}$에 대하여 $\sigma(k)=k$인 경우이다. 특히 $j=i+1$이

라면 σ는 연속된 호환(consecutive transposition)이라고 하자. 본 연구에서는 치환의 몇 가지 기본적인 성질을 사다리그림을 이용하여 밝힐 것이다. 이런 증명방법은 치환에 대한 기존의 증명방법과는 다른 새로운 방법이다. 예를 들어 Brualdi(1992)에서 볼 수 있는 S_n의 모든 원소는 연속된 호환의 곱이라는 것을 사다리그림을 이용하여 증명할 것이다. 사실 이것은 단 하나의 가로선을 가진 사다리그림은 연속된 호환을 결정하므로 $\sigma \in S_n$에 대하여 $f_L = \sigma$인 사다리그림 L이 존재한다는 것과 동치이다. 사다리그림에서 s가 양의 정수이고 $s \le n-1$이면 $s-(s+1)$은 s번째와 $(s+1)$번째 세로선을 연결하는 가로선을 나타내기로 한다.

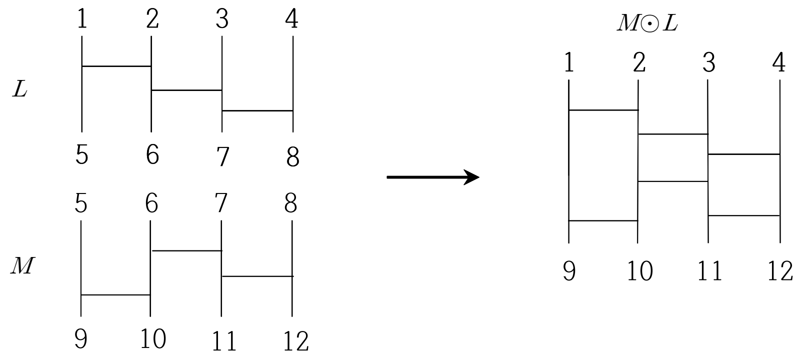
원소의 수가 같은 두 유한집합 X, Y에 대하여 L은 집합 X의 원소를 윗부분에 빠짐없이 배열하고 집합 Y의 원소를 아랫부분에 빠짐없이 배열한 사다리그림이라고 하자. 이때 두 집합 X, Y의 원소들은 중복되지 않게 배열한다. 그러면 사다리그림 L은 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f_L : X \rightarrow Y$를 결정한다. 또 M은 윗부분에는 사다리그림 L에 배열했던 것과 같은 순서로 집합 Y의 원소를 배열하고 아랫부분에는 집합 Y와 같은 수의 원소를 갖는 집합 Z의 원소를 배열한 사다리그림이라고 하자. 그리고 $M \odot L$은 L의 아랫부분에 M의 윗부분을 일치시킨 사다리그림이라고 하자. 예를 들어 세 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4\},\ Y = \{5, 6, 7, 8\},\ Z = \{9, 10, 11, 12\}$$

에 대하여 사다리그림 L과 M을 <그림 Ⅱ-3>과 같이 정의하면[2] $M \odot L$은 <그림 Ⅱ-4>에서와 같은 사다리그림이 된다.



<그림 Ⅱ-3>



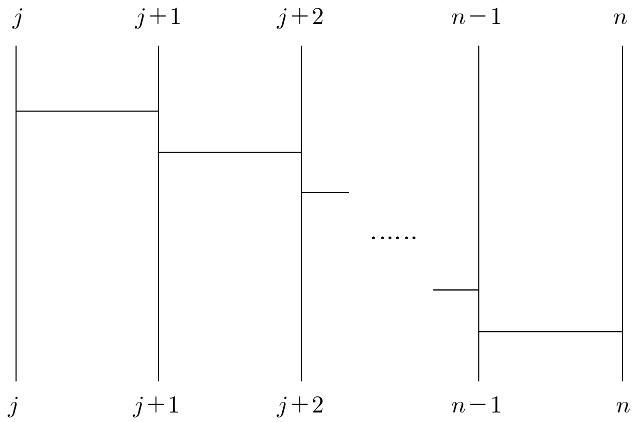
<그림 Ⅱ-4>

2) 사다리그림 L은 윗부분에 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4를 배열하고 아랫부분에 집합 Y의 원소 5, 6, 7, 8을 배열한 것이다. 마찬가지 방법으로 사다리그림 M은 집합 Y의 원소와 집합 Z의 원소를 배열한다. 이때 집합 X, Y, Z를 배열하는 방법은 각각 $4! = 24$가지씩 있다.

정리 2 *σ가 집합 X에서 X로의 일대일대응이라면 $f_L=\sigma$인 사다리그림이 존재한다.*

$|X|$에 대한 수학적 귀납법으로 증명하자. 먼저 $|X|=1$이면 분명하다.[3] $|X|=n-1$인 일대일대응 σ에 대하여 $f_L=\sigma$인 사다리그림 L이 존재한다고 하자. 이제 $|X|=n$인 일대일대응 σ에 대하여 $j=\sigma^{-1}(n)$이라 하고 M은 1부터 j번째까지는 가로선을 갖지 않는 세로선이고 j번째부터 가로선이 위에서부터 아래로 다음과 같은 사다리그림이라고 하자.

$$j-(j+1),\ (j+1)-(j+2),\ \cdots,\ (n-1)-n$$



<그림 II-5> 사다리그림 M

$\tau=f_M$이라면 $\tau(j)=n$이고 $\sigma\circ\tau^{-1}$은 $\sigma\circ\tau^{-1}(n)=n$인 집합 X에서 X로의 일대일대응이다. ρ는 $\sigma\circ\tau^{-1}$를 집합 $X\setminus\{n\}$로 축소시켜서 얻어진 집합 $X\setminus\{n\}$ 위의 치환이라고 하자.[4] 그러면 $|X\setminus\{n\}|=n-1$이므로 수학적 귀납법에 의하여 $f_{K'}=\rho$인 사다리그림 K'이 존재한다. 이 사다리그림 K'의 오른쪽에 세로선 하나를 추가한 그림을 K''라 하면 $f_{K''}=\sigma\circ\tau^{-1}$이다. 이제 $L=K''\odot M$라고 하면 $f_L=f_{K''\odot M}=f_{K''}\circ f_M=(\sigma\circ\tau^{-1})\circ\tau=\sigma$이다.

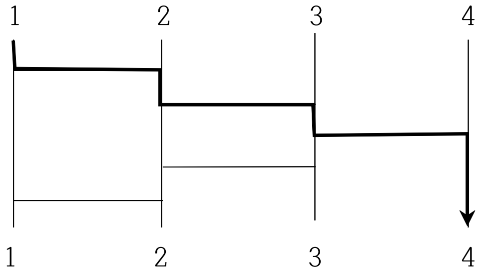
위의 정리는 σ가 집합 X에서 X로의 일대일대응이라면 σ는 호환의 곱이라는 것을 말해준다. 즉, S_n의 모든 원소는 연속된 호환의 곱으로 나타낼 수 있다. σ가 k개의 호환의 곱이거나 l개의 호환의 곱이라면 k와 l은 동질(parity)이라는 것을 의미한다. 여기서 동질이란 k와 l이 모두 홀수이거나 k와 l이 모두 짝수라는 의미이다. 이 사실을 사다리그림으로 표현해보자.

3) 집합 X의 원소가 하나면 사다리그림에서 세로선도 하나이다.
4) $X\setminus\{n\}$로 축소시켰다는 것은 집합 X의 원소 n은 생각하지 않는다는 의미이다. 따라서 원소의 수가 n개에서 $(n-1)$개로 줄어들었다.

먼저 τ가 $i<j$에 대하여 i와 j가 바뀐 호환이라면 위에서부터 아래로 다음과 같은 가로선을 갖는 사다리그림 L_τ에 대하여 $f_{L_\tau}=\tau$이다.

$$i-(i+1),(i+1)-(i+2),\cdots,(j-1)-j,(j-2)-(j-1),(j-3)-(j-2),\cdots,i-(i+1)$$

예를 들어 <그림 Ⅱ-6>은 $n=4,\ i=1,\ j=4$인 경우이므로 $f_{L_\tau}=\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$이다.



<그림 Ⅱ-6> $n=4,\ i=1,\ j=4$인 경우의 사다리그림 L_r

따라서 $i_l<j_l$인 i_l과 j_l $(l=1,2,\ \cdots,k)$에 대하여 τ_l이 i_l과 j_l이 교환된 호환일 때 $\sigma=\tau_1\circ\tau_2\circ\cdots\circ\tau_k$이면 사다리그림 $L_{\tau_1}\odot L_{\tau_2}\odot\cdots\odot L_{\tau_k}$는 치환 σ를 결정하고

$R_k=\sum_{l=1}^{k}(2(j_l-i_l)-1)$개의 가로선을 갖는다. 그런데 R_k는 k개의 홀수인 정수의 합이므로 k와 동질이다. 즉, σ가 k개의 호환의 곱이거나 l개의 호환의 곱이라면 k와 l은 동질이라는 것을 의미한다. 그리고 이에 대한 자세한 내용은 다음에 살펴볼 정리 4에서 보다 엄격하게 증명할 것이다.

사다리그림 L에 대하여 p_i를 $f_L(i)$를 결정하는 경로라고 하자. 예를 들어 <그림 Ⅱ-6>에서 1의 경로 p_1이 굵은 선으로 표시되어 있다. 두 경로 $p_i,\ p_j$에 대하여 p_i에도 포함되고 p_j에도 포함되는 공통인 가로선의 개수를 $r(i,j)$라 하자. 그러면 다음과 같은 정리가 성립한다.

정리 3 *L은 치환 σ를 결정하는 사다리그림이고 i와 j는 $i<j$인 정수이다. 두 경로 p_i와 p_j에 대하여 $r(i,j)$는 $\sigma(i)<\sigma(j)$이면 짝수이고, $\sigma(i)>\sigma(j)$이면 홀수이다.*

사다리그림 위에서 두 물체 α_i와 α_j가 같은 시각에는 항상 같은 높이에 위치해 있으며 각각 경로 p_i와 p_j를 따라서 움직인다고 하자. 먼저 α_i가 α_j의 왼쪽에서 출발한다고 하자. 이 물체들은 항상 같은 높이를 갖기 때문에 두 물체가 충돌하는 것은 왼쪽과 오른쪽에서 동시에 접근할 때이다. 그리고 충돌은 p_i와 p_j의 공통의 가로선 위에서만 일어나며, 공통인 가로선 각각에서 단 한 번씩만 충돌하게 된다. 따라서 p_i와 p_j의 공통인 가로선이 k개라면 두 물체는 정확히 k번 충돌한다. 만약 $\sigma(i)<\sigma(j)$라면 물체 α_i는 처음과 끝이 물체 α_j의 왼쪽에서 일어나므로 k는 짝수이다. 만약 $\sigma(i)>\sigma(j)$라면 α_i는 α_j의 왼쪽에서 시작하여 오른쪽에서 끝난다. 따라서 $\sigma(i)>\sigma(j)$이면 k는 홀수이다.

주어진 사다리그림 L의 윗부분부터 아랫부분까지 가로선을 각각 r_1, r_2, $\cdots$, r_m이라할 때, L^{-1}은 윗부분부터 아랫부분까지 가로선이 r_m, r_{m-1}, $\cdots$, r_2, r_1인 사다리그림이라고 하자. 그러면 $f_{L^{-1}}$은 치환 f_L의 역치환이다.

정리 4 *치환 σ를 결정하는 두 사다리그림을 L_1, L_2라 하자. 그러면 L_1과 L_2의 가로선의 개수는 동질이다.*

먼저 σ가 항등치환인 경우를 살펴보자. L은 σ를 결정하는 사다리그림이고, i, j는 $1 \le i < j \le n$인 정수라고 하자. 경로 p_i는 사다리그림의 윗부분에 있는 i에서 출발하여 사다리그림의 아랫부분에 있는 i로 가고, 경로 p_j는 사다리그림의 윗부분에 있는 j에서 출발하여 아랫부분에 있는 j로 가므로 정리 3에 의하여 $r(i,j)$는 짝수이다. 따라서 $\sum_{i<j} r(i,j)$는 짝수이다. f_L이 일대일대응이라는 것은 사다리그림의 각각의 가로선은 정확히 두 경로에 포함된다는 것을 의미한다. 만약 경로 p_i, p_j, p_k가 모두 r개의 공통인 가로선을 갖는다면 이들 가운데 두 경로는 이 가로선에서 일치되게 되므로 사다리그림 아랫부분의 같은 위치에서 끝나게 된다. 따라서 $\sum_{i<j} r(i,j)$는 L의 가로선의 개수와 같게 되므로 L은 짝수개의 가로선을 갖는다.

이제 보다 일반적인 경우를 증명하자. σ를 임의의 치환이라고 하고, L_1, L_2는 σ를 결정하는 사다리그림이라고 하자. 그러면 $L_2^{-1} \odot L_1$은 항등치환을 결정하는 사다리그림이다. 따라서 앞의 증명에서와 같이 $L_2^{-1} \odot L_1$은 짝수개의 가로선을 갖는다. 그런데 $L_2^{-1} \odot L_1$의 가로선의 개수는 두 사다리그림 L_1과 L_2의 가로선의 개수의 합이므로 L_1과 L_2는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다. 즉, L_1과 L_2는 동질이다.

따라서 정리가 성립함을 알 수 있다.

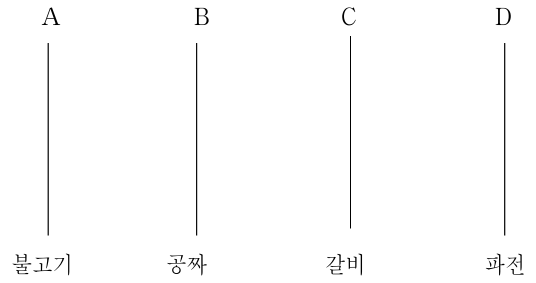
Ⅲ. 사다리타기 게임을 이용한 함수 지도

가. 중학교에서의 함수 도입

중학교에서의 사다리타기 게임을 통한 함수 교수·학습은 교육과학기술부와 권오남(2012)이 제시한 다섯 가지 스토리텔링 유형 중에 실생활 연계형[5]으로 활용할 수 있다. 사다리타기 게임의 진행 방법을 예를 들면 다음과 같다. 네 명이 점심으로 불고기, 갈비, 파전을 먹기로 하였다. 그런데 네 명은 흥미로운 방법으로 점심메뉴로 정한 음식의 값을 치르기로 했다.

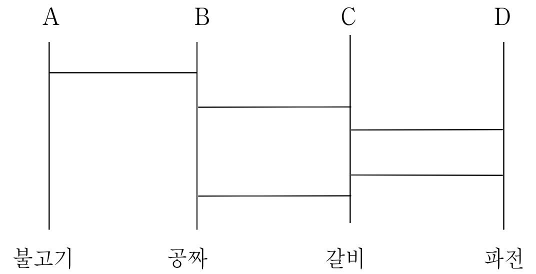
네 명이 세 가지 음식을 선택했으므로 세 명은 각각 한 가지씩의 음식 값을 내고, 나머지 한 명은 공짜로 점심을 먹기로 하였다. 그들은 공짜로 점심을 먹을 한 명을 정하기 위하여 다음과 같은 그림을 그렸다.

5) 권오남(2012)는 '실생활연계형'은 수학적 개념과 원리를 함축하고 학생들의 실생활과 연관성이 있는 상황을 이야기의 제재로 관련된 개념과 원리를 탐구하고 수학적 지식을 구성할 수 있는 맥락을 제공하는 유형으로 분류했다. 이에 사다리타기 게임은 학생들과 관련 있는 실생활을 소재로 활용할 수 있는 도구라는 점에서 '실생활연계형'으로 분류했다.



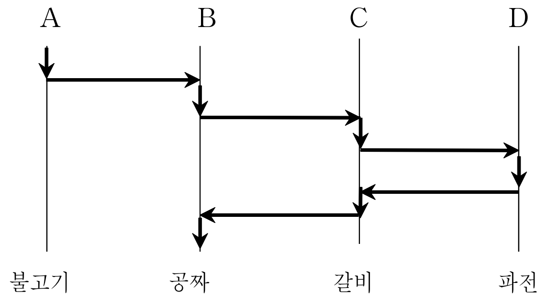
<그림 Ⅲ-1>

먼저 <그림 Ⅲ-1>에서와 같이 첫 번째 사람이 네 명이 선택할 수 있도록 종이의 윗부분에 차례로 A, B, C, D를 쓰고, 그 아랫부분에 어느 정도 공간을 두고 '공짜'와 세 가지 음식의 이름을 적었다. 그리고 A는 불고기, B는 공짜, C는 갈비, D는 파전과 각각 세로선으로 연결하였다. 그런 다음 <그림 Ⅲ-1>에 그려진 인접한 세로선 사이에 몇 개의 가로선을 그려 넣었다. 예를 들어 <그림 Ⅲ-2>는 그렇게 완성한 사다리그림이다.



<그림 Ⅲ-2>

<그림 Ⅲ-2>와 같은 사다리그림이 완성되면 밑에 적힌 음식이름을 가리고 네 사람은 한 사람씩 사다리그림 윗부분에 적혀있는 A, B, C, D 가운데 각각 한 가지를 선택한다. 모든 사람이 선택을 완료했다면 각 사람은 자신이 선택한 A, B, C, D에서 세로선을 따라 아랫부분으로 이동한다. 세로선을 따라 아랫부분으로 이동하다가 인접한 세로선과 연결된 가로선을 만나면 그 가로선을 따라서 인접한 세로선으로 이동한다. 다시 세로선을 따라 아랫부분으로 이동하다가 인접한 세로선과 연결된 가로선을 만나면 인접한 세로선으로 이동한다. 이와 같은 과정을 계속하면 음식이름이 써진 아랫부분에 도착하게 된다. 예를 들어 다음 <그림 Ⅲ-2>에서 보듯이 A를 선택한 사람은 사다리그림의 윗부분에 있는 A에서 출발하여 세로선과 가로선을 따라 아랫부분으로 내려오면 '공짜'에 도착하게 된다. 따라서 이 사람은 점심을 '공짜'로 먹을 수 있게 되고, 마찬가지 방법으로 B를 선택한 사람은 불고기, C를 선택한 사람은 갈비, D를 선택한 사람은 파전을 사게 된다.



<그림 III-3>

<그림 Ⅲ-3>과 같이 사다리타기 게임에서 A, B, C, D가 정해지면 이에 따라 음식의 종류도 단 하나로 정해지므로 '음식'은 'A, B, C, D'의 함수[6]라고 할 수 있다. 그리고 사다리타기 게임에서 사다리그림의 윗부분과 아랫부분에 각각 써 넣는 A, B, C, D와 불고기, 공짜, 갈비, 파전은 굳이 집합으로 표현하지 않아도 되므로 사다리타기 게임을 이용하면 집합을 도입하지 않고도 함수를 정의할 수 있다. 또 학생들이 쉽게 이해할 수 있고, 게임을 즉석에서 만들어 활동할 수 있는 흥미로운 소재이므로 신교육과정에서 제시한대로 함수를 직관적으로 도입하는 데 사다리타기 게임은 적절히 활용될 수 있다.

위와 같은 사다리타기 게임을 통해 함수의 개념을 이해한 후, 학생 스스로 또는 협력학습을 통해 사다리 그림을 자유롭게 그리게 한 다음 대응관계를 탐구하는 활동이 이어진다면 학생들은 함수의 개념을 구조적으로 이해할 수 있을 것이다. 또한 함수의 개념 정립을 위한 활동이 끝난 후에, <표 Ⅲ-1>과 같이 사다리 그림에서 가로선의 역할에 대한 탐구활동을 하는 것은 학생들의 귀납과 유추 같은 수학적 능력을 신장하는 데 도움을 줄 수 있다. 이러한 탐구활동은 단계별로 학생들이 어려워 할 수 있는 내용도 있기 때문에 개별적인 활동보다는 협력학습으로 진행하는 것이 더욱 효과적이라고 할 수 있다.

<표 III-1> 사다리타기 게임의 중학교 수학적 탐구 활동 예시

단계	탐구 활동
0	n개의 세로 선을 그린 후 세로선의 윗부분에 1부터 n까지 대응을 시키고, 세로선의 아랫부분에 같은 순서대로 1부터 n까지 대응시키는 사다리그림을 그린다.
1	위 사다리그림에서 대응되는 수의 관계를 말하시오.
2	인접한 두 세로선을 잇는 1개의 가로선을 그리고, 그 가로선의 역할을 대응되는 수의 관계를 이용하여 말하시오.
3	인접한 두 세로선을 잇는 k개의 가로선을 그리고, 사다리그림에서 대응되는 수의 관계를 말하시오.
4	단계 3에서 그린 사다리그림의 대응관계와 같은 사다리그림을 그려보시오.
5	n개의 세로선과 k개의 가로선으로 이루어진 사다리 그림에서 대응되는 수를 찾는 방법으로 어떤 것이 있는 지 말하시오.

6) 중학교 수학에서는 보통 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 y의 값도 단 하나로 정해지는 관계가 있을 때, y는 x의 함수라고 정의한다. 이와 같은 관점에서도 사다리타기 게임은 함수임을 직관적으로 알 수 있다.

나. 고등학교에서 합성함수와 역함수 지도

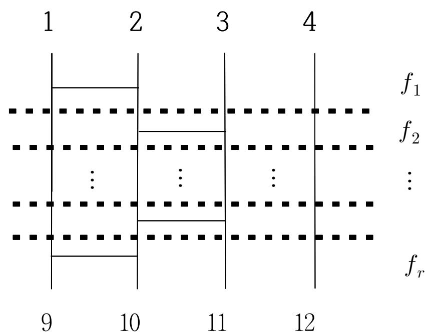
고등학교에서의 사다리타기 게임을 통한 합성함수 교수·학습은 권오남(2012)이 제시한 다섯 가지 스토리텔링 유형 중에 도구 활용형[7]으로 활용할 수 있다. 중학교에서는 집합을 이용해 함수를 도입할 수 없지만 고등학교의 경우에는 집합을 이용해 함수를 도입할 수 있기 때문에 중학교 스토리텔링 사례를 적절하게 활용하면, 학생들은 고등학교에서의 함수의 개념을 효과적으로 지도할 수 있다. 또한 사다리 그림은 일대일대응이기 때문에 학생들은 사다리타기 게임을 활용해 역함수의 개념도 효과적으로 학습할 수 있다. 이에 본 절에서는 학생들이 사다리타기 게임을 활용해 합성함수의 개념과 성질을 효과적으로 학습할 수 있는 스토리텔링을 제시하고자 한다.

앞에서 우리는 두 개의 사다리그림을 붙여서 하나의 새로운 사다리그림을 만들었었다. 즉, 함수 f_L과 f_M을 각각 사다리그림 L과 M에 의하여 결정되는 함수라고 하면

$$f_{M \odot L} = f_M \circ f_L : X \rightarrow Z$$

임을 알 수 있다. 따라서 사다리그림 $M \odot L$은 두 함수 f_L과 f_M의 합성함수 $f_M \circ f_L$를 결정한다.

한편 가로선이 하나도 없는 사다리그림은 항등함수를 결정한다. 또 가로선이 하나인 사다리그림은 가로선이 접해 있는 인접한 세로선의 두 성분만을 바꾸는 것과 같으므로 일대일대응을 결정한다. 따라서 <그림 Ⅲ-4>과 같이 r개의 가로선을 가지는 사다리그림은 r개의 일대일대응의 합성함수를 결정한다.

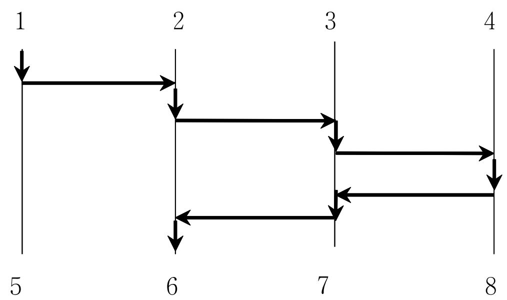


<그림 Ⅲ-4>

중학교 경우와 마찬가지로 고등학교에도 사다리 그림과 합성함수의 관계를 효과적으로 이해했다면 학생 스스로 또는 협력학습을 통해 사다리그림을 자유롭게 그리게 한 다음 사다리 그림과 합성함수의 관계를 탐구하는 활동이 이어져야 할 것이다. 또한 스토리텔링 활동이 끝난 후에 <표 Ⅲ-2>와 같이 사다리타기 게임에 대한 탐구 활동은 사다리타기 게임에서 다양한 수학적인 내용을 발견하게 할 것이다. 이러한 탐구 활동은 단계별로 학생들이 어려워 할 수 있는 활동도 있기 때문에 개별적인 활동보다는 협력학습으로 진행하는 것이 더욱 효과적이라고 할 수 있다.

7) 권오남(2012)는 '도구활용형'은 다양한 공학적 도구를 포함하여 수학적 개념을 함축하고 있는 게임 등을 과제의 소재로 도입하여 수학적 원리 및 개념을 탐구할 수 있는 맥락으로 활용하는 모델로 분류했다. 하지만 본 연구에서는 공학적 도구를 사용하지는 않지만 사다리타기 게임이 다양한 수학적인 개념을 내포하고 있다는 점에서 '도구활용형'으로 분류했다.

<표 III-2> 사다리타기 게임의 고등학교 수학적 탐구 활동 예시

단계	탐구 활동
0	n개의 세로 선을 그린 후 세로선의 윗부분에 1부터 n까지 대응을 시키고, 세로선의 아래 부분에 같은 순서대로 1부터 n까지 대응시키는 사다리그림을 그린다.
1	인접한 두 세로선을 잇는 1개의 가로선을 그리고, 그 가로선의 역할을 대응되는 수의 관계를 이용하여 말하시오.
2	인접한 두 세로선을 잇는 k개의 가로선을 그리고, 사다리그림에서 대응되는 수의 관계를 말하고, 그 대응관계와 같으면서 가로선의 개수가 더 적은 사다리 그림을 그려보시오.
3	사다리타기 게임에서 세로선 위의 숫자와 아래 숫자가 항상 하나씩 대응되는지 확인하고 그 이유를 말하시오.
4	사다리그림에서 세로선 위의 숫자 x에 대응되는 세로선 아래 숫자를 $f(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 사다리 그림을 그리고, 서로 비교해보시오. $f(1)=5,\ f(2)=2,\ f(3)=4,\ f(5)=1$
5	다음 사다리그림에서 1은 6에 대응된다. 이때 p_1은 1이 세로선과 가로선을 따라 6으로 결정되도록 움직이는 1의 경로라 하고, 두 경로 p_i, p_j에 대하여 p_i에도 포함되고 p_j에도 포함되는 공통인 가로선의 개수를 $r(i, j)$라 하자. 다음 사다리그림에서 $r(i, j)$의 값을 각각 구하시오. 
6	각자 사다리그림을 그리고 $r(i,\ j)$의 값을 구하고 그 값의 규칙성에 대해 말하시오.
7	$r(i,\ j)$의 값을 $f(i)$와 $f(j)$의 값과 관계를 찾아보시오.
8	사다리그림을 그리고 세로선 아랫부분에 대응되는 세로선 위부분의 수를 찾는 방법에 대해 말하시오.

이상에서 알아본 바와 같이 사다리타기 게임은 '생각하는 힘을 키우는 수학', '쉽게 이해하고 재미있게 배울 수 있는 수학', '더불어 함께하는 수학'을 구현할 수 있는 중요한 소재라는 것을 파악할 수 있고, 이러한 사다리타기 게임의 탐구는 교육과학기술부의 「수학교육 선진화 방안」에서 제시된 대책의 기본방향에도 부합된다고 볼 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 논의

2009 개정교육과정의 중학교과정에서 함수는 집합을 이용하여 정의하지 않고, 두 변수 x, y에 대하여 x의 값이 정해지면 y의 값도 단 하나로 정해지는 관계라고 정의하고 있다. 그러나 고등학교과정의 수학Ⅱ에서는 집합을 배운 이후에 함수를 도입하고, 함수의 합성과 역함수까지 다룬다. 앞에서 설명한 것과 같은 사다리타기 게임의 성질 때문에 이 게임을 이용하면 집합의 개념을 이용하지 않고도 함수를 도입할 수 있고, 또 합성함수와 역함수도 흥미롭게 도입할 수 있다.

일반적으로 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$가 주어졌을 때, 집합 X의 각 원소 x에 대하여 f에 의한 함수값 $f(x)$는 g의 정의역 Y의 원소이고, 이 $f(x)$의 g에 의한 함수값 $g(f(x))$는 집합 Z의 원소이다. 이때, X를 정의역, Z를 공역으로 하고, 집합 X의 각 원소 x의 함수값이 집합 Z의 원소 $g(f(x))$가 되는 새로운 함수를 얻을 수 있다. 이 함수를 f와 g의 합성함수라 하고, 기호 $g \circ f$ 또는 $y = g(f(x))$로 나타낸다. 이와 같이 함수의 합성은 수학적으로 엄밀하게 정의하는 것이 필요하지만 이런 수학적 정의는 학생들이 함수의 합성을 직관적으로 받아들이고 이해하기 쉽지 않다. 또 함수 f의 역함수 f^{-1}의 경우도 마찬가지이다.

오늘날 추상적이고 현대적인 함수의 개념은 오랜 역사 발생적 과정을 거쳐 수학화 되어 오는 동안에 원래의 함수적 사고에서 중요시된 여러 측면이 함축되고 추상화, 형식화된 것이다. 고전적 의미의 함수가 역동적이고 변화 현상과의 관련성을 강조한 반면, 현대적 의미의 함수는 정적이고 추상적이다. 이 때문에 학생들은 함수가 지닌 구체적인 의미를 이해하기 어려워한다.

함수를 지도함에 있어서 중요한 것은 학생들로 하여금 변화의 관계로서 진정한 함수의 개념을 파악하도록 하는 것이다. 나아가 형식화, 추상화 등 수학화의 과정을 경험하게 하여야 한다. 학생들에게 자연과 사회에서 경험하는 온도, 가격의 변화 등 다양한 현상의 함수 관계에 대해 구체적인 예를 찾아 제시하고, 생활 속에서 함수적인 요소를 찾아 두 변량 사이의 관계로 관찰하는 것을 통하여 함수 개념의 본질이 형성되고 함수적 사고가 발달할 수 있도록 지도해야 한다.

이에 본 연구에서는 함수와 관련된 실생활 연계형, 도구 활용형 스토리텔링 소재로 사다리타기 게임의 예를 들어 그 가능성을 탐색하였다. 수학 수업에서 사용되는 소재는 수학적으로 의미 있고 중요한 것을 찾아내어 학습자들이 탐구할 수 있도록 가능하게 하는 내용을 찾는 것이 선행되어야 한다고 보고 사다리타기 게임을 수학적으로 분석했다. 그 결과 사다리타기 게임이 수학교육에 주는 시사점을 다음과 같이 네 가지로 요약할 수 있다.

첫째, 사다리타기 게임은 변수 x에 단 하나의 변수 y가 대응되는 일대일대응이라는 것이다. 둘째, 사다리그림을 두 개 이상 겹쳐 놓음으로써 새로운 사다리그림을 얻을 수 있으며, 이것은 함수의 합성과 같다는 것이다. 셋째, 일대일대응 f를 결정하는 사다리그림을 거꾸로 하면 바로 f^{-1}를 확인할 수 있다는 것이다. 넷째, 하나의 일대일대응을 결정하는 사다리그림은 많지만 그들은 모두 동질이라는 것이다.

사다리타기 게임은 함수를 설명할 수 있을 뿐만 아니라 게임을 통하여 학생들을 수업에 몰입시킬 수도 있다. 그러나 사다리타기 게임을 활용하여 보다 흥미로운 수업을 진행하려면 이 게임에 대하여 더 많은 연구가 필요하다. 이를 테면 다음과 같은 문제를 더 생각함으로써 학생들의 흥미와 수학적 아이디어를 이끌어낼 수 있을 것이다.

① 주어진 사다리그림으로부터 어떻게 하면 빨리 함수의 규칙을 찾을 수 있을까?

② 일대일대응을 결정하는 주어진 사다리그림 L의 가로선의 개수가 최소인가?

③ 일대일대응 f가 주어졌을 때, f를 결정하며 서로 다른 사다리그림은 몇 개인가?

스토리텔링이 가능하기 위해서는 먼저 스토리를 전개하는 것을 가능하게 해 주는 이야기와 학생들이 흥미를

갖고 적극적으로 참여할 수 있는 수학적 내용을 함께 갖춘 소재를 찾는 것이 선행되어야 한다. 그런 소재가 단순한 흥밋거리를 넘어 학생들에게 수학의 진면목을 드러낼 수 있는 것이기 위해서는 학생들이 그것을 탐구하는 것이 가능해야 한다. 사다리타기 게임은 규칙이 매우 간단하고 학급 친구들과도 손쉽게 할 수 있는 게임이다. 또한 본 연구에서 중학교의 함수 도입과 고등학교의 합성함수의 도입에서 제시한 바와 같이 수학적으로도 매우 풍부한 내용을 함유하고 있다는 점에서 기본적으로 스토리로 전개될 수 있는 가능성을 갖추고 있다.

본 연구에서 보았듯이 탐구의 대상이 된다는 점에서 사다리타기 게임은 스토리텔링을 위한 소재가 될 수 있다. 따라서 집합을 이용하지 않고 함수를 도입하기 위하여 사다리타기 게임을 활용한 스토리텔링 방식의 다양한 수업모델에 대한 연구가 더 진행되어야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

곽경숙 (2011). 대학의 사고와 표현 관련 교육에서 스토리텔링의 활용에 대한 연구, 한국언어문학, 76, (pp. 373-394).

권기석 (2012.02). 스토리텔링 도입, 수학이 재미있어진다, 과학과 기술, (pp. 42-45).

권오남 · 주미경 · 박규홍 · 오혜미 · 박지현 · 조형미 · 이지은 · 박정숙 (2012). 고등학교 수학교사의 스토리텔링 수학 교과서에 대한 이해, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 51(3), (pp. 223-246).

권혁일 (2008). 디지털 스토리텔링이 초등학생의 수학 학업성취도 및 태도에 미치는 효과, 교육과학연구, 39(3), (pp. 139-170).

교육과학기술부 (2006). 수학과 교육과정 개정 고시, 교육인적자원부 고시 제2006-75호.

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제 2011-361호.

교육과학기술부 (2012). 수학교육선진화 방안(2012년 1월 10알 보도자료).

김용운 · 김용국 (1994). 수학사대전, 우성문화사.

김현옥 (1990). 사다리타기와 순열, 경북대학교, 석사논문.

박교식 (2012). 수학교육에서의 스토리텔링 방식 적용을 위한 소재 연구:지수용육도와 지수귀문도를 중심으로, 한국학교수학회논문집, 15(1), (pp. 155-169).

백조현 · 박수홍 · 강문숙 (2010). 스토리텔링기반 수학과 수업설계전략 모형 개발 -확률과 통계를 중심으로-, 교육혁신연구, 20(1), (pp. 113-141).

오영범 · 박상섭 (2010). 초등학교 수학과 개념 학습을 위한 스토리텔링 기반 학습 콘텐츠 개발, 한국정보교육학회논문지, 14(4), (pp. 537-545).

전승미 (2008). 함수단원의 개념지도 방법 연구 : 중학교 제7차 교육과정을 중심으로, 한국외국어대학교 석사논문.

주수아 (2003). 수학적 태도 형성을 위한 게임 학습의 사례연구, 신라대학교 석사논문.

Brualdi, R. A.(1992). *Introductory Combinatorics, Second edition*, New York, North-Holland Pub.

Culin, S(1958). *Games of the Orient,* Philadelphia, University of Pennsylvania Press.

Lange, L. H and Miller, J. W.(1992). A Random Ladder Game : Permutations, Eigenvalues and Convergence of Markov Chains, *The College Mathematics Journal,* Vol. 23, No. 5, (pp. 373-385).

Mathematical Analysis of Ladder Diagram Games for the introduction of the function

Gwangyeon Lee
Department of Mathematics Hanseo University 360, Seosan, ChungNam, Korea
E-mail : gylee@hanseo.ac.kr

Kwangsang Lee†
Korea Institute for Curriculum and Evaluation 21-15, Jeongdong-gil, Jung-gu, Seoul, Korea
E-mail : leeks@kice.re.kr

Gijong Yoo
Anbeop High School 66 Myungryun-gil Anseong Kyounggi-do Korea
E-mail : mathink@naver.com

In this paper, we explore the possibility that ladder diagram games can be used for the introduction of the function and composite function. A ladder diagram with at most one rung is a bijection. Thus a ladder diagram with r rungs is the composition of r one-to-one correspondence. In this paper, we use ladder diagrams to give simple proofs of some fundamental facts about one-to-one correspondence. Also, we suggest Story-telling for introduction of function in middle school and high school. The ladder diagram approach to one-to-one correspondence not only grabs our students' attention, but also facilitates their understanding of the concept of functions.

* ZDM Classification : D43, D44, U63, U64
* 2000 Mathematics Subject Classification : 05A05, 97C80
* Key Words : storytelling, ladder diagram, function, one-to-one correspondence, composite function, permutation
† Corresponding author