

## 저자유도 조인트의 구속조건 생성을 위한 파라메트릭 일반좌표 이용<sup>§</sup>

이정근\* · 이철호\*\* · 배대성\*\*†

\* 한경대학교 기계공학과, \*\* 한양대학교 기계공학과

### Use of Parametric Generalized Coordinates for Kinematic Constraint Formulation of Low Degree-of-Freedom Joints

Jung Keun Lee\*, Chul Ho Lee\*\* and Dae Sung Bae\*\*†

\* Dept. of Mechanical Engineering, Hankyong Nat'l Univ.,

\*\* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received April 26, 2013 ; Revised August 14, 2013 ; Accepted August 14, 2013)

**Key Words:** Parametric Generalized Coordinates(파라메트릭 일반좌표), Mixed Set of Generalized Coordinates(혼합 좌표세트), Joint Constraints(조인트 구속조건), Constraint Equations(구속조건식)

**초록:** 다물체 기계시스템에서 핀조인트나 병진조인트 같은 저자유도 조인트는 고자유도 조인트보다 훨씬 빈번하게 사용된다. 저자유도 조인트에 대한 기구학적 구속조건식을 효율적이고 체계적으로 공식화하기 위해, 본 논문은 구속조건식을 표현하는 새로운 접근방법으로 파라메트릭 일반좌표를 이용한다. 제안된 방법에서는 직교좌표와 파라메트릭 일반좌표를 혼합하여 조인트 구속조건을 생성하는데, 이는 구속조건에 대한 자코비안과 같은 구속조건 편미분행렬을 매우 간단하게 표현되도록 하므로써 공식의 복잡성과 계산시간을 단축시킨다. 제안된 방법은 암시적 적분기를 바탕으로 실린더-크랭크시스템에서 검증되었다.

**Abstract:** In multibody mechanical systems, low-degree-of-freedom (DOF) joints such as revolute and translational joints are much more frequently used than high-DOF joints. In order to formulate kinematic constraint equations, especially for low-DOF joints, in an efficient and systematic manner, this paper presents a parametric generalized coordinate formulation as a new approach for describing constraint equations. In the proposed approach, joint constraint equations are formulated in terms of a mixed set of Cartesian and parametric generalized coordinates, which drastically reduces the complexity and computational cost of the partial derivatives of the constraints such as the constraint Jacobian. The proposed formulation is validated using a simple cylinder-crank system with an implicit integrator.

- 기호설명 -

$X-Y-Z$ ,  $x'_i-y'_i-z'_i$ ,  $x''_i-y''_i-z''_i$ : 각각 관성좌표계,  $i$  강체 좌표계,  $i$  강체부착 조인트 좌표계  
 $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{A}_i$ :  $i$  강체 좌표계의 위치벡터 및 자세행렬  
 $\delta\mathbf{r}_i, \delta\boldsymbol{\pi}_i$ : 관성좌표계에 대한  $i$  강체의 병진 및

회전성분 가상 변위 벡터  
 $\mathbf{C}'_i$ :  $x'_i-y'_i-z'_i$  와  $x''_i-y''_i-z''_i$  간 고정 상대자세 행렬  
 $\mathbf{H}''_{ij}$ :  $x''_i-y''_i-z''_i$  와  $x''_j-y''_j-z''_j$  간 상대자세행렬  
 $\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i, \mathbf{h}_i$ : 조인트 좌표계  $x''_i-y''_i-z''_i$  의  $x, y, z$  축에 평행한 단위벡터  
 $\mathbf{s}_i$ :  $x'_i-y'_i-z'_i$  원점에서  $x''_i-y''_i-z''_i$  원점까지의  $i$  강체 부착 벡터 ( $\mathbf{s}'_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{s}_i$ , 여기서  $\mathbf{s}'_i$  는 상수)  
 $\mathbf{d}_{ij}$ :  $x''_i-y''_i-z''_i$  원점에서  $x''_j-y''_j-z''_j$  원점까지의 강체간 연결벡터 ( $\mathbf{d}'_{ij} \equiv \mathbf{A}_i^T \mathbf{d}_{ij}$ )

§ 이 논문은 대한기계학회 CAE 및 응용역학부문 2013년도 춘계학술대회 (2013. 5. 23.-25., BEXCO) 발표논문임.

† Corresponding Author, dsbae@hanyang.ac.kr

© 2013 The Korean Society of Mechanical Engineers

1. 서론

전산 다물체 동역학 해석에 있어 일반좌표 (generalized coordinates)의 선정은, 해석 알고리즘의 전체적인 구조 및 계산효율 그리고 개발의 용이성을 좌우하는 매우 중요한 과정이다.<sup>(1,2)</sup> 가장 일반적으로 사용되는 일반좌표로서 직교좌표 (Cartesian coordinates) 방식은 각 강체마다 6 개 혹은 7 개의 좌표가 부여되어 다물체시스템을 쉽고 편리하게 기술할 수 있는 장점을 지닌다.<sup>(3,4)</sup>

대부분의 기계 시스템은 다수개의 강체들이 조인트로 연결되어 기구학적 구속조건을 만족시키며 동작한다. 구속된 다물체 시스템의 운동방정식은 통상 다음과 같이 표현된다.<sup>(5)</sup>

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q} + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{0} \tag{1}$$

여기서,  $\mathbf{M}$  은 질량행렬;  $\mathbf{q}$  는 일반좌표 벡터;  $\mathbf{Q}$  는 일반힘 벡터;  $\Phi$  와  $\Phi_q$  는 각각 구속조건과 구속조건에 대한 자코비안 (Jacobian,  $\partial\Phi/\partial\mathbf{q}$ ); 그리고  $\lambda$  는 라그랑지 승수이다. 암시적 적분 (implicit integration) 방법의 적용을 위해선 구속조건과 관련하여, 1 계 편미분행렬인 자코비안  $\Phi_q$  와 더불어 2 계 편미분행렬인  $(\Phi_q^T \lambda)_q$  의 계산이 필요하다. 하지만, 직교좌표를 이용한 구속조건 편미분행렬 생성은 많은 양의 계산을 요구한다.

본 논문은 조인트의 자유도에 따른 파라메트릭 일반좌표 (parametric generalized coordinates)를 직교좌표와 혼합하여 이용하므로써<sup>(6)</sup> 구속조건식을 간

략화하고, 이를 통해 체계적인 구속조건식을 유도하는 것을 목표로 한다. 파라메트릭 좌표를 도입하여 저자유도 조인트에서 특히 효율적으로 활용할 수 있는 방법을 제안한다.

2. 기존방법에서의 조인트 구속조건식

2.1 기존 조인트 구속조건

기존의 직교좌표기반의 방법에서,  $i$  강체에 대한 일반좌표가  $\mathbf{q}_i = [\mathbf{r}_i^T \ \boldsymbol{\theta}_i^T]^T$  로, 변분(variation)을 위한 가상변위벡터가  $[\delta\mathbf{r}_i^T \ \delta\boldsymbol{\pi}_i^T]^T$  로 설정되었을 때  $i$  강체와  $j$  강체간 구속조건과 자코비안은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$${}^c\Phi(\mathbf{q}_c) = {}^c\Phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \mathbf{0} \tag{2}$$

$${}^c\Phi_{q_c} = \begin{bmatrix} {}^c\Phi_{r_i} & {}^c\Phi_{\pi_i} & {}^c\Phi_{r_j} & {}^c\Phi_{\pi_j} \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서, 첨자  $c$  는 기존 (conventional) 방식을 의미하며,  $\boldsymbol{\theta}_i$  는 관성좌표계에 대한  $i$  강체 좌표계의 오일러회전각으로  $\mathbf{A}_i$  로 변환가능하다. 또한  $\delta\boldsymbol{\pi}_i \equiv \mathbf{A}_i^T \delta\boldsymbol{\pi}_i$  과  $\mathbf{q}_c = [\mathbf{q}_i^T \ \mathbf{q}_j^T]^T$  가 사용되었다.  $({}^c\Phi_{r_i}^T \lambda)_{r_i}$ ,  $({}^c\Phi_{r_i}^T \lambda)_{\pi_i}$  등을 포함하는  $({}^c\Phi_{q_c}^T \lambda)_{q_c}$  는  $12 \times 12$  행렬이다.

기존방법에서 조인트 구속조건은 강체부착벡터간의 직교조건 (Dot-1 구속조건,  ${}^{d1}\Phi \in \mathbf{R}^1$ ), 강체부착벡터와 강체를 잇는 벡터간의 직교조건 (Dot-2 구속조건,  ${}^{d2}\Phi \in \mathbf{R}^1$ ), 두 점의 일치 조건 (Spherical 구속조건,  ${}^{sph}\Phi \in \mathbf{R}^3$ ), 회전량과 전진변위간의 관계 (Screw 구속조건,  ${}^{scr}\Phi \in \mathbf{R}^1$ ) 등을 표현하는 기본 구속조건들의 조합으로 표현된다.<sup>(7)</sup> 예를 들어, Fig. 1 에 보여지는 실린더 조인트는 다음과 같은 구속조건을 갖는다.

$${}^{c-cyl}\Phi = \begin{bmatrix} {}^{d2}\Phi(\mathbf{f}_i, \mathbf{d}_{ij}) \\ {}^{d2}\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{d}_{ij}) \\ {}^{d1}\Phi(\mathbf{f}_i, \mathbf{h}_j) \\ {}^{d1}\Phi(\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^T \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{g}_i^T \mathbf{d}_{ij} \\ \mathbf{f}_i^T \mathbf{h}_j \\ \mathbf{g}_i^T \mathbf{h}_j \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Table 1 에 Haug<sup>(7)</sup>에 의해 제시된 조인트별 기본 구속조건의 조합이 정리되어 있다.

2.2 기본 구속조건 및 편미분행렬

특정 조인트 구속조건식에 대해 자코비안과 2 계 편미분행렬을 계산하기 위해서는 각각의 기본 구속조건에 대한  $\Phi_q$  과  $(\Phi_q^T \lambda)_q$  를 계산하는 과정이 필요하다. 예를 들어,  ${}^{d2}\Phi(\mathbf{f}_i, \mathbf{d}_{ij})$  에 대한 자코

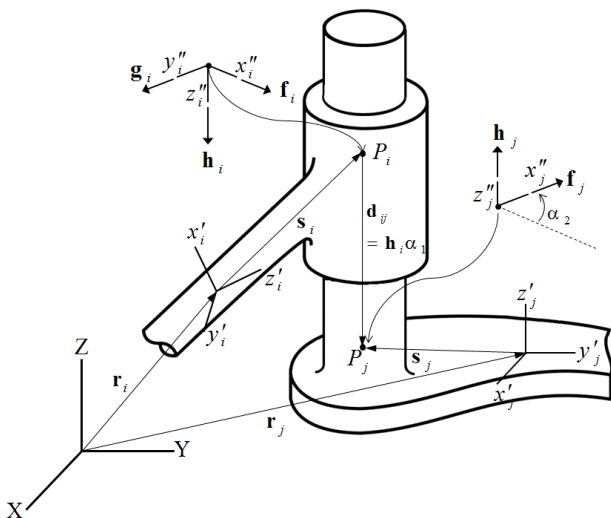


Fig. 1 Kinematic relationship between two bodies connected by a cylindrical joint and the parametric generalized coordinates

**Table 1** Basic constraints used for each type of mechanical joints in the conventional method

Joint Type	DOF	Basic Constraints Used
Revolute	1	1 Spherical + 2 Dot-1
Translational	1	3 Dot-1 + 2 Dot-2
Screw	1	2 Dot-1 + 2 Dot-2 + 1 Screw
Cylindrical	2	2 Dot-1 + 2 Dot-2
Universal	2	1 Spherical + 1 Dot-1
Planar	3	2 Dot-1 + 1 Dot-2
Ball & Socket	3	1 Spherical

**Table 2** Numbers of arithmetic operations required to evaluate the Jacobian and the second partial derivative for each type of conventional basic constraint

Basic Constraint Type	Flops number for $\Phi_q$	Flops number for $(\Phi_q^T \lambda)_q$
Dot-1	84	141
Dot-2	126	258
Spherical	54	78
Screw	144	276

비안은 다음과 같은 변분식을 통해 유도된다.<sup>(7)</sup>

$$\delta^{d^2}\Phi(\mathbf{f}_i, \mathbf{d}_{ij}) = \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{d}_{ij}^T \delta \mathbf{f}_i \quad (5)$$

여기서,  $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}'_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{s}'_i$  (Fig. 1 참조). 식 (5)에서 각 변분항은 다음과 같이 선택된 가상 변위 벡터로 표현된다.

$$\delta \mathbf{d}_{ij} = \delta \mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}'_j \delta \pi'_j - \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{s}}'_i \delta \pi'_i \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{f}_i = -\mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{f}}'_i \delta \pi'_i \quad (7)$$

여기서  $\mathbf{f}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{f}'_i$ . 따라서, 자코비안  ${}^{d^2}\Phi_q$ 는 아래와 같다.

$${}^{d^2}\Phi_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_i'^T \mathbf{A}_i^T, & \mathbf{f}_i'^T (\mathbf{A}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}_i + \tilde{\mathbf{s}}'_i), \\ \mathbf{f}_i'^T \mathbf{A}_i^T, & \mathbf{f}_i'^T \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}'_j \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j$ . 유사한 절차를 거쳐 2 계미분 행렬은 다음이 된다.

$$({}^{d^2}\Phi_q^T \lambda)_q = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{f}}'_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{f}}'_i \mathbf{A}_i^T & \tilde{\mathbf{f}}'_i (\mathbf{A}_i^T \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}_i + \tilde{\mathbf{s}}'_i) & \tilde{\mathbf{f}}'_i \mathbf{A}_i^T & -\tilde{\mathbf{f}}'_i \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}'_j \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{f}}'_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{s}}'_j \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{f}}'_i & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{s}}'_j \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{f}}'_i \mathbf{A}_j \end{bmatrix} \quad (9)$$

${}^{d^2}\Phi_q$  와  $({}^{d^2}\Phi_q^T \lambda)_q$  는 각각 126 과 258 번의 사칙연산이 요구되며, 각 기본 구속조건에서  $\Phi_q$  와  $(\Phi_q^T \lambda)_q$  의 생성을 위한 사칙연산량은 Table 2 에 나타난다.

### 3. 제안방법에서의 조인트 구속조건식

#### 3.1 제안된 조인트 구속조건

Fig. 1 과 같이 조인트를 통해 연결된  $i$  강체와  $j$  강체에서,  $j$  강체의 위치와 자세는 다음과 같다.

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{s}'_i - \mathbf{A}_j \mathbf{s}'_j + \mathbf{A}_i \mathbf{d}'_{ij} \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_i \mathbf{C}_i \mathbf{H}''_{ij} \mathbf{C}_j^T \quad (11)$$

여기서  $\mathbf{d}'_{ij} \equiv \mathbf{A}_i^T \mathbf{d}_{ij}$ . 식 (10)와 (11)에서  $\mathbf{d}'_{ij}$  와  $\mathbf{H}''_{ij}$  는 각각 조인트의 병진과 회전특성에 따라 표현되며 이를 파라메트릭 일반좌표  $\alpha$  로 다음과 같이 표현할 수 있다:  $\mathbf{d}'_{ij} = \mathbf{d}'_{ij}(\alpha)$  그리고  $\mathbf{H}''_{ij} = \mathbf{H}''_{ij}(\alpha)$ . 따라서, 제안하는 방법에서 조인트 구속조건은 직교좌표와 파라메트릭 좌표를 포함하는 혼합형태의 일반좌표 (mixed set of generalized coordinates)  $\mathbf{q}_p = [\mathbf{q}_i^T \quad \mathbf{q}_j^T \quad \alpha^T]^T$  를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$${}^p\Phi(\mathbf{q}_p) = {}^p\Phi(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \alpha) = \mathbf{0} \quad (12)$$

여기서 첨자  $p$  는 제안 (proposed) 방식을 의미하며,  $\alpha$  는 해당 조인트의 자유도와 같은 차원이다. 자코비안 변분을 위한  $i$  강체의 가상 변위벡터가  $\delta \mathbf{Z}_i^T = [\delta \mathbf{r}_i'^T \quad \delta \pi_i'^T]^T$  로 설정되었을 때 (여기서  $\delta \mathbf{r}_i' \equiv \mathbf{A}_i^T \delta \mathbf{r}_i$ ),  $i$  강체와  $j$  강체간 구속조건에 대한 자코비안과 2 계 편미분행렬은 다음과 같다.

$${}^p\Phi_{q_p} = \begin{bmatrix} {}^p\Phi_Z & {}^p\Phi_\alpha \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$({}^p\Phi_{q_p}^T \lambda)_{q_p} = \begin{bmatrix} ({}^p\Phi_Z^T \lambda)_Z & ({}^p\Phi_Z^T \lambda)_\alpha \\ ({}^p\Phi_\alpha^T \lambda)_Z & ({}^p\Phi_\alpha^T \lambda)_\alpha \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서,  ${}^p\Phi_Z \equiv [{}^p\Phi_{r'_i} \quad {}^p\Phi_{\pi'_i} \quad {}^p\Phi_{r'_j} \quad {}^p\Phi_{\pi'_j}]$ . 변분이  $\delta \mathbf{r}_i$  대신  $\delta \mathbf{r}'_i$  로 취해지므로써 추후 자코비안식이 파라메트릭 좌표의 함수로 표현되는 효과가 있다.

제안방법에서 조인트 구속조건은 조인트의 병진 운동특성을 표현하는 3 차원 병진(translation) 구속조건 벡터  ${}^{trn}\Phi$  와 회전운동특성을 표현하는 3 차원 회전(rotation) 구속조건 벡터  ${}^{rot}\Phi$  로 구성되어,

**Table 3** The translational and rotational constraints in the proposed method depending on the degrees of freedom and the examples of displacement vectors and relative orientations associated with the parametric coordinates

Constraint	$\mathbf{d}'_{ij}$ or $\mathbf{H}''_{ij}$	Example
${}^{tm0}\Phi$	constant	$\mathbf{d}'_{ij} = \mathbf{0}$
${}^{tm1}\Phi$	$\mathbf{d}'_{ij}(\alpha)$	$\mathbf{d}'_{ij} = \mathbf{h}'_i\alpha_1$
${}^{tm2}\Phi$	$\mathbf{d}'_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$	$\mathbf{d}'_{ij} = \mathbf{f}'_i\alpha_1 + \mathbf{g}'_i\alpha_2$
${}^{tm3}\Phi$	$\mathbf{d}'_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	$\mathbf{d}'_{ij} = \mathbf{f}'_i\alpha_1 + \mathbf{g}'_i\alpha_2 + \mathbf{h}'_i\alpha_3$
${}^{rot0}\Phi$	constant	$\mathbf{H}''_{ij} = \mathbf{I}$
${}^{rot1}\Phi$	$\mathbf{H}''_{ij}(\alpha)$	$\mathbf{H}''_{ij} = \mathbf{R}_z(\alpha)$
${}^{rot2}\Phi$	$\mathbf{H}''_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$	$\mathbf{H}''_{ij} = \mathbf{R}_z(\alpha_1)\mathbf{R}_x(\alpha_2)$
${}^{rot3}\Phi$	$\mathbf{H}''_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$	$\mathbf{H}''_{ij} = \mathbf{R}_z(\alpha_1)\mathbf{R}_y(\alpha_2)\mathbf{R}_x(\alpha_3)$

**Table 4** Examples of rotational constraints in the proposed method

Type	Constraint Equation Example
${}^{rot0}\Phi$	$[\mathbf{g}_i^T \mathbf{h}_j, \mathbf{h}_i^T \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i^T \mathbf{g}_j]^T$
${}^{rot1}\Phi$	$[\mathbf{f}_i^T \mathbf{h}_j, \mathbf{g}_i^T \mathbf{h}_j, \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j - c\alpha]^T$
${}^{rot2}\Phi$	$[\mathbf{h}_i^T \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j - c\alpha_1, \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_j - c\alpha_2]^T$
${}^{rot3}\Phi$	$[\mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j - c\alpha_1 c\alpha_2, \mathbf{h}_i^T \mathbf{f}_j + s\alpha_2, \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_j - c\alpha_2 c\alpha_3]^T$

항상 6 개의 구속조건식을 갖는다. 이때  ${}^{tm}\Phi$  와  ${}^{rot}\Phi$  는 각각 조인트가 갖는 병진관련 자유도 및 회전관련 자유도에 따라 Table 3 과 같이 나누어진 다(회전구속조건에 대한 예는 Table 4 참조). 예를 들어 병진 1 자유도와 회전 1 자유도를 갖는 실린더 조인트에서  $\mathbf{d}'_{ij}(\alpha)$  와  $\mathbf{H}''_{ij}(\alpha)$  는 다음과 같이 표현되어 두 개의 파라메트릭 좌표를 갖는다(즉,  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ , Fig. 1 참조).

$$\mathbf{d}'_{ij} = \mathbf{h}'_i\alpha_1, \quad \mathbf{H}''_{ij} = \mathbf{R}_z(\alpha_2) \quad (15)$$

여기서,  $\mathbf{R}_z(\alpha_2)$  는 z-축에 대한  $\alpha_2$  rad 회전을 나타내는 회전행렬. 따라서 실린더 조인트의 구속조건식은 다음과 같다.

$${}^{p-cyl}\Phi = [{}^{tm1}\Phi^T \quad {}^{rot1}\Phi^T]^T \quad (16)$$

$${}^{tm1}\Phi = \mathbf{A}_i^T (\mathbf{r}_j + \mathbf{A}_j \mathbf{s}'_j - \mathbf{r}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{s}'_i - \mathbf{A}_i \mathbf{h}'_i \alpha_1) = \mathbf{0} \quad (17)$$

**Table 5** Combinations of the translational and rotational constraints for each joint in the proposed method

Joint Type	DOF (translational + rotational)	Basic constraints used
Revolute	1 (0+1)	${}^{tm0}\Phi$ and ${}^{rot1}\Phi$
Translational	1 (1+0)	${}^{tm1}\Phi$ and ${}^{rot0}\Phi$
Screw	1 <sup>§</sup>	${}^{tm1}\Phi$ and ${}^{rot1}\Phi$
Cylindrical	2 (1+1)	${}^{tm1}\Phi$ and ${}^{rot1}\Phi$
Universal	2 (0+2)	${}^{tm0}\Phi$ and ${}^{rot2}\Phi$
Planar	3 (2+0)	${}^{tm2}\Phi$ and ${}^{rot0}\Phi$
Ball & Socket	3 (0+3)	${}^{tm0}\Phi$ and ${}^{rot3}\Phi$

<sup>§</sup> The translation of a screw joint is dependent on its rotation.

$${}^{rot1}\Phi = [\mathbf{f}_i^T \mathbf{h}_j, \mathbf{g}_i^T \mathbf{h}_j, \mathbf{f}_i^T \mathbf{f}_j - c\alpha_2]^T = \mathbf{0} \quad (18)$$

각 조인트별 병진 및 회전 구속조건 조합은 Table 5 에 정리되어 있다.

### 3.2 병진 구속조건식

지금부터 제안하는 방법에서 파라메트릭 좌표의 도입을 통해 구속조건 편미분행렬들이 간략화되는 과정을 실린더조인트를 예로 하여 설명한다. 첫째, 병진구속조건에 대한 자코비안은 식 (17)에 대한 변분을 취하므로써 아래와 같이 구해진다(식 (6) 참조).

$$\delta {}^{tm1}\Phi = \mathbf{A}_i^T \{ \mathbf{A}_j \delta \mathbf{r}'_j + \mathbf{A}_j \tilde{\mathbf{s}}'_j \delta \pi'_j - \mathbf{A}_i \delta \mathbf{r}'_i - \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{s}}'_i \delta \pi'_i - \mathbf{A}_i \tilde{\mathbf{h}}'_i \alpha_1 \delta \pi'_i - \mathbf{A}_i \mathbf{h}'_i \delta \alpha_1 \} \quad (19)$$

따라서,  ${}^{tm1}\Phi$  의 직교좌표 및 파라메트릭 좌표에 대한 자코비안은 다음과 같다.

$${}^{tm1}\Phi_{\mathbf{z}} = [-\mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{s}}'_i + \tilde{\mathbf{h}}'_i \alpha_1 \quad \mathbf{A}_{ij} \quad -\mathbf{A}_{ij} \tilde{\mathbf{s}}'_j] \quad (20)$$

$${}^{tm1}\Phi_{\alpha} = [{}^{tm1}\Phi_{\alpha_1} \quad {}^{tm1}\Phi_{\alpha_2}] = [-\mathbf{h}'_i \quad \mathbf{0}] \quad (21)$$

식 (11)에 따라  $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}(\alpha)$  이 되므로  ${}^{tm1}\Phi_{\mathbf{z}}$  는 파라메트릭 좌표  $\alpha$  만의 함수가 된다. 또한,  ${}^{tm1}\Phi_{\alpha}$  는 상수이다.  ${}^{tm1}\Phi_{\mathbf{z}}$  가  $\alpha$  만의 함수라는 점과  ${}^{tm1}\Phi_{\alpha}$  가 상수라는 점은 제안하는 방법의 모든 병진구속조건에서 성립되므로 아래의 관계를 얻을 수 있다.

$$({}^{tm}\Phi_{\mathbf{z}}^T \lambda)_{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (22)$$

**Table 6** Jacobians of the translational and rotational constraints with respect to the Cartesian coordinates for each type of joint in the proposed method

Joint Type	${}^{trn}\Phi_Z$	${}^{rot}\Phi_Z$
Revolute	Eq. (26)	Eq. (32)
Translational	Eq. (20) with $\mathbf{A}_{ij} = const.$	Eq. (38)
Screw <sup>§</sup>	Eq. (20) with $p(\alpha + 2n\pi + \alpha_0)$ instead of $\alpha$	Eq. (32)
Cylindrical	Eq. (20)	Eq. (32)
Universal	Eq. (26)	Omitted (complex)
Planar	Eq. (20) with $\tilde{\mathbf{f}}'_i\alpha_1 + \tilde{\mathbf{g}}'_i\alpha_2$ instead of $\tilde{\mathbf{h}}'_i\alpha$	Eq. (32)
Ball & Socket	Eq. (26)	Omitted (complex)

<sup>§</sup>  $p$ : pitch,  $n$ : number of revolutions,  $\alpha_0$ : initial angle.

$$({}^{trn}\Phi_a^T\lambda)_Z = \mathbf{0} \quad (23)$$

$$({}^{trn}\Phi_a^T\lambda)_a = \mathbf{0} \quad (24)$$

즉, 병진구속조건에 대해 식 (14)에서  $\mathbf{0}$  이 아닌 성분은  $({}^{trn}\Phi_Z^T\lambda)_a$  뿐이며, 식 (20)에 따라 실린더조인트에 대한  $({}^{trn}\Phi_Z^T\lambda)_a$  는 아래와 같다.

$$({}^{trn1}\Phi_Z^T\lambda)_a = [({}^{trn1}\Phi_Z^T\lambda)_{a_1} \quad ({}^{trn1}\Phi_Z^T\lambda)_{a_2}]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{h}}'_i\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^T\lambda \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{s}}'_j\mathbf{D}^T\lambda \end{bmatrix} \quad (25)$$

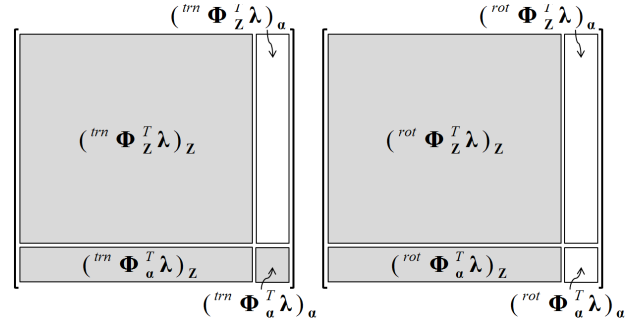
여기서  $\mathbf{D} = \partial\mathbf{A}_{ij} / \partial\alpha_2$ . 한편,  ${}^{trn0}\Phi$  의 경우 병진에 관련된 파라메트릭 좌표가 없으므로, 식 (20)에  $\alpha = 0$  을 대입하므로써 다음과 같은 자코비안을 구할 수 있다.

$${}^{trn0}\Phi_Z = [-\mathbf{I} \quad \tilde{\mathbf{s}}'_i \quad \mathbf{A}_{ij} \quad -\mathbf{A}_{ij}\tilde{\mathbf{s}}'_j] \quad (26)$$

### 3.3 회전 구속조건식

둘째, 회전구속조건에 대한 자코비안을 구하기 위해 식 (18)에 대해 변분을 취하면 다음과 같다 (식 (5) 참조).

$$\delta{}^{rot1}\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_j^T\delta\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^T\delta\mathbf{h}_j \\ \mathbf{h}_j^T\delta\mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i^T\delta\mathbf{h}_j \\ \mathbf{f}_j^T\delta\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_i^T\delta\mathbf{f}_j + s\alpha_2\delta\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$



**Fig. 2** Zero sub-matrices (*shaded sections*) of the second derivative of the translational (*left*) and rotational (*right*) constraints in the proposed method

식 (27)은  $\delta\mathbf{f}_i = \delta\mathbf{A}_i\mathbf{f}'_i = -\mathbf{A}_i\tilde{\mathbf{f}}'_i\delta\pi'_i$  와  $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{C}'_i\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_j{}^T$  의 관계를 이용하여 다음으로 전개된다.

$$\delta{}^{rot1}\Phi = \begin{bmatrix} -\mathbf{h}_j^T\mathbf{C}'_j\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_i{}^T\tilde{\mathbf{f}}'_i\delta\pi'_i - \mathbf{f}_i^T\mathbf{C}'_i\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_j{}^T\tilde{\mathbf{h}}'_j\delta\pi'_j \\ -\mathbf{h}_j^T\mathbf{C}'_j\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_i{}^T\tilde{\mathbf{g}}'_i\delta\pi'_i - \mathbf{g}_i^T\mathbf{C}'_i\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_j{}^T\tilde{\mathbf{h}}'_j\delta\pi'_j \\ -\mathbf{f}_j^T\mathbf{C}'_j\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_i{}^T\tilde{\mathbf{f}}'_i\delta\pi'_i - \mathbf{f}_i^T\mathbf{C}'_i\mathbf{H}''_{ij}\mathbf{C}'_j{}^T\tilde{\mathbf{f}}'_j\delta\pi'_j + s\alpha_2\delta\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

식 (28)에서  $\mathbf{C}'_i$  는  $[\mathbf{f}'_i \quad \mathbf{g}'_i \quad \mathbf{h}'_i]$ 이며, 단위 직교벡터  $\mathbf{f}'_i$ ,  $\mathbf{g}'_i$ ,  $\mathbf{h}'_i$  간의 내적관계 (즉,  $\mathbf{f}'_i{}^T\mathbf{g}'_i = \mathbf{f}'_i{}^T\mathbf{h}'_i = 0$  및  $\mathbf{f}'_i{}^T\mathbf{f}'_i = 1$  등) 및 외적 관계 (즉,  $\tilde{\mathbf{f}}'_i\mathbf{g}'_i = \mathbf{h}'_i$  및  $\tilde{\mathbf{f}}'_i\mathbf{f}'_i = \mathbf{0}$  등)를 이용하여 다음 관계식들을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{C}'_i{}^T\mathbf{f}'_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}'_i{}^T\mathbf{g}'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}'_i{}^T\mathbf{h}'_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{C}'_i{}^T\tilde{\mathbf{f}}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{h}'_i{}^T \\ \mathbf{g}'_i{}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}'_i{}^T\tilde{\mathbf{g}}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{h}'_i{}^T \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{f}'_i{}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}'_i{}^T\tilde{\mathbf{h}}'_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}'_i{}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}'_i{}^T \end{bmatrix} \quad (30)$$

식 (29)와 (30)을 식 (28)에 대입하므로써 아래와 같이 간략화된 식이 도출된다.

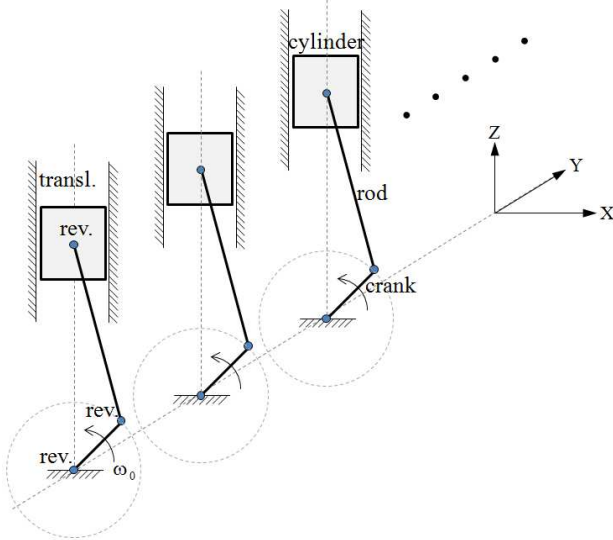
$$\delta{}^{rot1}\Phi = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}'_i{}^T\delta\pi'_i + (s\alpha_2\mathbf{f}'_j{}^T + c\alpha_2\mathbf{g}'_j{}^T)\delta\pi'_j \\ \mathbf{f}'_i{}^T\delta\pi'_i + (c\alpha_2\mathbf{f}'_j{}^T + s\alpha_2\mathbf{g}'_j{}^T)\delta\pi'_j \\ -s\alpha_2\mathbf{h}'_i{}^T\delta\pi'_i - s\alpha_2\mathbf{h}'_j{}^T\delta\pi'_j + s\alpha_2\delta\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

식 (31)에 따라 실린더 조인트의 회전구속조건에 대한 자코비안은 아래와 같이 구해진다.

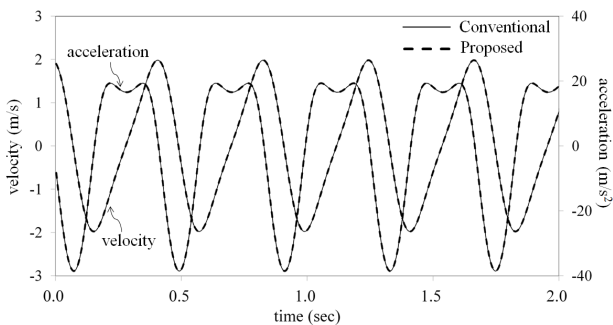
$${}^{rot1}\Phi_Z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{g}'_i{}^T & \mathbf{0} & s\alpha_2\mathbf{f}'_j{}^T + c\alpha_2\mathbf{g}'_j{}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}'_i{}^T & \mathbf{0} & c\alpha_2\mathbf{f}'_j{}^T + s\alpha_2\mathbf{g}'_j{}^T \\ \mathbf{0} & -s\alpha_2\mathbf{h}'_i{}^T & \mathbf{0} & -s\alpha_2\mathbf{h}'_j{}^T \end{bmatrix} \quad (32)$$

**Table 7** Comparison of the numbers of arithmetic operations between the conventional and proposed methods

Joint Type	Conventional ${}^c\Phi_{q_c}$ , $({}^c\Phi_{q_c}^T\lambda)_{q_c}$	Proposed ${}^p\Phi_{q_p}$ , $({}^p\Phi_{q_p}^T\lambda)_{q_p}$	Rate (%)
Revolute	222, 360	51, 45	23.0, 12.5
Translational	504, 939	33, 9	6.5, 1.0
Screw	564, 1074	60, 54	10.6, 5.0
Cylindrical	420, 798	57, 54	13.6, 6.8
Universal	138, 219	73, 114	52.9, 52.1
Planar	294, 540	75, 63	25.5, 11.7
Ball & Socket	54, 78	101, 386	187.0, 494.4



**Fig. 3** Slider-crank mechanism in an inline engine



**Fig. 4** Simulation results: velocity and acceleration of the cylinder

$${}^{rot1}\Phi_a = [{}^{rot1}\Phi_{a_1} \quad {}^{rot1}\Phi_{a_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & s\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

식 (32)와 (33)은 모두 파라메트릭 좌표  $\mathbf{a}$  만의 함수임에 주목하자. 이는 제안하는 방법의 모든 회전구속조건에서 성립되므로 아래의 관계를 얻을 수 있다.

$$({}^{rot}\Phi_Z^T\lambda)_Z = \mathbf{0} \quad (34)$$

$$({}^{rot}\Phi_a^T\lambda)_Z = \mathbf{0} \quad (35)$$

즉, 회전구속조건에 대해 식 (14)에서  $\mathbf{0}$  이 아닌 성분은  $({}^{rot}\Phi_Z^T\lambda)_a$  와  $({}^{rot}\Phi_a^T\lambda)_a$  뿐이며, 식 (32)에 따라 실린더 조인트에 대한 식은 아래와 같다.

$$({}^{rot1}\Phi_Z^T\lambda)_a = [({}^{rot1}\Phi_Z^T\lambda)_{a_1} \quad ({}^{rot1}\Phi_Z^T\lambda)_{a_2}]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\lambda_3 c\alpha_2 \mathbf{h}'_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\lambda_1 c\alpha_2 + \lambda_2 s\alpha_2)\mathbf{f}'_j - (\lambda_1 s\alpha_2 - \lambda_2 c\alpha_2)\mathbf{g}'_j - \lambda_3 c\alpha_2 \mathbf{h}'_j \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$({}^{rot1}\Phi_a^T\lambda)_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 c\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서,  $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T$ . 한편,  ${}^{rot0}\Phi$  의 경우 회전에 관련된 파라메트릭 좌표가 없으므로, Table 2의  ${}^{rot0}\Phi$  을 설정하는 경우 다음과 같은 상수 자코비안을 구할 수 있다.

$${}^{rot0}\Phi_Z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C'_i & \mathbf{0} & -C'^T_j \end{bmatrix} \quad (38)$$

조인트별  ${}^{in}\Phi_Z$  및  ${}^{rot}\Phi_Z$  를 Table 6 에서 볼 수 있다. 최종적으로 파라메트릭 좌표를 도입하므로써 Fig. 2 에서 확인할 수 있듯이  $({}^{in}\Phi_q^T\lambda)_{q_p}$  와  $({}^{rot}\Phi_q^T\lambda)_{q_p}$  에서 대부분의 영역이  $\mathbf{0}$  값을 갖게 된다.

#### 4. 수치 예제

제안된 방법의 계산효율성을 확인하기 위하여 기존방법과 제안된 방법에서 자코비안 및 2 계 편미분행렬을 생성하기 위한 사칙연산량이 비교되었다. Table 7 에서 볼 수 있듯이, 3 자유도를 갖는 볼 조인트의 경우는 제안된 방법이 오히려 계산량이 많아 효과적이지 않으나, 1 자유도를 갖는 핀, 병진, 나사 조인트에서는 기존방법보다 계산량이 매우 적은 것을 확인할 수 있었다. 여기서, 유니버설

**Table 8** Comparison of the computation times (per second) between the conventional and proposed methods \* 2.8 GHz Intel Core i7 processor was used for the simulations

Number of sets	Conventional (sec)	Proposed (sec)
1 set	0.09	0.09
5 sets	0.42	0.46
20 sets	1.70	1.94

조인트와 볼조인트는 회전에 대해 각각 2 자유도와 3 자유도를 갖는데 이런 경우,  $\mathbf{A}_{ij}$ 의  $\alpha$ 에 대한 편미분 계산량이 증가하여 전체 구속조건들의 편미분행렬 계산량을 증가시켰다.

제안된 방법의 검증을 위하여 Fig. 3에서 보이는 직렬엔진 실린더-크랭크 메카니즘이 암시적 적분기법인 BDF (backward difference formula)를 이용하여 해석되었다.<sup>(8)</sup> 이는 가장 많이 사용되는 핀조인트와 병진조인트를 검증대상으로 하기 위함이며, 1 세트의 실린더-크랭크 메카니즘은 3 개의 강체와 4 개의 조인트로 구성되었다. 크랭크를 15rad/sec의 초기 속도로 회전시켰을 때의 결과를 비교였고, Fig. 4에서 보듯이 제안된 방법은 기존방법과 동일한 결과를 생성하고 있다.

또한, 제안하는 방법에서의 파라메트릭 좌표 추가에 따른 해석시간에의 영향성을 확인하기 위하여 1, 5, 그리고 20 세트 각각에서의 해석시간을 비교하였다. 시스템의 크기가 커짐에 따라 제안된 방법의 해석시간이, 기존방법에 비해 다소 증가하는 것을 Table 8에서 확인할 수 있었다.

## 5. 결론

저자유도 조인트에 대한 기구학적 구속조건식을 체계적으로 공식화하기 위해, 본 논문은 구속조건식을 표현하는 새로운 접근방법으로 파라메트릭 일반좌표의 이용을 제안한다. 제안된 방법에서는 직교좌표와 파라메트릭 일반좌표를 혼합하여 조인트 구속조건을 생성하는데, 이는 자코비안과 같은 구속조건 편미분행렬이 매우 간단하게 표현되도록 하므로써 공식의 복잡성을 감소시켰다. 모든 조인트 구속조건은 3 개의 병진과 3 개의 회전 구속조건으로 표현되어 체계적인 공식화와 프로그램구현이 용이하며, 별도의 변환과정없이 직교좌표와 파라메트릭좌표를 동시에 계산할 수 있는 장점이 있다. 제안된 방법은 암시적 적분기를 바탕으로 강

체시스템에서 검증되었다. 제안된 방법은 일반좌표수를 증가시켜 효율적 측면에서는 약간 떨어지나, 구속조건관련 편미분행렬의 많은 부분을 0으로 만들어 프로그램의 개발을 용이 하게 하고 상대좌표를 구속 하거나 힘을 가할 때 상대좌표 운동방정식에 직접 적용할 수 있는 장점을 갖는다.

## 후 기

본 연구는 국방과학연구소 국방생존성기술 특화연구센터의 연구비 (UD1200190D)를 지원받아 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Sugiyama, H., Escalona, J. L. and Shabana, A. A., 2003, "Formulation of Three-Dimensional Joint Constraints Using the Absolute Nodal Coordinates," *Nonlinear Dyn.*, Vol. 31, pp. 167–195.
- (2) Uchida, T. and McPhee, J. 2011, "Triangularizing Kinematic Constraint Equations Using Gröbner Bases for Real-Time Dynamic Simulation," *Multibody Sys. Dyn.*, Vol. 25, pp. 335–356.
- (3) Yang, K. D., Lee, S. H. and Bae, D. S., 1995, "Use of Joint Geometric Conditions in Formulating Cartesian Constraint Equations," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 23, No. 3, pp. 395–417.
- (4) Bayo, E., García de Jalón, J., Avello, A. and Cuadrado, J., 1991, "An Efficient Computational Method for Real Time Multibody Dynamic Simulation in Fully Cartesian Coordinates," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 92, pp. 377–395.
- (5) Nikravesh, P. E. and Gim, G., 1993, "Systematic Construction of the Equations of Motion for Multibody Systems Containing Closed Kinematic Loops," *J. Mech. Des.*, Vol. 115, No. 6, pp. 143–149.
- (6) Bae, D. S., Lee, C. H. and Lee, S. H., 2008, "An Efficient Dynamics Analysis Using a Parametric Generalized Coordinate," *KSME 08DC018*, pp. 69–74.
- (7) Haug, E. J., 1989, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems: Volume I. Basic Methods*, Allyn and Bacon, Needham Heights, Massachusetts.
- (8) Yen, J. 1993, "Constrained Equations of Motion in Multibody Dynamics as ODES on Manifolds," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 30, No. 2, pp. 553–568.
- (9) Duff, I. S., Erisman, A. M. and Reid, J. K., 1986, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Clarendon Press, Oxford.