

MR 댐퍼가 적용된 철도차량 이차현가장치의 H_∞ 제어

H_∞ Control of Secondary Suspension in Railway Vehicles Equipped with a MR Damper

신유정¹, 유원희^{1,✉}, 허현무¹, 박준혁¹
Yu Jeong Shin¹, Won Hee You^{1,✉}, Hyun Moo Hur¹, and Joon Hyuk Park¹

¹ 한국철도기술연구원 고속철도연구본부 (High-Speed Railroad System Research Center, Korea Railroad Research Institute)
✉ Corresponding author: whyou@krri.re.kr, Tel: +82-31-460-5670

Manuscript received: 2013.5.3 / Accepted: 2013.9.5

In general, lateral ride comfort of railway vehicle is mainly influenced by a secondary suspension placed between the bogie and carbody. Higher operating speeds of train results in increased vibration of carbody, which has a negative impact related to the ride comfort. To solve this problem, researches to replace the conventional passive suspension with (semi)active technology in the secondary suspension of a railway vehicle have been carried out. The semi-active suspension using the magneto-rheological damper is relatively simpler system and has advantage in maintenance compared to the hydraulic type semi-active damper. This study was performed to reduce lateral vibration acceleration of carbody related to ride comfort of railway vehicles with a semi-active suspension system. The numerical analysis was conducted by replacing passive lateral damper with semi-active MR damper, and robust control with the MR damper was applied to the 1/5 scaled railway vehicle model.

Key Words: H_∞ Control (H_∞ 제어), Railway Vehicle (철도차량), Semi-active and Active Suspension Control (반능동 및 능동현가장치 제어)

기호설명

m_{wi} = Mass of wheelset ($i=1\sim 2$)
 I_{wi} = Inertia of wheelset ($i=1\sim 2$)
 m_b = Mass of bogie
 I_b = Inertia of bogie
 m_c = Mass of carbody
 I_c = Inertia of carbody
 W_a = Load per wheelset
 r_0 = Wheel rolling radius
 k_{px} = Primary longitudinal stiffness
 k_{py} = Primary lateral stiffness
 k_{pz} = Primary vertical stiffness
 k_{sx} = Secondary longitudinal stiffness

k_{sy} = Secondary lateral stiffness
 k_{sz} = Secondary vertical stiffness
 c_{px} = Primary longitudinal damping
 c_{py} = Primary lateral damping
 c_{pz} = Primary vertical damping
 c_{sx} = Secondary longitudinal damping
 c_{sy} = Secondary lateral damping
 c_{sz} = Secondary vertical damping
 a = Half of wheelset contact distance
 V = Velocity
 F_x, F_y, F_{sp} = Creep force and moment
 $f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{33}$ = Kalker's creep coefficient
 ξ_x, ξ_y, ξ_{sp} = Creepage of contact patch on wheel/rail
 C_{ij} = Kalker's creepage and spin coefficients

- L_{x1} = Half of bogie wheelbase
- L_{x2} = Half of distance between bogie centers
- L_{y1} = Half of lateral distance between primary suspensions
- L_{y2} = Half of lateral distance between secondary suspensions
- F_{MR} = Force of MR damper
- h_1 = Vertical distance between bogie frame center of gravity and axle center of gravity
- h_2 = Vertical distance between bogie frame center of gravity and secondary suspension center of gravity
- h_3 = Vertical distance between carbody frame center of gravity and secondary suspension center of gravity

1. 서론

철도차량이 고속화되면서 일정한 크기의 감쇠 특성을 지닌 기존의 수동형 현가장치를 이용한 진동제어는 성능 한계를 가지게 된다. 이러한 한계점을 극복하기 위해 우리나라를 비롯한 여러 철도 선진국에서는 반능동 및 능동형 현가장치에 대한 연구가 오래전부터 진행되어 왔다.¹⁻³ 철도차량(반)능동 현가장치에 적용된 제어기법은 수치해석적으로 다양한 제어기법들이 적용되었으나 실용화된 것은 스카이훅(skyhook), on-off, H_∞ 만이 채택되고 있다.^{4,7} 자동차분야에서는 좀 더 다양하게 퍼지(fuzzy)나 슬라이딩 모드 제어 등이 실제 차량에서 시험을 통해 그 타당성을 검토한 바 있으나 상용화 차량에 적용된 제어 기법은 철도차량과 비슷한 수준이다.^{8,9} Nagai는 반능동 현가장치가 영업 차량에 적용되어 실용화 단계에 있을 무렵 17자유도의 철도차량 모델에 능동과 반능동 현가장치를 고려하여 수치해석을 수행하였다. 이때 설계된 제어기는 복잡해지는 것을 피하기 위해 차체의 횡방향과 롤방향 운동만을 고려한 저차원 모델로, 제어기법은 LQR, H_∞ 제어를 적용하였다. 해석 결과 LQR보다 H_∞ 제어가 제어기의 강건성(robustness)면에서 우수하고, 반능동의 경우 감쇠계수의 전환으로 인해 4Hz 부근의 주파수 성분이 악화되며, 반능동보다는 능동제어가 차체 진동 가속도의 저감효과가 현저하게 나타남을 보였다.¹⁰ Hirata와 Sasaki는 현대 제어 이론의 적용 사례로 H_∞ 제어를 통한 능동현가장치의 개발에 관련된 경험을 바탕으로 제어의 실용화에 대해 기술하였다. 기존의 실차 시험에서는 고전제어를 적용하였으며, 1990년대 이

후 다시 철도차량 개발이 활발해지면서 차세대 고속 신간선 시험 차량과 기존의 시험차량에 대해 처음으로 H_∞ 제어가 적용되었다. 실차시험에 앞서 full scale의 시험 장치에서 오랫동안 제어기 설계에 대해 튜닝 및 검증이 이루어졌으며, 이후 차세대 고속 신간선에 투입하기 위해 연구개발된 시험차량(WIN 350)에 적용하여 시험을 수행하였다. 그 결과 궤도로부터 가진되는 1.5Hz 부근의 진동과 터널 내에서의 3Hz 부근의 공력 외란이 서로 전혀 다른 양상을 보여 어느 정도 절충할 수는 있지만 각 외란에 대하여 최적화 했을 경우의 결과에는 미치지 못하므로 보다 시행착오에 의한 튜닝에 의존해야하는 부분이 크다는 결론을 내렸다. 아울러, 이후 양산 모델인 철도차량(series 500)의 실차시험 결과는 요방향 모드가 기존의 시험차량(WIN 350)과 비교하여 약간 고주파인 1.9Hz 로 나타나 H_∞ 의 가중함수를 변경하고 일년에 걸쳐 주행시험을 실시하였다. 시험 결과 승차감에 큰 영향을 미치는 1~3Hz 진동 성분은 크게 저감된 반면 0.8Hz와 4~5Hz 부근에서는 진동이 약간 증가하는 것을 확인하였다. 이러한 제어기 설계를 실시하기 위해서는 매우 미묘한 조정이 요구되며, 주행 시험을 반복 실시하여 검토할 필요가 있다고 기술하였다.^{11,12} 이와 같이 철도차량에 (반)능동현가장치의 제어성능을 높이고자 제어기 설계에 대한 연구가 이뤄지고 있지만 체계적인 연구내용은 알려지지 않고 있다.

따라서 본 논문에서는 철도차량에는 아직 적용 사례가 없는 반능동 현가장치인 MR damper를 장착하여 H_∞ 제어로 차체의 진동을 제어하고자 한다. 그리고 H_∞ 제어 설계 시 두 가지 가중함수를 고려하여 능동제어를 수행하고, MR 댐퍼의 동적특성이 적용된 반능동 제어 결과와 비교하여 제어성능을 알아보고자 한다.

2. 철도차량 모델링 해석

2.1 철도차량의 동적 모델

철도차량은 동역학적인 관점에서 윤축, 대차, 차체가 일차 및 이차 현가장치에 의해 연결된 강체로 볼 수 있으며, 각 강체의 자유도는 3개의 병진운동과 3개의 회전운동을 갖는다. 본 연구에서는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 반차체 차량 모델을 고려하였다. 통상 철도차량의 (반)능동 이차현가장치에 대한 H_∞ 제어기는 설계할 때 대차와 차체만

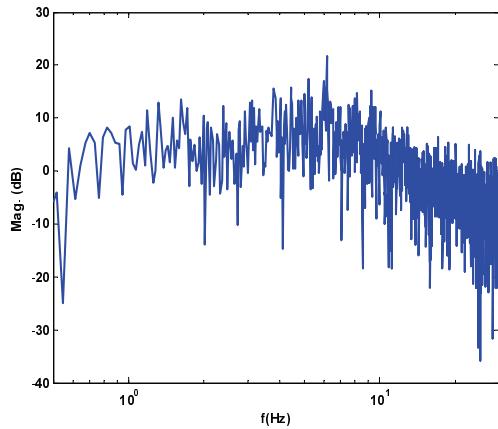


Fig. 4 Frequency response characteristic of disturbance

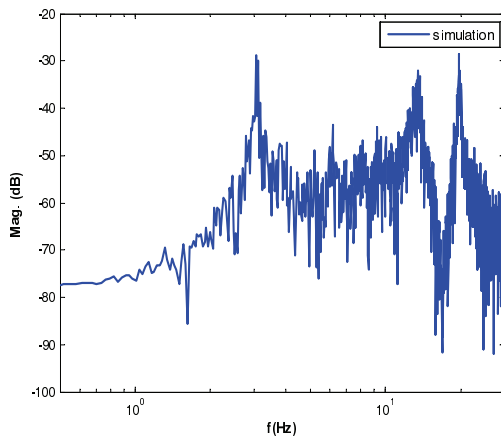


Fig. 5 Simulation result of bogie acceleration (in frequency domain)

고, 차륜/레일 접촉은 선형조건을 고려하여 제어 대상인 차체의 요방향 진동에 영향을 미치는 인자와 고유진동수 확인하고자 한다.

20Hz 부근에서 1/5 축소 모델에서 불안정한 영점(zero)이 관찰되는 것이 특이한 점이긴 하지만, 1/5 축소 모델과 실물크기의 모델 모두 같은 주파수에서 공진 특성을 가진다. 이러한 결과로부터 1/5 축소 철도차량의 동역학 모델은 실물 크기의 철도차량의 동적특성을 충분히 재현하고 있으므로 반능동 현가장치를 적용한 차체의 요방향 진동 제어에 대한 연구를 수행함에 있어 적절한 것으로 판단된다.

그 다음으로 Fig. 4와 같은 주파수 특성을 지닌 레일의 횡방향 변위를 윤축의 외란으로 적용하고

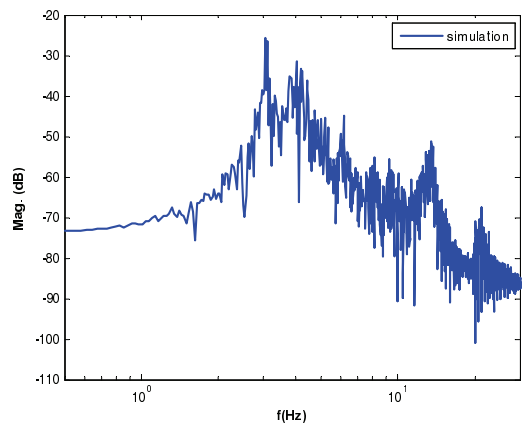


Fig. 6 Simulation result of carbody acceleration (in frequency domain)

반차체 차량모델의 동특성 해석을 수행하였다. Fig. 5는 대차의 횡방향 진동가속도에 대한 주파수 응답 특성을 나타낸 것으로 약 3Hz, 12Hz, 20Hz 부근의 특성이 확인된다.

Fig. 6은 차체의 진동가속도에 대한 해석 결과로 시스템 전달함수에서 주파수 응답 특성을 해석한 결과 3Hz, 4Hz, 12Hz, 20Hz 부근에서 공진모드의 특징이 나타났으며 3Hz 부근의 주파수 성분이 가장 크게 나타났다. 이는 궤도 불규칙도 외란에 대한 시스템 전달함수의 동적특성이 잘 나타나는 것을 확인할 수 있다.

3. 차체 진동 제어

3.1 MR damper 모델링

현재 철도차량에 적용된 반능동 현가장치는 유압을 이용한 가변 오리피스 형태인 장치가 대부분이다. MR damper는 가변 댐퍼의 오리피스 갭을 변화시키는 기계적 밸브가 필요 없는 방법이다. MR damper의 작동원리는 전자석 코일에 전류를 인가하면 하우징과 피스톤 사이의 갭 주변에 자기장을 형성되면서 MR 유체의 점성을 변화시켜 제어하는 장치이다. MR damper를 이용한 반능동 현가장치는 유압식 반능동 현가장치에 비해 설계가 단순하고, 능동형 현가장치에 비해서 장치가 덜 복잡하고 외부 전원을 많이 필요로 하지 않는다는 장점이 있다. 승차감 향상을 위한 제어를 수행하기 위해 축소 철도차량의 대차와 차체 사이에 장착할 반능동 현가장치로 축소형 MR damper를 개발하고 시험을

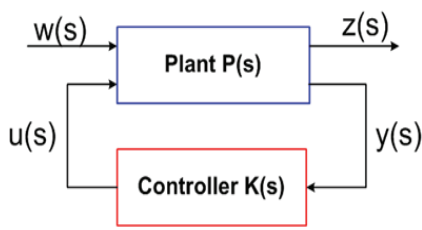


Fig. 7 Generalized H infinity control system

통해 성능을 확인한 바 있다. 그리고 성능 시험 결과로 댐퍼 스트로크의 속도와 하중과의 상관관계를 알아보았으며, 성능시험 결과를 각각의 시험 조건(전류 변화)마다 estimation하여 식(5)와 같은 추정식으로 나타낼 수 있다.¹⁵

$$F_d = 148.2 - 296.4 / (1 + (\exp(vel) / 3.3046)) \tag{5}$$

$$* 116.845 * (i_{mr} / 142.2482)$$

3.2 H_∞ 제어기

H_∞ 제어기는 Fig. 7과 같이 설계 시 제어할 대상 모델의 자유도 수와 가중함수가 포함된 확대 상태방정식으로 표현되기 때문에 자유도 수가 많을수록 제어기의 차수는 더욱 증가하게 된다. 그래서 대부분 차체의 횡방향, 요방향, 롤방향에 대한 3자유도 모델이나 대차의 횡방향 운동을 포함하여 설계하는 경우가 대부분이다. 그러나 이러한 모델은 실차와의 모델링 오차가 더욱 커져 사전에 수치해석적으로 제어기를 설계하더라도 실제 차량에 적용하기 위해서는 많은 튜닝 시간이 요구된다.

앞 절에서 윤축의 가진에 대한 응답특성이 차체의 요방향 응답특성에 미치는 영향에 대해 확인하였으며, 공통적으로 나타나는 공진주파수를 확인한 결과 본 논문에서 차체의 요방향 주파수에 해당하는 3~4Hz의 공진 모드 부분에 반능동 현가장치를 적용하여 제어를 수행하고자 한다.

Fig. 8은 H_∞ 제어기가 적용된 Matlab/simulink상에서의 블록을 나타낸다. 제어 대상의 정의는 9자유도의 전달함수 중에서 대상모델의 최대속도인 9.82m/s일때의 전달함수를 채택하여 제어기를 설계하였다. 외란 제거 성능 평가를 위한 가중함수의 선정은 많은 시행착오를 통해 결정되었다.

Fig. 9~Fig. 10은 가중함수의 조건을 약간 조정하여 두 종류(case 1, case 2)의 H_∞ 제어기 설계를 한 후 운동방정식에 적용된 페루프 전달함수를 나타낸다. case 1은 제어 대상시스템의 개루프 전달함

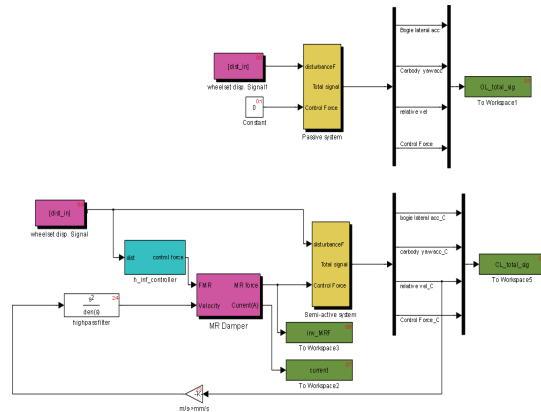


Fig. 8 Simulink block diagram for H infinity control

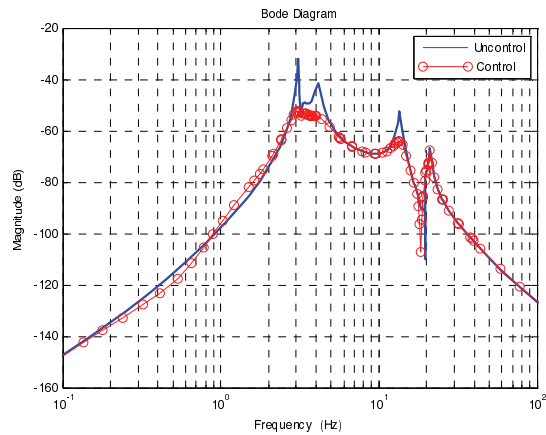


Fig. 9 Transfer function of feedback loop for H infinity controller (case1)

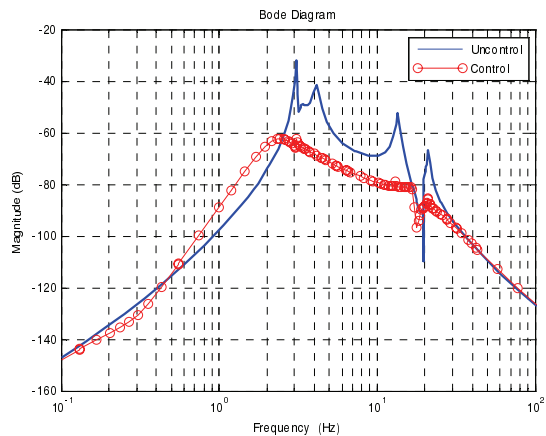


Fig.10 Transfer function of feedback loop for H infinity controller (case2)

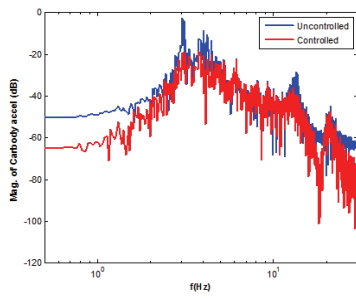


Fig. 11 Transfer function of carbody accel. according to weight function (case1)

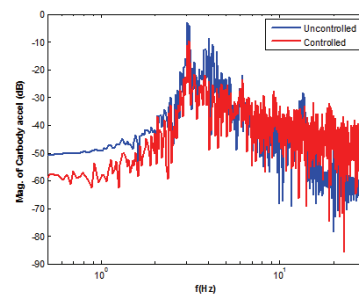


Fig. 15 Transfer function of carbody accel. applied to MR damper (case1)

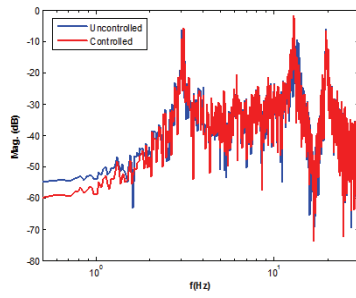


Fig. 12 Transfer function of bogie accel. according to weight function (case1)

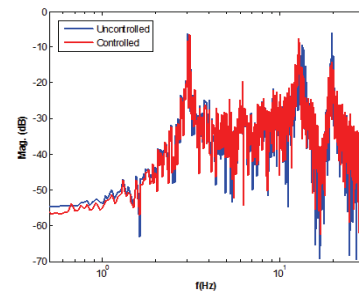


Fig. 16 Transfer function of bogie accel. applied to MR damper (case1)

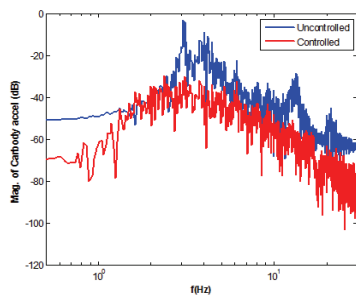


Fig. 13 Transfer function of carbody accel. according to weight function (case2)

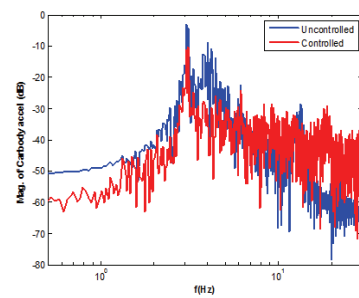


Fig. 17 Transfer function of carbody accel. applied to MR damper (case2)

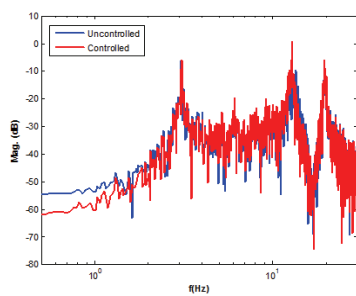


Fig. 14 Transfer function of bogie accel. according to weight function (case2)

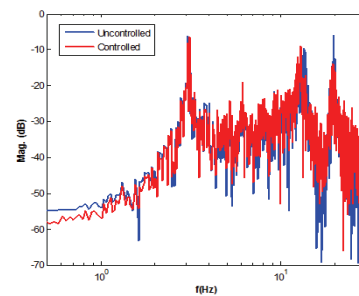


Fig. 18 Transfer function of bogie accel. applied to MR damper (case2)

수와 유사하면서 공진 주파수 부근에서의 진동이 잘 제어되도록 설계된 제어기이고, case 2는 1Hz 이하의 주파수에서 제어 효율성이 약간 떨어지지만 전체적으로 전달함수의 최대 이득값(norm)을 크게 줄일 수 있도록 설계된 제어기이다. 두 가지 가중 함수를 고려하여 설계된 H_{∞} 제어기의 페루프 전달함수에 Fig. 4와 같은 주파수 특성을 지닌 횡방향 변위를 윤축의 외란으로 적용하여 제어를 수행하였다. 차체 및 대차의 진동가속도를 Fig. 11~Fig. 14는 H_{∞} 가중 함수에 따른 case 1과 case 2 제어기에 대하여 주파수에 대한 응답 특성을 구하고 그 성능을 비교하였다.

가중함수(weight function)에 따른 H_{∞} 제어 성능을 비교해본 결과, 차체 진동가속도에 대해서는 case 2가 case 1의 제어기보다 제어 성능이 보다 뛰어났으며, case 2의 경우 페루프 전달함수를 통해 2Hz 이하의 저주파수에서 불안정한 응답 특성을 예상했으나 외란에 대한 주파수 응답 특성을 보니 저주파수에서 크게 악영향을 미치지 않는 것으로 확인되었다. 앞서 두 가지 H_{∞} 제어기의 성능을 능동제어로 비교하여 확인하였다. 본 논문에서의 제어는 MR 댐퍼를 이용한 반능동 제어이므로 MR 댐퍼의 성능시험을 통해 도출된 추정식을 수치해석 프로그램인 Matlab/simulink에 적용하여 제어를 수행하였다. Fig. 15~Fig. 18은 MR 댐퍼의 특성이 고려된 차체와 대차의 진동가속도 응답 특성을 나타낸다. 능동 제어의 결과와 비교한 결과 제어 성능에 대한 응답 특성이 다르게 나타났다. MR 댐퍼를 이용한 반능동 제어의 경우, 능동제어와 마찬가지로 차체의 진동가속도가 4Hz 부근 주파수에서 case 2가 case 1에 비해 월등한 진동 저감 효과를 보였다. 그러나 7Hz 이상의 주파수에서는 제어 성능이 크게 떨어진다. 반면에 대차의 진동가속도는 능동 제어 결과와 비교하여 제어 성능이 비슷한 수준이거나 약간 향상된 결과를 보인다. 수치해석을 통해 얻은 결과로 능동 제어와 MR 댐퍼의 특성이 적용된 반능동 제어의 성능을 비교하여 보았다. 그 결과, case1의 경우 능동과 반능동 현가장치에 대한 제어성능이 비슷하게 나타났다. case2가 case1 보다 더 우수한 제어성능을 보이고 있으며, 능동 및 반능동 제어 성능 비교에서도 확연한 차이가 나타났다. 또한, 반능동 현가장치는 제어 가능한 주파수 대역폭이 능동 제어와 비교했을 때 대략 7Hz 이상의 주파수에서 제어가 불가능한 것으로 판단된다.

4. 결론

H_{∞} 제어기는 설계 시 가중함수를 포함한 확대형 상태공간 모델로 표현되기 때문에 제어 대상 모델의 자유도가 많을수록 제어기의 차수도 증가하게 된다. 따라서 대부분 제어기가 복잡해지는 것을 피하기 위하여 제어 대상이 되는 차체의 운동만을 고려하여 제어기를 설계한다. 본 논문에서는 반차체 철도차량을 고려하여 가중함수(weight function)에 따른 두 가지 H_{∞} 제어기를 설계하였다. 그리고 설계된 제어기로 능동과 반능동 현가장치를 고려하여 해석을 수행하였으며 다음과 같은 결과를 도출하였다.

1) 축소모델을 이용한 연구를 수행하기 위해, 1/5 scale과 full scale 철도차량 모델에 대해 동적응답특성을 비교해본 결과 고유진동수가 거의 일치하여 진동제어에 대한 연구에 적합함을 확인하였다.

2) 능동과 반능동 현가장치에 대해 두 가지 가중함수에 따른 H_{∞} 제어를 수행하였다. 그 결과, 1Hz 이하의 주파수에서 제어 효율성이 약간 떨어지지만 전체적으로 전달함수의 최대 이득값을 크게 줄이도록 설계한 제어기가 개루프 전달함수와 유사하면서 공진 주파수 부근에서의 진동이 잘 제어되도록 설계한 제어기에 비해 차체의 진동 저감 효과는 훨씬 뛰어났으며 대차의 진동가속도는 비슷하거나 약간 커질 것으로 판단된다.

3) 반능동현가장치의 경우, 능동현가장치일 때와 마찬가지로 차체 진동가속도가 case 2 제어기가 더 우수하게 나타났다. 그러나 두 제어기 모두 주파수 대역폭 7Hz 이상에서는 제어 성능이 현저히 떨어질 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 산업통상자원부 산업원천기술개발사업 중 “철도차량 능동현가장치 기술개발” 과제의 일환으로 수행된 결과임.

참고문헌

1. Tanifuji, K., Koizumi, S., and Shimamune, R.-H., “Mechatronics in Japanese Rail Vehicles: Active and Semi-active Suspensions,” Control Engineering Practice, Vol. 10, No. 9, pp. 999-1004, 2002.
2. Schiehlen, W., “Dynamical Analysis of Vehicle

Systems : Control of Rail Vehicles Mechatronic Technologies,” Springer Wien New York, pp. 231-236, 2009.

3. Kortüm, W. and Jaschinski, A., “Mechatronic Developments for Railway Vehicles of the Future,” Control Engineering Practice, Vol. 10, No. 8, pp. 887-898, 2002.
4. Stribersky, A., Kienberger, A., Wagner, G., and MÜLLER, H., “Design and Evaluation of a Semi-Active Damping System for Rail Vehicles,” Vehicle System Dynamics, Vol. 29, No. sup1, pp. 669-681, 1998.
5. Tahara, M., Kazunori, W., Tomoyuki, E., Osamu, G., Shoji, N., and Satoshi, K., “Practical Use of an Active Suspension System for Railway Vehicls,” International Symposium on Speed-up and Service Technology for Railway and Maglev Systems, pp. 19-22, 2003.
6. Gautier, P. E., Quetin, F., and Vincent, J., “Global Active Suspension System for Railway Coaches,” World Congress on Railway Research, 1999.
7. Kjellqvist, P., “Experimental Evaluation of an Electro Mechanical Suspension Actuator for Rail Vehicle Applications,” International Conference on Power Electronics, Machines and Drives, pp. 165-170, 2002.
8. Guglielmino, E., Sireteanu, T., Stammers, C. W., Ghita, G., and Giuclea, M., “Semi-Active Suspension Control: Modeling, Measurement and Control,” Springer, pp. 5-7, 2008.
9. Goodall, R. M., “Active Railway Suspensions: Implementation Status and Technological Trends,” Vehicle system dynamics, Vol. 28, No. 2-3, pp. 87-117, 1997.
10. Nagai, M. and Shinano, R., “Study on Active and Semi-active Suspensions for High Speed Railway Vehicles,” INTERCON 2000, IEEE workshop in Peru, 2000.
11. Hirata, T., Koizumi, S., and Takahashi, R., “H_∞ Control of Railroad Vehicle Active Suspension,” Automatica, Vol. 31, No. 1, pp. 13-24, 1995.
12. Sasaki, K., Damoshita, S., and Simomura, T., “Development and Field Results of Semi-Active Suspension for High Speed Train,” RTRI Report, Vol. 10, No. 5, pp. 25-30, 1996.
13. Shin, Y. -J., You, W. -H., Hur, H. -M., and Park, J. -H.,

“Development of the Roller Rig for 1/5 Scaled Half Railway Vehicle to Perform Running Stability Test,” J. Korean Soc. Precis. Eng., Vol. 28, No. 5, pp. 1-6, 2011.

14. Shin, Y. -J., You, W. -H., Hur, H. -M., and Park, J. -H., “A Study on the Eigenmode Characteristics by Changing Damping Parameters of Secondary Suspension (Damper) on Railway Vehicles,” J. Korean Soc. Precis. Eng., Vol. 28, No. 7, pp. 796-804, 2011.
15. Shin, Y.-J., You, W.-H., Hur, H.-M., and Park, J.-H., “Semi-Active Control to Reduce Carbody Vibration of Railway Vehicle by Using Scaled Roller Rig,” Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 26, No. 11, pp. 3423-3431, 2012.

Appendix 1

Equations of motions for Railway Vehicle Dynamics

1. Wheelset dynamic equations

$$\begin{aligned}
 m_w \ddot{y}_{w1} = & -\frac{2f_{11}}{V} \dot{y}_{w1} - \frac{2r_0 f_{11}}{V} \left(\frac{\lambda}{a} \right) \dot{y}_{w1} \\
 & - W \frac{\lambda}{a} y_{w1} - \frac{2f_{12}}{V} \dot{\psi}_{w1} + 2f_{11} \psi_{w1} \\
 & - 2k_{py} (y_{w1} - y_b - L_{x1} \psi_b - h_1 \phi_b) \\
 & - 2c_{py} (\dot{y}_{w1} - \dot{y}_b - L_{x1} \dot{\psi}_b - h_1 \dot{\phi}_b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{wz} \ddot{\psi}_{w1} = & \frac{2f_{12}}{V} \dot{y}_{w1} + \left[-\frac{I_{wy} V}{r_0} + \frac{2r_0 f_{12}}{V} \right] \left(\frac{\lambda}{a} \right) \dot{y}_{w1} \\
 & - \frac{2a \lambda f_{33}}{r_0} y_{w1} - \left(\frac{2a^2 f_{33}}{V} + \frac{2f_{22}}{V} \right) \dot{\psi}_{w1} \\
 & + (-2f_{12} + a \lambda W) \psi_{w1} - 2k_{px} L_{y1}^2 (\psi_{w1} - \psi_b) \\
 & - 2c_{px} L_{y1}^2 (\dot{\psi}_{w1} - \dot{\psi}_b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_w \ddot{y}_{w2} = & -\frac{2f_{11}}{V} \dot{y}_{w2} - \frac{2r_0 f_{11}}{V} \left(\frac{\lambda}{a} \right) \dot{y}_{w2} \\
 & - W \frac{\lambda}{a} y_{w2} - \frac{2f_{12}}{V} \dot{\psi}_{w2} + 2f_{11} \psi_{w2} \\
 & - 2k_{py} (y_{w2} - y_b + L_{x1} \psi_b - h_1 \phi_b) \\
 & - 2c_{py} (\dot{y}_{w2} - \dot{y}_b + L_{x1} \dot{\psi}_b - h_1 \dot{\phi}_b)
 \end{aligned}$$

$$I_{wz} \ddot{\psi}_{w2} = \frac{2f_{12}}{V} \dot{y}_{w2} + \left[-\frac{I_{wy} V}{r_0} + \frac{2r_0 f_{12}}{V} \right] \left(\frac{\lambda}{a} \right) \dot{y}_{w2}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2a\lambda f_{33}}{r_0} y_{w2} - \left(\frac{2a^2 f_{33}}{V} + \frac{2f_{22}}{V} \right) \dot{\psi}_{w2} \\
 & + (-2f_{12} + a\lambda W) \psi_{w2} - 2k_{px} L_{y1}^2 (\psi_{w2} - \psi_b) \\
 & - 2c_{px} L_{y1}^2 (\dot{\psi}_{w2} - \dot{\psi}_b)
 \end{aligned}$$

2. Bogie dynamic equations (trailer bogie)

$$\begin{aligned}
 m_b \ddot{y}_b &= 2k_{py} (y_{w1} + y_{w2} - 2y_b - 2h_1 \dot{\phi}_b) \\
 & - 2k_{sy} (y_b + L_{x2} \psi_c - h_2 \dot{\phi}_b - h_3 \dot{\phi}_c) \\
 & - c_{sy} (\dot{y}_b + L_{x2} \dot{\psi}_c - h_2 \dot{\phi}_b - h_3 \dot{\phi}_c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{bz} \ddot{\psi}_b &= 2k_{py} L_{x1} (y_{w1} + y_{w2} - 2L_{x1} \psi_b) \\
 & + 2k_{px} L_{y1}^2 (\psi_{w1} + \psi_{w2} - 2\psi_b) \\
 & - 2k_{sx} L_{y2} (\psi_b - \psi_c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{bx} \ddot{\phi}_b &= -2k_{pz} L_{y1}^2 \phi_b - 2k_{sz} L_{y2}^2 (\phi_b - \phi_c) \\
 & + 2h_2 k_{sy} (y_b - h_2 \dot{\phi}_b - L_{x2} \psi_c - h_3 \dot{\phi}_c) \\
 & + 2h_1 k_{py} (y_{w1} + y_{w2} - 2(y_b + h_1 \dot{\phi}_b)) \\
 & - 2c_{pz} L_{y1}^2 \dot{\phi}_b - 2c_{sz} L_{y2}^2 (\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_c) \\
 & + h_2 c_{sy} (\dot{y}_b - h_2 \dot{\phi}_b - L_{x2} \dot{\psi}_c - h_3 \dot{\phi}_c) \\
 & + 2h_1 c_{py} (\dot{y}_{w1} + \dot{y}_{w2} - 2(\dot{y}_b + h_1 \dot{\phi}_b))
 \end{aligned}$$

3. Carbody dynamic equations

$$\begin{aligned}
 I_{cz} \ddot{\psi}_c &= 2k_{sy} L_{x2} (-L_{x2} \psi_c + y_b - h_2 \dot{\phi}_b) \\
 & + 2k_{sx} L_{y2}^2 (-\psi_c + \psi_b) \\
 & + c_{sy} L_{x2} (-L_{x2} \dot{\psi}_c + \dot{y}_b - h_2 \dot{\phi}_b) \\
 & + 2c_{sx} L_{y2}^2 (-\dot{\psi}_c + \dot{\psi}_b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{cx} \ddot{\phi}_c &= 2k_{sz} L_{y2}^2 (\phi_b - \phi_c) + 2k_{sy} h_3 (y_b - h_3 \dot{\phi}_c - h_2 \dot{\phi}_b) \\
 & + 2c_{sz} L_{y2}^2 (\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_c) + c_{sy} h_3 (\dot{y}_b - h_3 \dot{\phi}_c - h_2 \dot{\phi}_b)
 \end{aligned}$$

