韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2013. 08. 제 52권, 제 3호, 271-301.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2013, Vol. 52, No. 3, 271-301.

CAS 어플리케이션을 이용한 $x^n - 1$의 인수분해 일반화 과정에 대한 질적 분석

조영주(계산여자고등학교)
김경미(고려대학교 교과교육연구소)
황우형(고려대학교)†

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

정보화 시대는 정보화 지식이 그 시대의 대표적인 상징이며 생산 수단이 되는 시대로 컴퓨터를 중심으로 하는 정보통신기술이 급속하게 발달하고 보급되는 시대이다. 따라서 기존의 산업 시대의 사회, 교육, 문화 그리고 경제적 특성과 환경은 완전히 새로운 패러다임으로의 전환을 요구하고 있다. 정보화 사회로의 거대한 흐름은 정보화 마인드와 정보의 획득, 저장, 가공, 활용 및 전달기술을 가진 인간을 필요로 하게 되고, 사회와 역동적이고 밀접한 관련이 있는 교육은 이와 같은 특성을 가진 인간을 길러내야 하는 과제에 접하게 된다. 기존의 수학교육 체계로는 이러한 요구를 만족시키기 어렵기 때문에 총체적인 교육환경의 변화와 개혁이 필요하다고 할 수 있다. 그것은 구체적으로 교사와 학생의 역할, 교육방법 그리고 교육내용의 변화를 의미하며, 이러한 교육환경의 변화에 지대한 영향을 끼치고 있는 것은 정보화 도구이다(강인애, 2003).

정보화 시대를 살고 있는 학생들은 이미 유아기에 휴대폰을 장난감 삼아 가지고 놀고, 초등학교에 들어가기 전부터 게임 전용 오락기와 컴퓨터를 가지고 놀이를 한다. 초등학생 시절부터 개인용 휴대폰을 소유하게 되고, 노트북, 스마트폰 그리고 태블릿 PC의 사용에도 능숙하게 된다. 문제의 출발은 바로 Prensky(2005)가 지적한 바와 같이 디지털 세계에 살고 있는 디지털 원주민(Digital natives)인 학생들을 디지털 세계의 도래로 당황하고 있는 디지털 이주민(Digital immigrants)인 교사들이 교육해야 한다는 것이다. 우리나라 학교 교육의 현장은 아직도 정보화 시대의 변화에 대한 실제적이며 구체적인 인식 전환에 대한 노력이 부족하다. 특히 대학입시를 위한 문제 풀이 위주로 수업이 진행되는 일반계 고등학교 수학 교과의 경우 정보화 시대가 요구하는 변화에 둔감할 수밖에 없다. 학생들이 주도적으로 학습에서 사용할 수 있는 도구의 보급이 어려운 상황이고, 이를 사용하여 수업을 지도하는데 관심이 부족하다. 이에 디지털 원주민에게 적합한 학습권을 제공하는 것이 시급하다고 할 수 있다.

정보화가 가속화됨에 따라서 컴퓨터는 점차 소형화되고 있으며, 소프트웨어가 계산기에 내장되거나 어플리케이션을 다운 받아 통신장비에서 실행하여 사용할 수 있는 이동성이 강력한 휴대용 테크놀로지(Handheld Technology)[1]로 변천하고 있다. 계산기는 와이파이로 서로 연결되거나 컴퓨터 또는 프로젝터와 연결되도록 설계되고 있는가 하면 인터넷을 통해 계산기의 플래시 메모리를 업데이트하고, 또 계산기를 데이터 기록 장치와 연결하여 여러 물리적 수치를 측정할 수 있게 설계되고 있다. 특히 최근 태블릿 PC와 스마트폰의 활발한 보급과 함께 디지털 원주민으로 자란 학생들은 HHT를 사용

* 접수일(2013년 06월 17일), 수정일(2013년 07월 12일), 게재확정일(2013년 08월 19일)
* ZDM분류 : U74
* MSC2000분류 : 97U70
* 주제어 : 컴퓨터대수체계, CAS 어플리케이션, 과제-기법-이론화
* 이 연구는 2012학년도 고려대학교 사범대학 특별연구비 지원을 받아 수행되었음.
† 교신저자

[1] 본 논문에서는 휴대용 테크놀로지(Handheld Technology)를 편의상 축약하여 HHT로 기술한다.

하여 의견을 올리고, 자료를 검색하고 디지털 교과서로 학습하는 시대를 맞이하고 있다. 학생들의 이러한 생활 속에 CAS를 사용한 수학학습도 일부분을 차지하기를 바라는 마음이다. 그러기 위해서는 학생들이 사용하는 CAS가 수학 교실의 안팎에서 학생들의 사고를 돕는 인지적 도구로 존재해야 할 것이다.

지난 몇 년간 수학 교수·학습에서 학생들의 수학적 이해를 위해 CAS 상호작용과 그 영향이 얼마나 가치 있는지를 보여주는 많은 연구들이 수행되었다(Artigue, 1998, 2002; Lagrange, 2000, 2005a; Trouche, 2004; Guin, Ruthven, & Trouche, 2004). 특히, CAS 환경에서 x^n-1의 인수분해와 같은 대수 학습 결과는 매우 긍정적이다(Mounier & Aldon, 1996; Kieran & Drijvers, 2006; 한세호, 2009; Kieran & Guzmán, 2010). 그러나 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 학생들의 인식론적 사고 과정에 대한 분석과 그 과정에서 CAS의 역할에 대한 심층적인 연구는 아직 이루어지지 못하였다. CAS가 단순히 입력값을 결과로 변환시키는 장치가 아니라 인지적 도구로서 학생들의 사고 과정에 어떻게 관여하는지에 대한 연구가 더 필요하다고 하겠다.

따라서 본 연구에서는 기존 선행연구를 발전시켜 고등학교 1학년 학생이 CAS 어플리케이션을 사용하여 x^n-1의 인수분해를 일반화하는 과정을 분석하고, 그 과정에서 CAS가 어떤 역할을 하는지 알아보고자 한다.

다음은 본 연구의 연구문제이다.

1) 학생은 CAS 어플리케이션을 사용하여 x^n-1의 인수분해를 어떻게 일반화하는가?
2) CAS는 학생의 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 어떤 역할을 하는가?

2. 용어 정의

1) CAS(Computer Algebra System) : 컴퓨터 대수체계 기능을 수행할 수 있는 소프트웨어 또는 그 기능을 내장하고 있거나 실행하여 사용할 수 있는 스마트폰을 포함한 기기를 통칭한다.

본 연구에서는 CAS환경을 넓은 의미로 해석하였다. CAS환경을 CAS만을 사용한 학습 환경으로 국한하여 보지 않고, 수업 중 CAS를 부분적으로 이용한 지필 환경도 CAS환경으로 포함시켜 해석하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 인류학적 접근과 도구적 접근

1) 인류학적 접근

20세기 전반 유럽에서 인간의 행동을 설명하는 패러다임 중 하나는 인간의 정신 기능과 과정 형성에서 문화와 사회의 역할을 강조하고, 도구 사용, 기술, 인간 활동 등 근본적인 차원에서 인간의 활동을 주된 연구 주제로 다루었던 인류학적 접근방식이다. 교육 분야에서 사회문화적 접근방식을 도입한 것과 마찬가지로 인류학적 접근방식은 수학이 인간 활동의 산물이라는 시각을 갖고 있다(Sierpinska & Lerman, 1996). 따라서 수학적 산출물과 사고방식은 사회적, 문화적 맥락에 의존하는 것으로 볼 수 있다. 그 결과 수학의 대상은 절대적인 대상이 아니라 실재(reality)이며, 이는 기관(institution)에서 실제(practices)에 의해 생겨난다. 이 이론에서 기관이란 단어는 매우 넓은 의미로 이해해야 한다. 예를 들어, 학교는 물론이고 가족도 하나의 기관이다. 사회적이고 문화적인 실제는 모두 기관 안에서 이루어진다. 교육기관(didactic institutions)은 특정한 지식의 내용을 어떤 목적의식을 가지고 가르치는 임무를 가진 곳이다. 교육기관은 채택하는 지식의 대상에 대하여, 특정한 실제를 발전시키며 이로 인해 어떤 대상을 알거나 이해한다는 것의 의미에 대해서 특정한 규범과 시각이 생기게 된다.

기관에서의 실제에 해당하는 인간행동학(praxeology)은 교수·학습에서 테크놀로지의 영향을 이해하는데 유용한 개념이다. 인류학적 접근 방식에서 실제를 규정하는 구성 요소를 생각하고 이들 구성 요소의 유사성과 상이성을 분석하면 연구와 교육에서 실제의 유사성을 뛰어넘는 데 도움이 될 수 있다(Lagrange, 2005a).

Chevallard(1985, 1999)는 실제 또는 인간행동학(praxeology)을 통해서 기관 안에서 수학적 대상이 존재하고 활동하는 조건을 설명하고자 하였다. 즉, 학생들이 어떻게 실제로부터 본질을 알아내고 이해하는가를 설명하고자 하였다(Artigue, 2002 재인용). 테크놀로지를 사용한 실험수학에서는 수학 연구 실제와 수학 교수·학습 사이의 관계를 논의하기 위해서 이 개념을 사용하고 있다. 따라서 기관 내에서 수학적 대상의 명멸을 분석하고 대상을 이해한다는 것의 의미를 파악하기 위해서는 이

기관에서 실행되는 실제를 판단하고 분석해야 한다.

(1) 과제-기법-이론화

Chevallard(1999)는 인간행동학을 네 가지 구성 요소로 나누었다. 대상을 포함하는 과제(Task), 과제를 해결하기 위해 사용되는 기법(Technique), 기법을 설명하고 정당화하기 위해 사용되는 담론인 테크놀로지(Technology)[2], 테크놀로지적 담론의 구조적 기반을 제공하며 테크놀로지의 테크놀로지로 볼 수 있는 이론화(Theorization)이다.

교수·학습 맥락에서 수학 영역의 활동은 다음 세 가지 구조적 수준에서 이루어진다(Lagrange, 2000, 2005b).

첫째는 과제(Task)의 수준이다. 여기에서 과제는 개별 문제라기보다는 보다 일반적인 문제들의 구조로 간주된다. 예를 들어, 함수 영역에서 문제는 실생활 상황에서 직접적으로 혹은 간접적으로 표현되도록 여러 가지로 출제할 수 있다. 그러나 과제는 "주어진 함수가 증가하는 구간을 구하시오"나 "$y=0$이 되는 x의 값을 구하시오"와 같이 어떤 문제들에 대하여 공통으로 적용되는 구조를 가진다.

둘째는 기법(Technique)의 수준이다. 기법이란 용어는 교육학에서 흔히 쓰이는 것보다 더 넓은 의미를 지닌다. 기법은 '과제를 해결하는 방법'이며, 주어진 기관에서 정형화된 과제의 수준을 넘는 순간 각각의 기법은 논리와 정형화된 활동의 복잡한 결합물이 된다. 기법은 과제를 구분하고 재구성하는 것을 돕는데, 예를 들어 "주어진 함수가 증가하는 구간을 구하시오"라는 과제는 이 함수에 대해서 무엇을 알고 있느냐에 따라 여러 가지 기법이 존재한다. 이 함수를 미분할 수 있다면, 위의 과제는 "$y'=0$이 되는 값을 구하시오"라는 과제와 연관하여 생각할 수 있고 또는 직접적인 대수적 방법에 기반하여 탐색할 수 있다. 기법은 흔히 생산적 가능성인 효율성, 비용, 유효성 측면에 중점을 두는 실용적 가치의 관점에서 인식되고 평가된다. 그러나 기법은 관련된 대상을 이해하는데 기여하고 이를 통해서 수학적 지식에 대한 질문의 원천이 되기 때문에 인식론적 가치도 지니고 있다.

셋째는 이론화(Theorization)의 수준이다. 첫째와 둘째 수준이 활동에 관한 것이라면, 셋째 수준은 언명(assertion)에 관한 것이다. 이 수준에서는 기법의 일관성과 효율성을 논하며 수학적 성질이나 개념, 특정한 언어로 자신의 주장을 나타낼 수 있다.

이러한 과제-기법-이론화의 세 수준이 미치는 영향을 수학 교육에서 고려하지 않으면 새로운 교수학적 상황에 대한 테크놀로지의 잠재력을 활용하기 어렵다. 어떤 영역에서 수학을 행하는 데에는 반드시 개념 측면에서 문제를 구조화하는 것이 관련되어 있는가 하면, 다른 한편으로는 CAS와 같은 테크놀로지의 잠재성이 문제 해결 활동에 대한 확장된 가능성으로 표현되기 때문에 매개 구조로서 과제와 기법에 초점이 맞춰지기도 한다. 따라서 개념에 대한 접근이 문제를 탐구하는 가능성에 달려 있다고 본다면 기법은 자동적으로 이 접근을 강화해야 한다.

(2) 실용주의적 역할과 인식론적 역할

Piaget(1980)는 자신의 심리학 연구에서 인식론적 관점에서 지식의 생산자이자 가공자로서의 인식론적 주체를 강조하였다. 그러나 Inhelder와 Cellerier(1992)는 인식론적 주체에 대한 이런 관점이 한계를 가지고 있다고 생각하였다. 그는 실용주의적 주체를 강조하였는데, 지식을 만들어내기 위해서 세계를 변화시키는 인식론적 변환과 달리 실용주의적 변환은 세계를 변화시키기 위해서 지식을 사용하는 것이다(Verillon, 2000 재인용). 도구화된 행동은 지식을 산출하고자 하는가 또는 변환을 만들어내고자 하는가에 따라 확연히 구분될 수 있다. 수학 교육에서 컴퓨터나 계산기를 사용하는 도구화된 행동은 일반적으로 환경의 일부에 예상되는 변환을 일으키고자 하는 것이다. 실용주의적 변환은 분명 CAS를 포함한 테크놀로지의 특징적인 측면을 구현하고 있으며, 실용주의적 주체 이론은 테크놀로지 교육과 잘 어울린다고 할 수 있다.

하지만 변환을 일으키는 것이 물질 환경에서 도구를 사용한 상호작용의 유일한 목적은 아니다. 예를 들어, 센서나 계량기와 같은 인공물은 사용자가 직접 접근할 수 없는 실재의 어떤 측면을 감지하고, 기록하고, 측정함으로써 환경에 대한 지식을 도출하는 데 사용될 수 있다.

---

2) 여기서 말하는 테크놀로지는 일반적으로 사용하는 공학개념의 테크놀로지가 아니며, 기법을 설명하고 정당화하기 위한 담론에 한한다. Lagrange(2000, 2005b)는 Chevallard의 테크놀로지 요소와 이론 요소를 합하여 이론화로 통합하여 생각하였다.

이런 의미에서, 위와 같은 유형의 상호 작용은 인식론적이다. 사실, 도구화된 활동은 물질적이든 상징적이든 일반적으로 실용주의적인 단계와 인식론적인 단계로 이루어진다. 예를 들어, 레이더 관측 작업은 주로 인식론적이다. 하지만 레이더 관측을 위해서는 주파수 조정 작업이 필요한데, 이는 실용주의적이다. 드릴 작업은 본질적으로 실용주의적이다. 하지만 작업 중 소리와 진동의 변화는 진행 중인 변환에 대한 인식론적 피드백을 제공한다. Verillon(2000)에 의하면, 등반가들은 피켈을 슬로프에서 균형을 유지하거나 빙벽에 계단을 만들 때는 실용주의적으로 사용하고, 눈의 두께를 재거나 크레바스를 조사할 때는 인식론적으로 사용한다. 정상 정복을 알리기 위해 꼭대기에 피켈을 꽂을 때에도 역시 인식론적으로 사용할 수 있다. Verillon과 Rabardel(1995)은 계산기와 같은 인공물을 사용하는 것이 단지 수학적 사고를 계산기의 명령어로 변환시키는 문제가 아니라, 사용자와 도구 사이에 양 방향으로의 지향성 관계를 형성한다고 주장하였다. 따라서 도구를 사용하는 활동은 일반적으로 물질적이든 상징적이든 인식론적 단계와 실용주의적 단계를 모두 고려하는 것이 중요하다.

Rabardel과 Samurçay(2001)은 과제-기법-이론화의 상호 역동성 측면에서 과제는 문제에 해당하고 기법은 과제와 관련되어서 만들어진다고 하였다. 이때, 이론은 기법의 기능과 기법의 한계를 고려한 다음 기법 자체가 수학적 활동에 유용한 결과 산출을 보장하도록 정형화된다. 따라서 기법은 결과를 산출하게 하는 실용주의적 역할을 하며 동시에 대상을 이해하고 새로운 문제를 만드는 인식론적 역할도 한다. Lagrange(2003)는 기법이 풍부하게 다루어지는 과정은 다루는 대상에 대한 이해에 기여함으로써 인식론적 역할을 한다고 주장하였다. 즉, 기법은 다른 기법과 비교하거나 일관성에 관해 토론할 때 개념적 반성을 위한 대상으로 이바지하게 된다. 따라서 학생들이 기법을 발전시켜 나갈 때 수학적 이론화가 형성된다는 것은 바로 기법의 인식론적 역할을 언급하는 부분이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 과제-기법-이론화의 틀에서 CAS의 인식론적 역할 부분을 재고하는 기회를 가질 것이다.

(3) 실험수학

수학 연구에는 항상 실험적 차원이 있으며, 추론, 증명, 반박에 기초한 수학 개념의 발전은 새로운 것이 아니다(Lakatos, 1976). 하지만 정보과학의 발전으로 이 실험적 측면은 수학자 개인의 영역을 벗어나 공적으로 인정받게 되었다. 컴퓨터 프로그램을 통해서 생성한 추론, 이 추론과 연관된 데이터 그리고 추론을 얻기 위한 방법은 의미 있는 유효한 수학 활동이라 할 수 있다. Borwein, Bailey와 Girgensohn(2003)에 의하면 컴퓨터 실험은 수학을 하는 통합적인 부분이고, 이로 인해 실험을 수행하고 재현하게 하는 체계적인 접근방식이 가능해졌다고 주장하였다. 모든 수학자들은 컴퓨터가 자신의 작업 방식을 근본적으로 바꾸었다는데 동의하는 것은 아니다. 하지만 접근이 쉬운 컴퓨터 도구가 실험 실제를 체계화하는 방식에 공식적인 규칙을 제공하고, 이 체계화는 개념화의 수단으로써 증명을 보충한다는 데에는 이견이 없다. 이러한 체계화된 컴퓨터 보조 수단에서 변환의 문제를 발견하게 된다. 실험 도구는 작업을 이해하고, 기법을 발전시키며, 탐구와 이론화를 연결하고, 서툰 귀납적 추론을 배제하는데 도움이 될 수 있다(Lagrange, 2005a).

Bell(1980)은 수학 실험이란 학생들이 수학적 개념을 탐구하고, 수학적 원리를 발견하고, 그것을 구체적인 상황에 적용하는 과정을 통하여 수학을 학습하는 환경이라고 정의하였다. 양창길, 김철수(1996)는 수학교육에 정보공학 도구를 활용하여 보이는 수학을 실현하는 것을 실험수학으로 보았다. 실험수학이란 전통적인 강의식 학습 방법이 아닌 학생들이 구체물을 가지고 조작하거나 구체적으로 표현하는 다양한 활동을 통하여 탐구하고 원리를 발견하는 수학 수업을 의미한다. 즉, 교과서와 교사의 설명만으로 학습하는 것이 아니라 학생들이 직접 컴퓨터나 도구, 게임, 토론 등 다양한 자료를 사용한 여러 가지 활동을 통해서 경험하는 학습을 의미한다. 실험수학을 강조하는 수학활동은 도구를 활용한 수학 교육을 실현하기 위한 구체적인 방안이 될 수 있다.

2) 도구적 접근

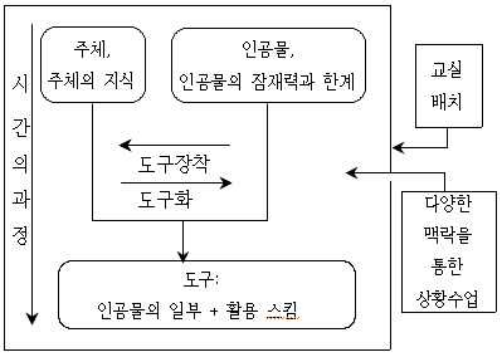
(1) 도구적 발생

CAS를 학습자의 도구로 생각하는 실제적 관점을 고찰하기 위해서 학습자가 사용하게 될 CAS는 수업에서

유용하고 유의미한 도구로 거듭나야 한다. 일반적으로 수학 교수·학습은 테크놀로지가 부재한 환경에서 이루어지기 때문에 테크놀로지를 도입하는 것은 수학 교수·학습의 환경을 급격하게 변화시킬 수 있다. 따라서 교수·학습에서 학생들이 기술적 도구를 수학적 도구로 변환시키는 것과 인공물의 기능을 발견하고 실용적인 사용을 통해서 도구가 개념 발생을 이끌어낼 수 있도록 교수·학습에 도구를 통합하는 측면을 고려해야 한다 (Artigue, 1998).

Verillon과 Rabardel(1995)은 계산기와 같은 인공물을 사용하는 것이 단지 수학적 사고를 계산기의 명령어로 변환시키는 문제가 아니라, 사용자와 도구 사이에 양 방향으로의 지향성 관계를 형성한다고 주장하였다. 인공물은 인간 활동에 의해서 이미 생산되었거나, 어떤 유형의 과제 수행에서 새로운 인간 활동을 유지하는 것을 목표로 한 물질적이거나 또는 추상적인 대상이다. 예를 들면, 계산기는 하나의 인공물이며, 이차방정식을 풀기 위한 알고리즘도 하나의 인공물이다. 도구는 주체가 인공물로부터 형성하는 것으로 심리적 또는 물질적 도구는 무엇보다도 주체의 활동과 연결되어 있고, 주어진 과제의 입장에서 형성된 주관적인 것이다.

도구적 발생은 인공물에서 유용하고 유의미한 도구를 형성하는 과정을 말하며 주체와 인공물 사이에서 나타난다. 또한 도구적 발생의 결과는 활용 스킴(utilization schemes)[3]의 형태로 압축되므로 도구적 발생을 활용 스킴의 형성 과정으로 볼 수 있다. 그리고 활용 스킴은 학생들이 과제를 수행하고 활동을 통제하도록 해준다. 실제 상황에서 도구적 발생, 즉 기술적이고 개념적인 측면을 가진 활용 스킴의 형성은 학생들에게 쉽지 않은 일이다. [그림 1]의 도구적 발생은 인공물의 잠재력과 한계성, 주체의 활동과 지식, 이전의 학습 방법들이 연결된 복잡한 과정임을 나타내고 있다.



[그림 1] 도구적 발생의 과정
[Fig. 1] The process of instrumental genesis

(2) 도구적 오케스트레이션

정보화 사회가 가속화됨에 따라 학생들이 수학 교실에서 CAS 기능이 포함된 계산기 또는 컴퓨터 소프트웨어를 사용하여 학습하는 상황은 자연스러운 현상이 되어가고 있다. 도구적 발생의 과정을 경험하게 됨으로써 학생들은 문제 접근과 해결 과정을 새롭게 이해하게 될 것이며, 수학교실에서 도구의 사용은 교수·학습의 실제를 변화시키게 될 것이다.

Trouche(2004)는 학생들의 도구적 발생에 대한 교사의 조력의 필요성을 나타내기 위해서 교수학적 실행을 위한 도구적 오케스트레이션(instrumental orchestration) 개념을 제안하였다. 오케스트레이션이란 "학생의 도구적 발생을 외부에서 통제하는 과정"을 지칭하며, 이를 통해 학생의 수학 학습을 향상시키는 것을 의미한다(Trouche, 2004). Noss와 Hoyles(1996)는 도구적 오케스트레이션을 과제, 수학적 대상과의 관계, 실재와 개인 간의 경험의 연결망을 구성하는 것으로 간주하였다. 도구적 발생이 원활히 이루어질 수 있고, 수업에서 도구의 통합과 그 실용성을 보장하기 위해서 교육 과정은 교수학적 활용 시스템을 설계할 필요가 있다. 교실에서 테크놀로지를 얼마나 생산적으로 사용하느냐는 교사와 학생의 테크놀로지 사용을 인도할 수 있는 입증된 모델과 본보기를 얻을 수 있느냐에 따라 좌우되며, 그 사용 모델과 본보기에는 시간과 공간 운영 및 교실 배치의 문제가 포함되어야 한다. 테크놀로지의 장점을 살리면서, 다른 한편으로는 주어진 공학 도구의 결과 또는 이미지를 넘어서는 수

3) Drijvers(2003)은 활용 스킴이라는 개념이 Piaget나 Vergnaud의 스킴과 유사하다고 보았다. 스킴이라는 용어는 행동-과정-대상-스키마의 약어인 APOS에서 S로 상징되는 스키마(Schema)와 유사하다.

학적 사고를 요하는 새로운 문제 상황을 구성하는 것이 쉽지 않은 것으로 나타났다. 그러한 과제를 교사 스스로 설계하기 위해서 교사는 가르쳐야 하는 수학 주제에 대한 수학적, 교수학적 배경뿐 아니라 인공물의 기능을 모두 숙달해야 한다. 일단 그러한 수학적 문제 상황이 구성되고 제시되면, 교실에서 그것을 어떻게 작동시키고, 시공간 상에서 학생들의 작업을 어떻게 조직하고, 문제 해결에서 개인 및 집단별 단계를 어떻게 결합하고, 각 학생의 도구를 전체적으로 어떻게 통합할 것인지에 대한 조율을 생각해야 한다. 이러한 조율의 역할이 바로 도구적 오케스트레이션이다(Trouche, 2005). 이 은유는 개인별로 테크놀로지를 사용하는 경우에도 학급 전체 토의시간의 필요성을 강조하고 있다. 수학적 상황에 적용된 도구적 오케스트레이션은 교실 활동에서 사용하는 인공물과 인공물의 위치 지정을 포함한 교수학적 배치를 제안한다. 오케스트레이션은 교실에서 실행이 이루어지기 전에 선험적 설계가 필요하다. 그러나 도구적 발생에 초점을 맞춘 도구적 관점에 따르면 스킴, 기법, 오케스트레이션은 교수하는 동안 도구 사용을 통해서 자연스럽게 나타나고 발전하게 된다.

2. 수학교육에서 CAS의 활용

수학교육에서 CAS 활용에 대한 초기 연구는 CAS에 대한 연구와 수학교육에 대한 연구 사이의 간극을 메우기 위한 방향으로 발전되어 왔다. 미분에 대한 Repo(1994)의 연구와 대수에 대한 Pozzi(1994)의 연구가 그것이다. Repo(1994)는 반영적 추상화 개념에 기초하여 발생적 분할 방식으로 미분개념에 대한 학습 경로를 살펴보았고, Pozzi(1994)는 수학 실력이 좋지 않은 16, 17세의 두 학생이 Derive를 사용하여 어떻게 곱의 미분법과 몫의 미분법 규칙을 발견하는지 알아보았다. 연구 결과 학생들은 내재적 일반화보다는 피상적인 패턴 인식과 수식을 표현하고 단순화하는 컴퓨터 대수 소프트웨어의 특정 방법을 익히는데 많은 주의를 쏟았다. Pozzi(1994)는 이로 인해 개념 오류가 일어날 수 있다고 주장하였다.

CAS 환경에서 대수 학습에 초점을 맞춘 연구들을 살펴보면, Boers-van Oosterum(1990)은 고등학교 학생들을 대상으로 컴퓨터 중심 접근 방식을 통해 변수 개념을 충분히 이해하는지를 조사해 긍정적인 결과를 얻었다. O'Callaghan(1998)도 컴퓨터 중심 접근 방식으로 대수학을 공부하는 대학생들의 함수 개념 이해를 조사한 결과 학생들은 함수 개념을 더 잘 이해하였고, 문제 해결 능력이 향상되었음을 알 수 있었다. 하지만 함수 개념을 구상화하는 부분에서는 큰 진전을 보이지 못하고 어려움을 겪는다고 보고하였다. Brown(1998)은 CAS를 사용한 변수 개념에 대한 연구에서 13, 14세의 학생들이 숫자 알아맞히기 문제를 풀도록 하였는데 변수에 수치 값을 대입하는 연산 활동이었다. 이 접근 방식은 Graham과 Thomas(2000)가 사용한 자리지기 또는 미지수로서 변수의 역할과 유사한 것으로, CAS가 제공하는 기능은 자리지기 개념을 지지하는 데 한정되었으며 다른 변수의 역할은 다루지 않았다. Drijvers(2003)는 CAS 환경에서 매개변수 개념을 '자리지기로서의 매개변수', '변하는 양으로서의 매개변수', '미지수로서의 매개변수', '일반화로서의 매개변수'로 세분화하였고, 조영주, 김경미(2010)는 이 구분에 근거하여 CAS 환경이 각 매개변수의 개념 이해에 어떠한 역할을 하는지 고찰하였다.

그 외에도 많은 연구들이 교수학습에서 학생들의 수학적 이해를 위해 CAS 상호작용과 그 영향이 얼마나 가치 있는지를 보여주었다(Artigue, 2002; Lagrange, 2005a; Trouche, 2004; Guin, Ruthven, & Trouche, 2004).

본 논문의 주제가 된 x^n-1의 인수분해에 관한 연구는 Mounier와 Aldon(1996)의 연구에서 시작되었다. CAS에 대한 접근은 주어진 자연수 변수 n에 대한 학생들의 여러 가지 인수분해 탐구를 촉진시키는 한편, 학생들은 과제에서 관찰되는 일반적인 규칙성을 인식하게 되는데 어려움을 겪었다. Kieran과 Drijvers(2006)은 15세 학생들을 대상으로 한 연구에서 학생들이 x^n-1의 일반적인 인수분해의 개념뿐만 아니라, 완전한 인수분해에 대한 관계도 발달시킬 수 있도록 하였다. 한세호(2009)는 $x^n-1(n\geq 2$ 자연수) 인수분해 활동에서 CAS의 사용은 좀 더 정교한 추측을 발전시키는 데 집중하게 하는 역할을 하였으며, 도구화된 CAS를 활용한 인수분해 활동은 비판적·반성적 사고 발전에 기여했다고 주장하였다. 최근 Kieran과 Guzmán(2010)은 x^n-1의 인수분해를 주제로 교사의 수학적 지식과 교수 실제가 향상되는 기회와

조건에 대한 몇 가지 사례를 보고하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 참여자

본 연구는 A광역시에 소재한 인문계 B고등학교 1학년 여학생 6명을 대상으로 CAS 어플리케이션이 설치된 태블릿 PC(아이패드)와 스마트폰(아이폰)을 사용하는 학습 환경에서 교수 실험(Teaching Experiment)의 형태로 진행되었다. 2012년 B고등학교 1학년에 재학 중인 학생들 중 아이패드 또는 아이폰을 소지하고 있는 학생들을 조사한 후 연구의 목적과 방법을 설명하고 참여의사를 보인 4명의 학생들과 수학교과 담당 교사가 추천한 학생 2명을 참여자로 선정하였다. 아이폰과 아이패드가 없는 학생 2명은 연구자가 제공한 아이패드와 아이폰을 사용하여 실험에 참여하였다. 6명의 학생 모두 기종은 다르지만 평소에 태블릿 PC나 스마트폰을 사용하고 있었다. 하지만 태블릿 PC나 스마트폰을 사용하여 수학활동을 한 경험은 전혀 없었으며 특히, CAS 어플리케이션을 접한 경험도 전혀 없었다.

[표 1] 참여자 수학 성적
[Table 1] Mathematics achievement of participants

학생(가명)	아패	아폰	히패	히폰	소패	소폰
1학기 수학성적	97	86	86	91	96	80
2학기 수학성적	98	73	91	94	98	78

본 연구에서는 아이패드를 사용하는 학생 1명과 아이폰을 사용하는 학생 1명으로 짝모둠을 구성하였다. 모둠명은 존경하는 여성 수학자 이름을 사용하게 하였으며, 아그네시, 히파티아, 소피 제르맹이 선택되었다. 본 연구에 참여한 학생들의 수학 성적 분포는 학교 정기고사를 기준으로 중위권 2명(아폰, 소폰)과 상위권 4명(아패, 히패, 히폰, 소패)으로 구성되었다. 다음은 연구에 참여한 학생 6명의 1학년 1, 2학기 수학 성적이다. 참여자 6명의 이름은 편의상 모둠명의 첫글자와 아이패드와 아이폰을 구분하는 '패'와 '폰' 글자를 결합하여, 아패, 아폰, 히패, 히폰, 소패, 소폰으로 명명하였다.

2. 연구 절차

본 연구는 2012년 12월 1일부터 2013년 1월 12일까지 6주에 걸쳐 매주 토요일 오전 10시부터 50분간 7차시 일정으로 B고등학교 수학교과 교실인 가우스실에서 진행되었다. 모든 수업은 탐구과제를 해결하는 짝모둠 협력학습으로 진행되었다. 1차시에는 간단한 오리엔테이션을 마친 후 아이패드와 아이폰의 Apple Store에서 CAS 어플리케이션인 Symbolic calculator를 다운로드 받아 각각의 태블릿 PC와 스마트폰에 사용가능하도록 설치하고 간단히 들어가기 활동을 진행하였다. 2차시는 x^n-1로 전개되는 식의 규칙성을 탐구하고, 이를 일반화하는 시도를 하였다. 3차시부터 5차시까지는 x^2-1에서 $x^{13}-1$까지의 인수분해를 지필 기법과 CAS 기법으로 탐구하고 두 결과가 같지 않을 때 결과가 같아지도록 조정하는 작업과 x^n-1의 인수분해가 포함하게 될 인수와 인수의 개수들에 대한 추측 그리고 추측의 수정 과정을 탐구하였다.

[표 2] 모둠 협력학습의 차시별 과제
[Table 2] Task arrangements of collaborative group learning

차시	과제	내용
1차시	들어가기	오리엔테이션, 어플리케이션 다운받기
2차시	탐구과제 Ⅰ	x^n-1로 전개되는 식
3차시	탐구과제 Ⅱ	x^2-1 ~ x^6-1의 인수분해, 추측의 구성
4차시	탐구과제 Ⅲ	x^7-1 ~ $x^{13}-1$의 인수분해
5차시		추측의 수정과 정교화
6차시	탐구과제 Ⅳ	x^n-1의 인수분해 일반화 증명
7차시		x^n-1의 인수분해 일반화 증명

6차시부터 7차시까지는 x^n-1의 인수분해 일반화를 위한 여러 가지 추측들의 증명을 시도하였다. 이들 증명을 통해 학생들은 x^n-1의 인수분해 일반화의 식을 발견하고 지수에 따라 반드시 포함하는 인수와 인수의 개

수에 관한 사실들을 파악하였다. 증명 과정을 포함한 전 과정에서 지필 기법과 CAS 기법의 사용이 허용되었다. 연구자는 학생들이 탐구 과제를 스스로 탐구할 수 있도록 최소로 개입하였다. 본 연구에서 수행된 x^n-1의 인수분해 일반화 과제는 4개의 탐구과제 활동으로 나누어졌으며 각 차시별 과제는 [표 2]와 같다.

본 연구에 사용한 4개의 탐구과제는 Kieran과 Drijvers(2006)가 사용한 과제를 연구자가 CAS의 블랙박스적 특성이 수학적 반성 과정에 직면하도록 재설계한 것으로, 수학교육 전문가에게 타당성을 검증 받았다. 학생들이 수행한 탐구과제 활동지는 <부록>에 첨부하였다.

3. 자료 수집 및 분석

CAS 어플리케이션이 설치된 아이폰과 아이패드를 이용하여 학생들이 진행한 x^n-1의 인수분해 일반화 과정을 분석하기 위하여 본 연구에서 수집한 자료는 고정된 카메라에 녹화된 수업 A/V 자료, 이동식 카메라에 녹화된 수업 A/V 자료, 학생들이 수업 중에 작성한 짝모둠 협력학습 탐구과제 활동지, 학생들의 태블릿 PC 또는 스마트폰에 저장된 활동 파일, 연구자가 학생 관찰을 통해 적은 기록물 등이다. 학생들의 사고 과정에 대한 면담은 1차시 종료 후, 3차시 종료 후, 4차시 종료 후, 6차시 종료 후의 4번에 걸쳐 짝모둠별로 실시하였으며 학생들의 모둠별 문제해결 과정과 면담 상황을 비디오로 녹화하였고 A/V 자료는 모두 전사하였으며, 학생들의 활동지는 분석을 위해 모두 수합하였다.

1) x^n-1의 인수분해 일반화

학생이 CAS 어플리케이션을 이용하여 x^n-1의 인수분해를 어떻게 일반화하는지 알아보기 위하여 탐구과제를 해결하는 과정에서 사용된 지필 기법과 CAS 기법의 범주를 정리하고 실제로 학생들이 사용한 구체적인 지필 기법과 CAS 기법을 열거하여 분류하였다. 기법의 종류를 분류하는 것은 과제-기법-이론화(T-T-T) 관점에서 x^n-1의 인수분해 일반화 과정을 바라보기 위함이며 과제-기법-이론화의 마지막 요소인 이론화 과정을 중심으로 짝모둠별로 분석하였다. 본 연구에서는 학생들의 수학적 이론화를 크게 "전개의 일반화", "x^n-1(단, $n \geq 2$인 자연수)의 완전한 인수분해", "추측과 추측의 수정", "증명"의 과정으로 구분하여 분석하였다.

2) x^n-1의 인수분해 일반화에서 CAS의 역할

CAS가 학생의 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 어떤 역할을 하는지 알아보기 위하여 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 CAS가 학생들의 사고와 행동에 미친 영향에 주목하여 자료를 분석하였다. 이것은 CAS 기법이 결과를 산출하는 실용주의적 역할을 함과 동시에 학생들이 기법을 발전시켜 나갈 때 개념적 반성과 수학적 이론화를 구성하는 인식론적 역할을 한다는 입장(Rabardel & Samurçay, 2001; Lagrange, 2003)을 수용한 것으로 본 연구에서는 인식론적 역할에 중점을 두었다. 연구에 참여한 학생들이 CAS 기법을 사용하여 실행한 결과를 어떻게 해석하고, 이어지는 다음 사고와 행동을 어떻게 취하느냐를 분석하여 CAS의 역할 수준을 구분하였다. '학생들은 CAS의 결과를 어떻게 해석하고 어떤 사고와 행동을 하게 되는가?' 라는 것이 CAS의 역할을 분석하는 기준이 되었다. 학생들에게 나타난 CAS의 역할을 분석 기준에 따라 "결과 확인(CR: Checking the Result)의 역할", "인지 자극(CS: Cognitive Stimulation)의 역할", "사고 확장(ET: Extending Thinking)의 역할"로 나누고 학생들의 활동과 사고과정을 도식으로 나타내었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. x^n-1의 인수분해 일반화

학생이 CAS 어플리케이션을 이용하여 x^n-1의 인수분해를 어떻게 일반화하는지 알아보기 위해 학생들이 사용한 지필 기법과 CAS 기법의 사례를 분석한 결과 학생들의 수학적 이론화를 크게 "전개의 일반화", "x^n-1(단, $n \geq 2$인 자연수)의 완전한 인수분해", "추측과 추측의 수정", "증명"의 과정으로 구분하였다.

첫째, x^n-1의 형태로 전개되는 식을 일반화하는 이론화이다. x^n-1의 형태로 전개되는 식은 전개 과정에서 항이 소거되는 기법(Telescoping technique)이 적용되어 마지막에 두 항만 남게 된다. 이 과정을 특정 n의 값으로 확인하고 공통점과 차이점을 비교한다. 그리고 문

자 지수 n에 관하여 일반화한다.

둘째, x^n-1의 완전한 인수분해의 개념에 대한 이론화이다. 완전한 인수분해는 더 이상 인수분해되지 않는 인수들만의 곱으로 나타내는 것이다. 학생들은 소수가 아닌 짝수 지수를 가진 x^4-1의 인수분해를 전개일반화의 역 기법으로 $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$을 시도할 때 CAS 기법의 완전한 인수분해와 일치하지 않는 현실에 직면하게 된다. 이 때 지필 기법의 인수분해와 CAS 기법의 인수분해를 조정하는 활동은 완전한 인수분해에 대한 학생들의 이론적 관점을 확장하는 중요한 부분이다. 이 조정활동은 특정 n에 대한 x^n-1의 완전한 인수분해를 위해 지수의 성질, 구조적으로 다르게 보이는 식의 구조 파악 그리고 다양한 방법의 인수분해가 가능하다는 것에 대한 인식 등과 관련된다.

셋째, x^n-1의 인수분해를 일반화하기 위한 추측을 만들고 수정하는 이론화이다. 이 이론화는 학생들이 x^2-1부터 x^6-1을 인수분해하는 탐구과제에서 추측을 만들고, x^7-1부터 $x^{13}-1$을 인수분해하는 탐구과제 활동을 통해 그 추측을 수정하고 확장하는 과정을 계속해 나간다. 이와 같이 탐구과제에서 활동한 몇 가지 경험적 관찰을 통해 추측을 만들어 증명을 위한 명제로 만드는 과정은 학생들의 수학적 사고에 중요하게 작용하였다.

넷째, 증명을 통하여 x^n-1의 인수분해를 일반화하고 문자 기호로 표현하는 이론화이다. 문자 지수 n을 사용하여 x^n-1의 인수분해를 표현하는 것은 감소하는 지수 n을 표현하는 방법, 중간 항의 생략 기호인 …를 사용하는 방법, 홀수 지수, 짝수 지수, 소수 지수와 관련된 아이디어뿐만 아니라 x^n-1의 완전한 인수분해 등을 고려하여 x^n-1의 인수분해 일반화의 형태와 반드시 포함하는 인수, 인수의 개수 등을 이론화 하려는 노력이 관찰되는 경우이다.

1) 전개의 일반화

학생들은 완전한 인수분해 활동을 하기 전에 탐구과제 I을 통하여 x^n-1의 형태로 전개되는 식의 일반화 과정에 대하여 학습하였다. 다음은 아그네시 모둠에서 세 식 $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x^2+x+1)$, $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$의 공통점과 차이점에 관하여 이야기하고, 전개 결과 오직 2개의 항을 가진 다항식이 된다는 것을 분석한 것이다.

5. 세 식 $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x^2+x+1)$, $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$을 전개한 결과가 오직 2개의 항을 가진 다항식으로 나타난다는 것을 어떻게 설명할 수 있는가?

00 **아폰**: 공통점은 모두 $(x-1)$을 인수로 가지고 있고, 두 번째 인수 안의 모든 항은 + 부호만 있어.

01 **아패**: 두 번째 인수의 문자 앞에 계수가 모두 1이야.

02 **아폰**: 두 번째 인수의 각 항의 차수가 1씩 감소해.

03 **아패**: 그렇네. 그것도 공통점이네. 두 번째 인수의 계수가 모두 1인 것도 공통점이 될 것 같아.

04 **아폰**: 그럼 차이점은 뭐지?

05 **아패**: 두 번째 인수의 첫 항의 최고차수가 다르고, 항의 개수도 다르잖아.

06 **아폰**: 그걸 미처 몰랐네! 차이점이 뭘까 한참 골똘히 생각만 하고 나는 찾지 못했어. 그런데 공통점이 하나 더 있어. 아까부터 내가 생각했는데 지금 하고 있는 모든 식이 전개한 결과 항이 2개가 나와.

07 **아패**: 맞아. 그거야. 전개 결과에서 모양이 비슷해. x^2-1, x^3-1, x^4-1 이렇게.

08 **아폰**: 세 식의 전개 결과가 오직 2개의 항을 가지는 것은 아까 우리가 얘기한 것을 묻는 것 같아. $x-1$을 오른쪽에 곱할 때 x랑 곱해져서 오른쪽의 모든 항의 차수가 하나씩 올라가고, -1이랑 곱해지면 오른쪽 식에 부호가 마이너스가 되어서 나오니까 없어지는 거지. 소거라고 해야 하나? 그렇게 해서 남는 것이 x랑 첫 번째 항을 곱한 것하고 -1과 1을 곱한 -1이 남을 수밖에 없어.

09 **아패**: 맞아. 우리가 그렇게 이해했었어.

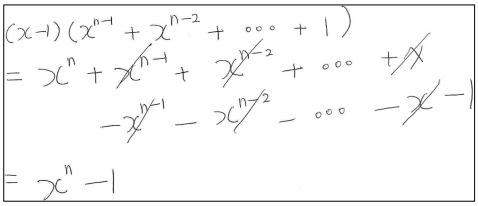
공통점과 차이점을 정리하는 과정을 통해 아그네시 모둠의 두 학생은 전개의 결과 x^n-1로 나타나는 식의 구조를 파악하고 명료화할 수 있었다(프로토콜 00-09). 그리고 전개과정에서 항이 소거되는 기법의 형태를 파악하였다. 이 기법은 학생들이 인수분해를 할 때 소거되는 항을 첨가하여 인수분해하는 "소거항 첨가 기법"의 기초가 된다. "소거항 첨가 기법"이란 전개 과정에서 항이 소거

되는 기법의 형태를 파악하여, 인수분해를 할 때 소거되는 항을 첨가하여 인수분해하는 기법이다.

탐구과제 Ⅰ의 문제 8에서 모든 학생들이 가로셈으로 전개의 일반화를 설명하였다. 그런데 소패 학생은 전개의 일반화를 세로셈으로 논리정연하게 설명하였다. 이 과정을 거꾸로 생각하여 인수분해한 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$을 "전개 일반화의 역 기법" 인수분해로 명명하였다. "전개 일반화의 역 기법"이란 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$을 전개한 결과가 x^n-1인 것을 이용하여 전개의 역 과정으로 인수분해를 생각하는 방법이다.

학생들은 탐구과제 Ⅰ의 전개 일반화 과정을 통해 다음 명제를 생성하여 이론화 하였다.

[명제(전개의 일반화)] : $n \geq 2$인 자연수에 대하여 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=x^n-1$이다.



[그림 2] 소패의 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$ 전개 일반화 세로셈 증명
[Fig. 2] Sopai' proof by column calculation for generalization in expanding an expression $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

2) x^n-1(단, $n \geq 2$인 자연수)의 완전한 인수분해

학생들은 탐구과제 Ⅱ와 Ⅲ에서 x^2-1부터 $x^{13}-1$의 인수분해를 지필 기법과 CAS 기법으로 시도하였으며 두 기법의 결과가 다른 경우 완전한 인수분해를 위해 두 기법을 조정하였다. [표 3]은 CAS 어플리케이션을 이용한 x^n-1의 인수분해 일반화와 증명의 과제에서 사용된 지필 기법과 CAS 기법의 범주를 정리한 것이고, [표 4]는 실제로 학생들이 사용한 구체적인 지필 기법과 CAS 기법을 모두 나열한 것이다. [표 3]과 [표 4]는 x^2-1부터 $x^{13}-1$의 완전한 인수분해 과정에서 학생들이 사용한 기법, 지필 기법과 CAS 기법의 결과가 다른 경우 두 결과를 조정하는 과정에서 학생들이 사용한 기법 그리고 탐구과제 Ⅳ의 증명활동 과정에서 학생들이 사용한 기법을 분석하는데 사용되었으며 이는 학생들이 x^n-1의 인수분해를 어떻게 일반화하는지를 관찰하는 준거가 되었다.

[표 3] x^n-1의 인수분해에 사용된 지필 기법과 CAS 기법 범주
[Table 3] The categories of paper-and-pencil techniques and CAS techniques in factoring of x^n-1

구분	기법	지필 기법	CAS 기법
Ⅰ	○전체 전개하기	○ 식을 지필로 직접 전개하여 동류항끼리 정리한 다음 차수 순으로 배열한다	○식을 CAS 전개한다 (CAS에 식을 입력한 후 엔터키를 눌러 전개한다)
Ⅱ	○부분 전개하기	○ 식의 특정부분의 몇 개의 인수를 지필로 전개한다	○ 식의 특정부분을 CAS 전개한다
Ⅲ	○전개 일반화하기	○ 문자 지수를 포함한 식을 전개한다	○ 문자 지수를 포함한 식의 전개를 CAS에서 시도한다 (CAS는 문자 지수를 포함한 식의 전개를 처리하지 못한다)
Ⅳ	○전체 인수분해하기	○ 가능한 지필 방법으로 직접 식을 인수분해한다	○ 식을 Factor(식) 명령어로 인수분해한다
Ⅴ	○부분 인수분해하기	○ 가능한 지필 방법으로 주어진 식의 특정부분을 인수분해한다	○ 식의 특정 부분을 Factor(식) 명령어로 인수분해한다
Ⅵ	○인수분해 일반화하기	○ 가능한 지필 방법으로 문자 지수를 포함한 식을 인수분해한다	○ 문자 지수를 포함한 식의 인수분해를 CAS에서 시도한다 (CAS는 문자 지수를 포함한 식의 인수분해를 처리하지 못한다)

[표 4] 학생들의 x^n-1의 인수분해 기법
[Table 4] Students' techniques in factoring of x^n-1

① 전개 기법(지필 전개 기법)
② 전개 일반화의 역 기법(지필 인수분해 기법)
③ 소거항 첨가 기법(지필 인수분해 기법)
④ 제곱차 또는 세제곱차(합) 기법(지필 인수분해 기법)
⑤ 두 항씩 공통인수 묶기 기법(지필 인수분해 기법)
⑥ 세 항씩 공통인수 묶기 기법(지필 인수분해 기법)
⑦ 네 항씩 공통인수 묶기 기법(지필 인수분해 기법)
⑧ 다섯 항씩 공통인수 묶기 기법(지필 인수분해 기법)
⑨ 인수정리-조립제법 기법(지필 인수분해 기법)
⑩ 복이차식의 인수분해 기법(지필 인수분해 기법)
⑪ 입력 후 엔터 기법(CAS 전개 기법)
⑫ $factor$(식) 기법(CAS 인수분해 기법)

먼저 x^2-1부터 $x^{13}-1$의 인수분해에 사용된 지필 기법과 CAS 기법의 일치여부를 모둠별로 표시하면 다음과 같다.

[표 5] $x^2-1\sim x^{13}-1$의 인수분해에서 두 기법의 일치여부
[Table 5] The coincidence of two techniques in factoring of $x^2-1\ \sim x^{13}-1$

x^n-1	아그네시	히파티아	소피 제르맹
x^2-1	일치	일치	일치
x^3-1	일치	일치	일치
x^4-1	불일치	일치	불일치
x^5-1	일치	일치	일치
x^6-1	불일치	일치	불일치
x^7-1	일치	일치	일치
x^8-1	불일치	일치	불일치
x^9-1	불일치	불일치	불일치
$x^{10}-1$	불일치	불일치	불일치
$x^{11}-1$	일치	일치	일치
$x^{12}-1$	불일치	일치	불일치
$x^{13}-1$	일치	일치	일치

아그네시 모둠과 소피 제르맹 모둠은 지필 기법에서 주로 전개 일반화의 역 기법을 사용하여 인수분해하였다. 그래서 지수가 소수인 x^n-1의 인수분해 결과는 모두 CAS 기법과 일치하였지만, 지수가 소수가 아닌 x^n-1의 인수분해 결과는 모두 CAS 기법과 일치하지 않았다. 히파티아 모둠은 x^4-1, x^6-1, x^8-1, $x^{12}-1$의 지필 기법 인수분해에서 전개 일반화의 역 기법을 사용하지 않고 제곱차 기법으로 완전한 인수분해를 유도하여 CAS 기법의 결과와 일치시키는 모습을 보여주었다. 두 기법이 불일치한 경우에는 두 기법의 조정 작업이 이루어졌다.

다음은 아그네시 모둠에서 x^8-1의 인수분해와 완전한 인수분해의 조정 과정을 보여주는 사례이다.

탐구과제 Ⅲ 1. 다음 식을 인수분해하시오. ② x^8-1

10 **아폰**: x^8-1은 $(x-1)(x^7+x^6+\cdots+x+1)$로 인수분해 됐어.

11 **아패**: 나도 그렇게 했어.

12 **아폰**: CAS 결과는 어떻게 나올까? (CAS에$factor(x^8-1)$을 입력한다. (놀라며) 인수가 4개야.

13 **아패**: 어떻게 해야 하지? $(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$을 더 많이 인수분해해야 한다는 거잖아? (한참을 곰곰이 생각한다.) 그럼 먼저 $(x+1)$ 공통인수가 나오도록 두 항씩 묶으면 $(x+1)(x^6+x^4+x^2+1)$이 되고, 여기서 다시 한 번 더 (x^2+1) 공통인수가 나오도록 두 항씩 묶으면 $(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$이 나와. 그렇게 하면 CAS의 결과인 $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$와 같아져.

14 **아폰**: 맞아! 그런데 내가 쓰는 방법 있잖아? CAS에서 이 식($(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$)을 전개하는 거야. (CAS에 $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)$을 입력하고 엔터를 친다) 봐! 같잖아?

아그네시 모둠은 x^8-1의 인수분해를 전개 일반화의

역 기법을 적용하여 지필 기법으로 인수분해하였다. 그 결과는 CAS 기법의 결과와 다르게 나타났다. 이 때 아패는 CAS 기법의 결과를 완전한 인수분해로 생각하였고 $(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$을 더 인수분해해야 한다고 말함으로써 CAS 기법의 결과에 신뢰를 보였다(프로토콜 13).

이때 CAS는 인지 자극의 역할을 하였다. 공통인수를 묶을 생각을 하지 못하고 인수분해가 끝난 것으로 생각하고 있던 아패와 아폰은 CAS의 결과를 보고 나서 완전한 인수분해가 되지 않았다는 것을 인식하게 되었고, 그러한 인식의 순간 이후에 두 학생은 어떻게 하면 될지 고민을 하게 되었다. 아패는 $(x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ 인수에서 두 항씩 묶으면 $(x+1)$ 공통인수를 더 만들 수 있다고 생각하였고, 같은 과정을 두 번 반복하여 적용하였다(프로토콜 13).

$$\begin{aligned}&x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=x^6(x+1)+x^4(x+1)+x^2(x+1)+x+1\\&=(x+1)(x^6+x^4+x^2+1)\\&=(x+1)\{x^4(x^2+1)+x^2+1\}\\&=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)\end{aligned}$$

아폰은 아패가 하는 것을 지켜본 후 CAS 전개를 이용하면 쉽게 두 표상을 일치시킬 수 있음을 찾아내었다(프로토콜 14).

대부분 학생의 경우 차수가 높으면 제곱차를 이용한 인수분해를 잘 적용하지 못하는 경우가 있으나, 히파티아 모둠의 히폰은 지필 기법 인수분해를 할 때 전개 일반화의 역 기법을 적용하지 않고 제곱차를 이용하여 인수분해함으로써 지필 기법의 결과에서 완전한 인수분해를 구하였으며 이는 CAS 기법의 결과와 일치하였다.

소피 제르맹 모둠의 인수분해 과정을 기술하면 다음과 같다. 소패는 $(x^7+x^6+\cdots+x+1)$의 앞의 4개 항에서 공통인수 x^4을 묶어 (x^3+x^2+x+1) 항을 만들어낸 후, 두 항에서 공통인수 (x^3+x^2+x+1)을 묶어내어 $(x^3+x^2+x+1)(x^4+1)$로 인수분해하였다. 소폰은 아패와 같은 V-⑤ → V-⑤ 방법으로 인수분해하였으며, 소폰의 풀이를 지켜보던 소패는 CAS를 사용한 *factor*(식) 기법을 사용하며 더 간단하게 조정을 해결할 수 있다는 것을 발견하였다. 소피 제르맹 모둠은 두 기법을 조정하기 위해 지필 기법의 결과에서 CAS 기법의 결과로 인수분해하는 세 가지 방법을 시도하였으며 CAS 기법의 결과에서 지필 기법의 결과로 이동하는 조정 과정은 시도하지 않았다.

다음은 세 모둠이 지필 기법의 결과와 CAS 기법의 결과를 서로 조정하는 방법을 분석하여 표로 나타낸 것이다.

[표 6] x^8-1의 완전한 인수분해를 위한 두 기법의 조정
[Table 6] Adjustment between two different techniques for complete factorization of x^8-1

모둠	두 기법의 조정 방향	두 기법의 조정
아그네시	지필 → CAS	V-⑤ → V-⑤
	CAS → 지필	Ⅱ-⑪
히파티아	일치	일치
소피 제르맹	지필 → CAS	V-⑦ → V-⑤
	지필 → CAS	V-⑤ → V-⑤
	지필 → CAS	V-⑫

x^2-1에서 $x^{13}-1$의 인수분해를 지필 기법과 CAS 기법으로 시도하고 두 기법의 결과가 다른 경우 두 기법을 조정하는 과정에서 학생들은 완전한 인수분해를 이론화하였다. 이 과정에서 나타난 몇 가지 특징은 다음과 같다.

첫째, 학생들은 지필 기법의 결과와 CAS 기법의 결과 중 CAS 기법의 결과를 완전한 인수분해로 더 신뢰하였다.

둘째, 전체 식을 인수분해하거나 전개하여 조정하기보다는 하위식을 부분적으로 인수분해하거나 전개하는 방식을 선호하였다. 그리고 지필 기법의 초기 인수분해에서는 전개 일반화의 역 기법을 주로 사용하는데, 이는 탐구과제 I 의 영향으로 생각된다.

셋째, 두 기법을 조정하는 방향의 관점에서 지필 기법의 결과를 수정하여 CAS 기법의 결과와 일치시키는 방법을 선호하였다. CAS 기법의 결과가 더 쉽고 간편하기는 하지만 CAS가 블랙박스적 특성을 지니기 때문에 학생들은 스스로 이해하고 풀이한 지필 기법의 결과에서 시작하여 CAS 기법의 결과를 만들어내어 일치시키는 방향을 선택하였다. 즉, 대부분의 경우 학생들은 CAS 기법의 결과를 확인한 후 지필 기법의 결과를 완전한 인

수분해가 되도록 더 인수분해하였는데, 이 때 CAS 기법의 결과는 식을 다양한 각도에서 생각하게 하는 계기가 되었다.

넷째, 학생들은 자신이 주로 많이 사용하는 기법을 선호하는 경향이 있었다. CAS 기법을 사용하여 조정하는 경우 아그네시 모둠은 CAS 전개 기법을, 소피 제르맹 모둠은 CAS 인수분해 기법을 항상 사용하였다. 지필 인수분해에서도 아그네시 모둠과 소피 제르맹 모둠은 전개 일반화의 역 기법을, 히파티아 모둠은 제곱차 기법의 사용을 더 선호하였다.

3) 추측과 추측의 수정

x^n-1의 인수분해를 일반화하기 위하여 몇 가지 추측들이 만들어졌고, 이 추측들을 수정하는 이론화가 이루어졌다. 여기서 이론화는 정교화로 보았다. 학생들은 탐구과제 Ⅱ에서 x^2-1부터 x^6-1까지의 인수분해 과제 활동 후 인수분해의 일반화를 위한 추측을 하고, 이어서 탐구과제 Ⅲ에서 x^7-1부터 $x^{13}-1$까지의 인수분해 과제 활동을 마치고 다시 앞의 추측을 수정하고 정교화하는 과정을 실행하였다.

다음은 x^2-1부터 $x^{13}-1$까지의 탐구과제 Ⅱ, Ⅲ의 과정을 거치면서 세 모둠의 추측과 추측의 수정 이론화 과정을 모둠별로 정리한 것이다.

(1) 아그네시 모둠의 추측과 추측의 수정 이론화

① n이 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

→ n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

→ n이 2 또는 3의 배수를 제외한 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

→ n이 3의 배수이면 x^n-1의 인수는 3개이다.

→ n이 3의 배수이면 x^n-1의 인수는 3개 이상이다.

→ n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

② n이 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다.

→ n이 2보다 큰 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다.

→ 소수가 아닐 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다.

③ n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다.

→ n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x-1)(x+1)$을 인수로 가진다.

(2) 히파티아 모둠의 추측과 추측의 수정 이론화

① $n=\frac{3}{2}$ 또는 $n>1$인 자연수일 때 $x^{2n-1}-1$의 인수는 오직 2개이다.

→ n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

② $n>1$인 자연수일 때 $x^{2n}-1$의 인수는 2개보다 많다.

→ 소수가 아닐 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다.

③ $n\geq 1$인 자연수일 때 $x^{2n}-1$은 $(x+1)$을 인수로 가진다.

→ $n\geq 1$인 자연수일 때 $x^{2n}-1$은 $(x-1)(x+1)$을 인수로 가진다.

(3) 소피 제르맹 모둠의 추측과 추측의 수정 이론화

① $n\geq 2$이고 상수항이 -1이면 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

→ n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.

② n이 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다.

→ $n\geq 4$이면서 짝수일 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다.

→ 소수가 아닐 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다.

③ n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다.

다음은 아그네시 모둠에서 이루어진 탐구과제 Ⅱ의 추측 활동의 일부이다.

탐구과제 Ⅱ
2. 앞의 탐구과제 활동을 바탕으로 x^n-1(단, $n\geq 2$인 자연수)의 인수분해 결과는 어떤 수 n에 대하여 다음이 성립하게 되는지 추측하시오. ① 오직 2개의 인수만 존재한다. ② 인수가 2개보다 많다. ③ $(x+1)$을 인수로 가진다.

15 **아패**: 앞의 문제에서 풀어본 결과를 보면 홀수 3, 5일 때 2개 인수가 나온 걸로 봐서 'n이 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'고 추측할 수 있어.

16 **아폰**: 그렇지만 n이 2일 때도 인수가 2개잖아.

17 **아패**: 그렇네. 그럼 'n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'고 추측하면 되겠다.

18 **아폰**: 인수의 개수가 2개보다 많은 경우는 당연히 짝수 아닐까? 'n이 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개

보다 많다'고 추측해야 해.

19 **아패**: 아니야. 2를 제외해야 할 것 같아. 아까 n이 2일 때 인수가 2개였으니까.

20 **아폰**: 그렇네. 그럼 'n이 2보다 큰 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다'로 바꿔야겠어.

21 **아패**: n이 얼마일 때 $(x+1)$을 인수로 가질까?

22 **아폰**: $(x+1)$을 인수로 가지는 2, 4, 6이 모두 짝수야. 그러니까 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다'고 해야겠어.

아그네시 모둠의 두 학생은 문제 1에서 지필 기법과 CAS 기법의 조정을 통해 얻은 완전한 인수분해의 결과를 확인하면서 문제 2를 추측하였다. 이때 지필 기법의 결과들은 대부분 CAS 기법의 결과로 조정되었고, CAS 기법의 결과가 최종 인수분해로 받아들여졌기 때문에, 대체로 CAS 기법의 결과에 근거하여 추측이 이루어지게 되었다. 어떤 수 n에 대하여 x^n-1이 오직 2개의 인수만 가지는가에 대한 추측에서 아패는 'n이 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'를 추측하였다가, $n=2$는 짝수인데도 인수가 2개뿐인 것이 확인되었기 때문에 수정하여 'n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'로 추측하였다(프로토콜 15-17). 수정을 한 추측이긴 하지만 아직 바르지 못한 추측의 상태이다. 그리고 두 번째 어떤 수 n에 대하여 x^n-1의 인수가 2개보다 많은가에 대한 추측은 'n이 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다'가 $n=2$일 때 성립하지 않으므로 'n이 2보다 큰 짝수일 때 x^n-1은 인수가 2개보다 많다'로 수정되었지만 역시 바르지 못한 추측의 상태이다(프로토콜 18-20). 아패와 아폰은 x^2-1부터 x^6-1까지 완전한 인수분해의 결과를 분석하여 'n이 2보다 큰 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다'는 틀린 추측과 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다'라는 바른 추측을 만들어 냈다. 아그네시 모둠은 추측 과정에서 추가적인 CAS 사용을 하지 않았으며, 이 과정에서 바르지 못한 추측을 하게 되는 이유는 적은 자료의 양에 의존하였기 때문에 학생들의 판단에 착오가 생긴 것으로 생각된다.

다음은 소피 제르맹 모둠에서 이루어진 탐구과제 Ⅱ의 추측 활동의 일부이다.

23 **소폰**: x^n-1의 인수가 언제 오직 2개인지 모르겠어.

24 **소패**: 앞에서 x^3-1, x^4-1이 각각 $(x-1)(x^2+x+1)$, $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$로 인수분해 되었잖아. 그러니까 내 생각에는 '$n\geq 2$이고 상수항이 -1이면 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'고 할 수 있을 것 같아.

25 **소폰**: 아, 그럼 우리가 지금까지 인수분해한 것은 모두 인수가 2개인 거네.

26 **소패**: 그렇지.

27 **소폰**: 잠깐, 그런데 x^4-1을 CAS로 인수분해한 결과는 달랐지 않아? $(x^2+1)(x+1)(x-1)$ 이었어. 그러면 $n=4$일 때 인수가 2개가 아니라 3개라는 얘기잖아! 인수가 2개보다 많은 경우를 추측하면 'n이 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다' 아닐까?

28 **소패**: 아니지. $n=2$는 인수가 2개니까 빠져야 할 것 같아.

29 **소폰**: $n=6$일 때 인수가 4개니까 2개보다 많은 거 맞지! 그러니까 '$n\geq 4$이면서 짝수일 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'라고 하면 되겠다.

30 **소패**: 그럼 오직 2개의 인수만 가지는 경우를 우리가 앞에서 잘못한 것 같아. 오직 2개의 인수만 가지는 경우를 살펴보면 $n=2, 3, 5$야. 이 수들의 공통점이 뭘까? 홀수는 아닌 것 같고 … 짝수도 아니고 ….

31 **소폰**: ($n=2, 3, 5$를 입으로 중얼거린다) $n=7$을 CAS로 한번 해보자. (CAS에 $factor(x^7-1)$을 실행한다.) 맞아! x^7-1의 인수분해도 $(x-1)(x^6+x^5+\cdots+x+1)$로 인수가 2개뿐이야. 내 추측은 소수야. $n=2, 3, 5, 7$에서 성립하잖아. 2, 3, 5, 7이 뭐야? 소수잖아. 그러니까 'n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'라고 추측하면 될 것 같아.

32 **소패**: 너의 말이 맞는 것 같기도 해. 그럼 $(x+1)$을 인수로 가지는 경우는 언제지? $(x+1)$을 인수로 갖는 어떤 수 n을 찾아야 해. 지금까지 한 걸 보면 $n=2, 4, 6$일 때 $(x+1)$을 인수로 가졌으니까 $n=8$일 때를 한번 확인해 보자. (CAS에 $factor(x^8-1)$을 실행한다.) $(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$이야. 이것도 $(x+1)$을 인수로 가지고 있어.

33 **소폰**: 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다'고 하면 맞는 것 같아. 그리고 인수가 4개니까 두 번째 추측에서 '$n\geq 4$이면서 짝수일 때 x^n-1의 인

수는 3개 이상이다'는 추측도 맞는 게 확실해.

34 **소패**: 그렇겠다.

소피 제르맹 모둠의 두 학생은 x^2-1부터 x^6-1까지 전개 일반화의 역 기법에 의한 지필 인수분해 결과를 생각하여 '$n \geq 2$이고 상수항이 -1이면 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'는 잘못된 추측을 먼저 하였다(프로토콜 23-26). 이때 소폰은 x^4-1의 CAS 인수분해 결과인 $(x^2+1)(x+1)(x-1)$을 제시하면서 소폰의 추측이 잘못되었다는 것을 지적하였고, 동시에 두 번째 추측 'n이 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다'를 이끌어 내었다(프로토콜 27). 이 추측은 $n=2$를 제외해야 한다는 소패의 의견을 받아들여 '$n \geq 4$이면서 짝수일 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'로 수정되었다(프로토콜 28-29). 두 번째 추측이 이루어진 후 두 학생의 대화는 다시 첫 번째 추측으로 되돌아갔다. 인수가 2개 나오는 경우의 $n=2,\ 3,\ 5$를 나열하고 이들의 공통점을 찾으려고 노력하였으며, 소폰이 $n=2, 3, 5$를 중얼거리며 CAS에서 x^7-1의 인수분해 결과를 확인한 후 'n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'를 추측하게 되었다(프로토콜 30-31). 세 번째 추측은 $n=2,\ 4,\ 6$일 때 $(x+1)$을 인수로 가진다는 것을 파악한 후 CAS에서 x^8-1을 확인하고 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다'로 추측하게 되었다(프로토콜 32-33). x^8-1의 CAS 기법 확인은 두 번째 추측을 한 번 더 확인하는 계기가 되기도 하였다. 소피 제르맹 모둠은 추가적으로 CAS를 사용하여 추측을 수정($factor(x^7-1)$)하거나 확신($factor(x^8-1)$)하게 되었다. CAS 기법으로 x^7-1을 확인하는 인식론적 순간을 살펴보면, 소패와 소폰은 "홀수는 아닌 것 같고… 짝수도 아니고…"라고 혼란스러운 사고를 하고 있던 와중에 $n=2,\ 3,\ 5$를 중얼거리다가 x^7-1의 인수분해를 CAS로 확인하는 인식론적 순간에 '소수'를 떠올렸다. Kuhn(1999)의 사고의 혁명이라고 하는 과정이 CAS를 통해 이루어지는 순간이라고 보여지는데, 갑자기 떠오르는 번뜩임이 영감을 주는 과정에서 CAS가 역할을 담당했다고 볼 수 있다. 소패는 이것을 계기로 홀수나 짝수라는 사고를 소수로 변화시키고 바꾸어 나가는 모습을 볼 수 있다. 소패가 x^8-1을 CAS 기법으로 확인하는 과정을 살펴보면 앞서 탐구과제에서 $n=2,\ 4,\ 6$에서 $(x+1)$을 인수로 가진다는 사실에서 짝수라는 것을 이미 추측하였으나 확인 차원에서 x^8-1의 CAS 인수분해를 실행하였다. 그리고 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다'라고 하는 추측을 확신하면서 마무리하였다. CAS 기법의 결과를 보고 지필 기법의 결과와 일치한다는 것을 확인하고 풀이를 마무리하는 것과 자신이 추측하는 사실에 대하여 타당한 예를 확인한 후 추측에 대한 확신을 갖게 되는 경우 CAS는 유사한 역할을 한다고 볼 수 있다.

학생들의 추측과 추측의 수정 이론화에서 나타난 특징은 다음과 같다.

첫째, 자료의 양이 많을수록 추측과 추측의 수정이 참인 명제에 가까워졌다. 탐구과제 Ⅱ에서 x^2-1부터 x^6-1까지 인수분해 과제 활동 후 이루어진 추측보다 x^7-1부터 $x^{13}-1$까지 인수분해 과제 활동을 마친 탐구과제 Ⅲ에서 추측이 더 정교화 되었다.

둘째, 추측 과정에 CAS가 사용된 경우 CAS 기법의 결과는 학생들의 사고에 개입하였다. 학생들은 추측에 대한 확신을 주는 예를 확인하였고, 추측을 반전시키는 예를 통해 사고 수정의 기회를 제공받았다.

4) 증명

학생들은 탐구과제 Ⅳ에서 증명을 통해 x^n-1의 인수분해 일반화를 이론화하였다.

[명제 1] "모든 자연수 n에 대하여 x^n-1 (단, $n \geq 2$)은 $(x-1)$을 인수로 가진다"를 아그네시 모둠과 히파티아 모둠은 다음과 같이 증명하였다.

35 **아폰**: 난 여기서 모든 자연수에 대하여 성립하는지 n 대신에 수를 넣어봤어. 이게 증명인지는 모르겠는데, 앞에서도 했듯이 차례로 확인을 했더니 짝수든 홀수든 다 어디냐… (탐구과제 Ⅱ와 Ⅲ의 문제 1을 손으로 짚는다.) 요런 데에서 $x-1$, 또 $x-1$ 다 같더라구. 나는 이렇게 다 수를 넣어가지구, 이게 맞는 거 같다 그랬는데 너는 어떻게 생각해?

36 **아패**: 그런데 수를 차례로 넣어보는 건 증명이라고 보기엔 좀 그런 것 같아. 만약 $n=100$을 넣었을 때 될지 안 될지 모르잖아.

37 **아폰**: 나도 좀 그렇게 생각해. 너는 증명했어?

38 **아패**: 우리가 앞에서 배운 걸 따르면 전개할 때 이 식 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+x^{n-4}+\cdots+x+1)$을 전개하면 x^n-1이 됐잖아? 그래서 나는 이걸 거꾸로 돌아가 봤어. 거꾸로 돌아가 보면 x^n-1이 $(x-1)$을 인수로 가진다는 것을 보일 수 있을 것 같아서.

39 **아폰**: 어떻게?

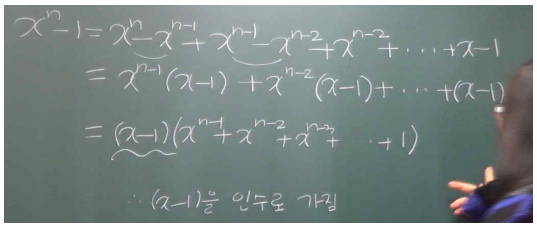
40 **아패**: 맨 앞과 맨 뒤의 항은 그냥 이렇게 남고, 그 다음 하나 작은 차수의 항들은 다 지워졌다는 소리겠지? 그래서 지금 문제로 돌아와서 $(x-1)$을 인수로 가진다는 것을 보이기 위해 공통인수로 $(x-1)$을 만들어 보려고 했어. 그렇게 하기 위해서 주어진 식 x^n-1에 x^{n-1}을 빼주고 더해줘서 식은 같게 하고, 더 낮은 차수를 계속 그렇게 빼주고 더해주고를 했어.

$x^n-x^{n-1}+x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-2}+\cdots-x+x-1$

로 이렇게. 그리고는 앞에서부터 두 항끼리 묶어서 공통인수 x^{n-1}이 나오고 $(x-1)$, 뒤의 두 항에서도 공통인수 x^{n-2}이 나오고 $(x-1)$해서 쭉 나열이 돼. 그리고 전체에서 $(x-1)$ 공통인수를 뽑을 수 있어.

41 **아폰**: 그렇겠다.

42 **아패**: 이렇게 해서 마지막에 공통인 $(x-1)$로 묶으면 이렇게 돼서 모든 자연수 n에 대하여 x^n-1은 $x-1$을 인수로 가진다는 것을 알 수 있어.



[그림 3] 아그네시 모둠의 [명제 1] 증명
[Fig. 3] Agnesi group's proof of proposition 1

43 **히패**: 모든 자연수 n에 대하여 x^n-1은 $(x-1)$을 인수로 가진다는 것을 증명할 때, 나는 n이 뭐가 되든지 간에 $x-1$을 인수로 가진다면 x^n-1에서 x에 1을 대입했을 때 식의 값이 0이 되면 된다고 생각했어.

44 **히폰**: 그래, 1^n-1은 항상 0이야. $n=2$일 때 $1^2-1=1-1=0$이 되고, $n=3$일 때도 $1^3-1=1-1=0$이 되잖아.

45 **히패**: 그러니까 인수정리를 쓰면 $(x-1)$ 일차인수를 갖게 돼. 그래서 $x^n-1=(x-1)\times Q(x)$ 라는 식이 되고, $(x-1)$은 x^n-1의 인수라고 할 수 있어.

아그네시 모둠은 '모든 자연수 n에 대하여 x^n-1은 $(x-1)$을 인수로 가진다'의 증명에서 소거항 첨가 기법을 사용하여 증명하였고, 히파티아 모둠은 인수정리를 이용하여 명제를 간단히 증명하였다. 소피 제르맹 모둠도 아그네시 모둠과 같은 방법으로 증명을 완성하였다. 그리하여 x^n-1은 항상 $(x-1)$을 인수로 가지는 것은 물론이고, $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ (단, n은 자연수)로 인수분해된다는 것이 증명되었다.

세 모둠은 [명제 2] "n이 홀수일 때 x^n+1 (단, $n\geq 2$)은 $(x+1)$을 인수로 가진다"의 증명에서도 [명제 1]과 동일한 지필 기법을 사용하였다.

[표 7] [명제 1]과 [명제 2]의 모둠별 증명 방법
[Table 7] Proof methods used in proposition 1 and proposition 2 by each group

모둠	증명 방법
아그네시	Ⅳ-③
히파티아	Ⅳ-⑨
소피 제르맹	Ⅳ-③

[명제 3] "n이 짝수일 때 x^n-1 (단, $n\geq 2$)은 $(x+1)$을 인수로 가진다"를 증명하기 위해 세 모둠은 나름대로의 방식을 채택하여 증명을 완성하였다. 다음은 아그네시 모둠과 소피 제르맹 모둠이 각각 증명한 방법이다.

(아그네시 모둠의 증명)
$n=2k$ 라고 두면
$x^n-1=x^{2k}-1=(x^2)^k-1$이고,
$x^2=A$라고 치환하면

$$A^k-1=(A-1)(A^{k-1}+A^{k-2}+\cdots+A+1)$$
$$=(x^2-1)(x^{2k-2}+x^{2k-4}\cdots+x^2+1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^{2k-2}+x^{2k-4}\cdots+x^2+1)$$

(소피 제르맹 모둠의 증명)

$n=2k$ 이면

$$x^n-1=x^{2k}-1=(x-1)(x^{2k-1}+x^{2k-2}+\cdots+x+1)$$
$$=(x-1)\{x^{2k-2}(x+1)+x^{2k-4}(x+1)+\cdots+(x+1)\}$$
$$=(x-1)(x+1)(x^{2k-2}+x^{2k-4}+\cdots+1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^{n-2}+x^{n-4}+\cdots+1)$$

다음은 히파티아 모둠이 제곱차 기법을 이용하고 지수가 홀수일 때와 짝수일 때를 나누어 증명한 방법이다.

46 **히패**: 그런데 나는 n이 짝수면 $2k$라고 둘 수 있잖아? 그래서 $factor(x^{2k}-1)$을 CAS에 입력해 봤어. 그랬더니 결과가 $=(x^k+1)(x^k-1)$이라고 나왔어. 그러면 지금 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 갖는다'는 이 문제는 틀린 게 아닐까?

47 **히폰**: 하지만 인수분해가 끝나지 않았잖아? $(x^k-1)=(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)$로 더 인수분해 되잖아?

48 **히패**: 그렇네. 그러면 k가 홀수이면 (x^k+1)도 $(x+1)(x^{k-1}+\cdots+1)$로 더 인수분해돼. 이 과정을 식으로 쓰면 이렇게 돼.

$$x^n-1=x^{2k}-1=(x^k-1)(x^k+1)$$
$$=(x-1)(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1)(x+1)(x^{k-1}+\cdots+1)$$

49 **히폰**: 그러면 $n=2k$에서 k가 짝수일 때는 (x^k+1)이 $(x+1)$ 인수를 갖는다고 할 수 없잖아?

50 **히패**: k가 짝수일 때 $(x+1)$ 인수를 찾는 것이 문제인 것 같아. k가 짝수이면 이렇게 생각할 수 있어.

$$x^n-1=x^{2k}-1$$
$$=(x^k-1)(x^k+1)$$
$$=(x^{\frac{k}{2}}-1)(x^{\frac{k}{2}}+1)(x^k+1)$$

여기서 만약 $\frac{k}{2}$가 홀수이면 $(x^{\frac{k}{2}}+1)$이 $(x+1)$ 인수를 가지게 돼. 물론 $(x^{\frac{k}{2}}-1)$은 $(x-1)$ 인수를 가지게 되구. 그런데 만약 $\frac{k}{2}$도 짝수라면

$$=(x^{\frac{k}{4}}-1)(x^{\frac{k}{4}}+1)(x^{\frac{k}{2}}+1)(x^k+1)$$

여기서 만약 $\frac{k}{4}$가 홀수이면 $(x^{\frac{k}{4}}+1)$이 $(x+1)$ 인수를 가지게 돼. 그런데 만약 $\frac{k}{4}$가 짝수이고 계속해서 이런 식으로 $\frac{k}{4}$, $\frac{k}{8}$, $\frac{k}{16}$, $\cdots$ 으로 이 수들이 계속 짝수인 경우는 언젠가는 x^2-1이 되어 $(x+1)$ 인수를 가지게 되는 거야. 이렇게 될 것 같지 않아?

[표 8] [명제 3] 의 모둠별 증명 방법
[Table 8] Proof methods used in proposition 3 by each group

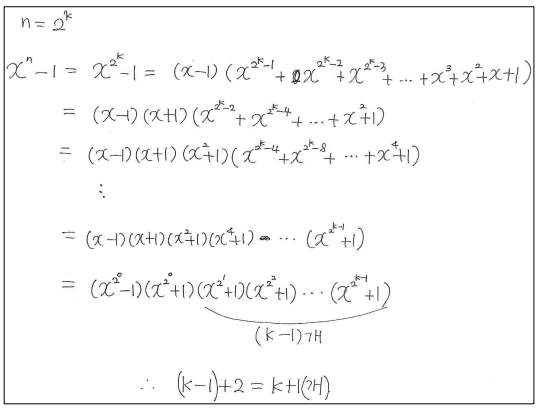
모둠	증명 방법
아그네시	$n=2k \rightarrow x^2=A$ 치환 → Ⅳ-② → Ⅴ-④
히파티아	$n=2k$ → Ⅳ-④ → Ⅴ-②, (k가 홀수일 때) $n=2k$ → Ⅳ-④ → Ⅴ-④ 반복, (k가 짝수일 때)
소피 제르맹	$n=2k$ → Ⅳ-② → Ⅴ-⑤

[명제 4] "n이 2의 거듭제곱일 때 x^n-1 (단, $n\geq 2$)은 몇 개의 인수를 가지는가?"의 증명은 아그네시 모둠과 히파티아 모둠에서 증명을 하였고, 소피 제르맹 모둠은 증명에 실패하였다. [명제 4]의 경우 "n이 2^k일 때 x^n-1 (단, $n\geq 2$)은 $k+1$개의 인수를 가진다"라는 명제로 진술할 수 있으나, 학생들의 자유로운 사고를 방해할 수 있다는 생각에서 결과를 명시하지 않은 질문 형태를 유지하였다.

아그네시 모둠의 아폰은 2의 거듭제곱과 2의 배수를 잠시 혼동하였지만 $x^n-1=x^{2^k}-1$로 표기한 후 $k=1, 2, 3$을 대입했을 때 인수의 개수가 2, 3, 4인 점을 발견하고 k의 값이 1씩 증가하면 인수의 개수도 1씩 증가할 것이라고 먼저 생각하게 되었다. 아폰이 발견한 규칙성에 근거하여 아패는 $x^{2^k}-1$의 인수의 개수가 $k+1$이 될 것이라고 추측하고 증명에 임하였다. x^n-1을 전개 일반화의 역 기법을 이용하여 $x^{2^k}-1=(x-1)(x^{2^k-1}+x^{2^k-2}+x^{2^k-3}+\cdots+x+1)$로 인수분해한 후 $(x^{2^k-1}+x^{2^k-2}+x^{2^k-3}+\cdots+x+1)$ 인수를 앞에

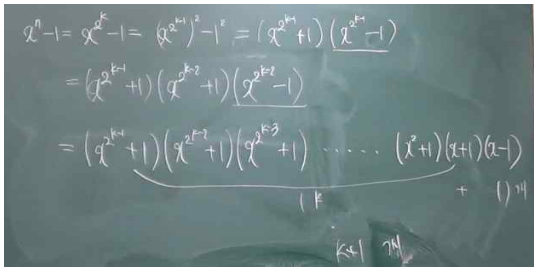
서부터 두 개항씩 묶어 공통인수를 묶어내는 작업을 계속하여 $(x^{2^0}-1)(x^{2^0}+1)(x^{2^1}+1)(x^{2^2}+1)\cdots(x^{2^{k-1}}+1)$라는 결과를 구하였다. 이 때 인수의 개수는 $(x^{2^1}+1)$ 인수에서 $(x^{2^{k-1}}+1)$까지가 $k-1$개이고 x항의 지수가 2^0인 $(x^{2^0}-1)$, $(x^{2^0}+1)$의 두 항이 더해지니까 결국 $k+1$개라고 주장하였다. 이에 교사는 2^{k-1}을 처음에 사용한 문자 n의 식 $\frac{2^k}{2}=\frac{n}{2}$으로 환원하여,

$x^n-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^{2^2}+1)\cdots(x^{\frac{n}{2}}+1)$ (단, n은 2의 거듭제곱)으로 완전한 인수분해의 일반화를 마무리하도록 도와주었다.



[그림 4] 아그네시 모둠의 [명제 4] 증명
[Fig. 4] Agnesi group's proof of proposition 4

히파티아 모둠의 히폰은 $x^n-1=x^{2^k}-1=\left(x^{2^{k-1}}\right)^2-1^2$으로 두고 제곱차 기법을 이용한 인수분해를 연속 적용하여 $(x^{2^{k-1}}+1)(x^{2^{k-2}}+1)(x^{2^{k-3}}+1)\cdots(x^2+1)(x+1)(x-1)$을 얻었다. 이 때 $(x^{2^{k-1}}+1)$이 더 인수분해 되는지를 알아보기 위해 CAS를 사용하여 2의 거듭제곱을 지수로 가지는 x^2+1, x^4+1, x^8+1, $x^{16}+1$, $x^{1024}+1$이 인수분해되지 않음을 확인하고 인수의 개수를 정하였다. 인수의 개수는 $(x^{2^{k-1}}+1)$ 인수부터 $(x+1)$까지 k개와 $(x-1)$ 인수를 더해서 $k+1$개라고 답하였다.



[그림 5] 히파티아 모둠의 [명제 4] 증명
[Fig. 5] Hypatia group's proof of proposition 4

[표 9] [명제 4] 의 모둠별 증명 방법
[Table 9] Proof methods used in proposition 4 by each group

모둠	증명 방법
아그네시	$n=2^k$ → Ⅳ-② → Ⅴ-⑤ 반복
히파티아	$n=2^k$ → Ⅳ-④ → Ⅴ-④ 반복
소피 제르맹	증명 실패

세 모둠의 학생들 모두 마지막 증명 과제인 [명제 5] "n이 소수일 때 x^n-1(단, $n\geq 2$)의 인수는 오직 2개이다"와 [명제 6] "n이 소수가 아닐 때 x^n-1(단, $n\geq 2$)의 인수는 3개 이상이다"의 증명을 어디서부터 어떻게 시작해야 하는지에 대하여 힘들어 하였다. 히파티아 모둠과 소피 제르맹 모둠은 증명의 실마리를 찾지 못하고 증명에 실패하였으며, 아그네시 모둠의 아패는 소수가 아닌 수가 합성수라는 사실과 'n이 3의 배수이면 x^n-1의 인수가 3개 이상이다'라는 추측의 증명에 힘입어 [명제 6]을 증명하였다.

(아그네시 모둠의 증명)
n이 소수가 아니므로 1이 아닌 두 자연수 p, q의 곱으로 적을 수 있다.
$x^n-1=x^{p\cdot q}-1=(x^p)^q-1$
$=(x^p-1)\{(x^p)^{q-1}+(x^p)^{q-2}+\cdots+1\}$
$=(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)\{(x^p)^{q-1}+(x^p)^{q-2}+\cdots+1\}$
이 때, 두 인수
$(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)$ 와 $\{(x^p)^{q-1}+(x^p)^{q-2}+\cdots+1\}$

는 더 인수분해될 수도 있다.
∴ n이 소수가 아닐 때, $x^n-1(n\geq 2)$은 3개 이상의 인수를 가진다.

[명제 5]는 증명하지 못하였지만 아패의 증명을 보고 있던 아폰이 소수를 두 자연수의 곱으로 표현하는 방법이 $n=1\times p$로 유일하기 때문에 x^p-1의 인수분해 결과가 하나로 나타나고 그 때 인수가 오직 2개라는 설명으로 증명을 대신하였다. 그리고 아패는 지금까지의 활동을 종합하면서 'x^n-1의 인수의 개수는 n의 약수의 개수와 같다'는 추측을 하였다. 이 추측은 x^n-1의 인수분해 일반화에서 중요한 귀결점이 되고 있다. 다른 모둠의 학생들도 아패의 이 추측에 대해 그럴 수 있겠다는 긍정적인 반응을 보였고, x^n-1의 인수분해 일반화 활동이 아주 많은 내용을 담고 있다는 것을 이해하게 되었다.

학생들의 증명 활동은 활동 그 자체가 이론화의 과정이었다. 과정을 분석한 결과, 증명은 전체적으로 지필 기법-소거항 첨가 기법, 전개 일반화의 역 기법, 제곱차 기법, 인수정리 기법-으로 진행되었지만 지필 기법과 CAS 기법을 조정하면서 완전한 인수분해를 하였던 경험들이 증명과정에서 다수 사용되었다. 그리고 학생들은 증명과정에서도 명확하지 않는 부분, 예를 들면 ($x^{2\text{의 거듭제곱}}+1$)이 더 이상 인수분해되지 않는다는 사실을 CAS 기법을 사용하여 확인하였다.

이상에서 과제-기법-이론화 관점에서 학생들은 CAS 어플리케이션을 사용하여 x^n-1의 인수분해를 어떻게 일반화하는지에 관하여 살펴보았다. 이 일반화 과정에서 기법의 중요성이 강조되었다. 특히 탐구과제 Ⅰ의 전개에서 사용한 소거 기법을 인수분해에 적용한 소거항 첨가 기법은 완전한 인수분해의 조정 과정과 명제의 증명에서 큰 역할을 담당하였다. 지필 기법과 CAS 기법이 서로 직면하는 활동에서 일어나는 상호작용을 통해 기법 중심의 이론화가 이루어졌다. 그리고 학생들은 이러한 상호작용을 통해 x^n-1의 인수분해 일반화에 대한 더 깊은 이론적 반성과 개념적 이해를 하게 되었다.

2. x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 CAS의 역할

CAS 어플리케이션을 이용하여 학생들이 x^n-1의 인수분해를 일반화하는 과정에서 CAS의 역할은 학생들이 x^n-1의 인수분해 일반화를 이해하는 사고 과정에 미치는 영향에 초점을 두고 분석하였다. 본 연구에서는 학생들이 CAS 기법을 사용하여 실행한 결과를 어떻게 해석하고, 이어지는 다음 사고와 행동을 어떻게 취하느냐를 분석하여 CAS의 역할을 다음과 같이 구분하였다.

첫째, 결과 확인(CR: Checking the Result)의 역할이다. CAS 기법의 결과가 지필 기법의 결과와 일치한다는 것을 확인하고, 그 결과에 대한 확신과 함께 문제 상황을 종료시키는 경우이다.

둘째, 인지 자극(CS: Cognitive Stimulation)의 역할이다. CAS 기법의 결과가 지필 기법의 결과와 다르다는 것을 확인하고, 두 기법의 결과 사이의 조정이 이루어져야 한다는 인지적 자극을 받는 경우이다.

셋째, 사고 확장(ET: Extending Thinking)의 역할이다. CAS 기법의 결과가 지필 기법의 결과와 다르다는 것을 확인함과 동시에 자신의 사고를 수정하거나 확장하게 되는 경우이다.

1) 결과 확인의 역할

본 연구에서 학생들은 인수분해 활동에서 지필 기법의 결과를 CAS 기법의 결과와 비교하여 일치한다는 것을 확인한 후에는 자신의 답을 확신하고 자신감을 보였다. 아주 쉬운 문제의 경우 일부 학생들은 CAS로 결과를 확인하지 않아도 결과에 대한 확신을 가지는 경우가 있었지만, 대부분의 경우 학생들은 CAS 기법으로 결과를 확인한 다음, 자신이 구한 결과에 대하여 확신을 가졌고, 풀고 있던 문제를 종료하였다. 결과 확인 후 더 이상의 사고나 행동 없이 풀이가 마무리되는 것이 일반적이었다.

다음은 학생들이 인수분해하는 과정에서 CAS가 결과 확인의 역할을 하는 것을 보여주는 사례로, 아그네시 모둠이 x^2-1, x^3-1의 인수분해를 하는 과정의 일부이다.

탐구과제 Ⅱ 1. 다음 식을 인수분해하시오. ① x^2-1 ② x^3-1

51 **아패**: 나는 인수분해를 새롭게 하는 방법을 알았어. x^2-1은 인수분해를 하기 위해서 x를 더해주고

빼주는 거야. 이렇게!

$$\begin{aligned} & x^2+x-x-1 \\ & \quad =x(x+1)-(x+1) \\ & \quad =(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

52 **아폰**: 아! 그렇구나. 나는 전개를 할 때처럼 간단히 공식으로 했는데. x^3-1도 마찬가지로 하면 되는 거야? x를 더해주고 빼주고 하면 $x^3+x-x-1$이고, 정리하면 $x(x^2+1)-(x+1)$인데, 안되는데? 그러면 x^2도 더해주고 빼주면 되나? 이렇게 하면?

$$x^3+x^2-x^2+x-x-1$$

그래도 뭔가 이상해. 안되잖아!

53 **아패**: 나는 이때 공통인수가 생길 수 있게 마이너스를 먼저 했어.

$$\begin{aligned} & x^3-x^2+x^2-x+x-1 \\ & =x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1) \\ & =(x-1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

그러면 앞에서부터 두 개씩 공통인수를 묶을 수 있고 인수분해가 됐어. 신기하지?

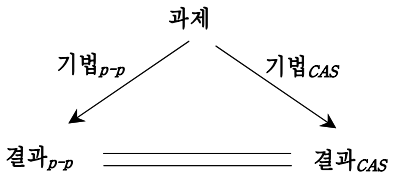
54 **아폰**: 나는 앞에서 우리가 한 것처럼 $(x-1)(x^2+x+1)$을 전개한 결과가 x^3-1이니까, 전개의 역과정으로 x^3-1을 인수분해하면 $(x-1)(x^2+x+1)$이 된다고 생각했어.

55 **아패**: 나도 너랑 똑같이 생각했었어. 그런데 오늘 내가 이렇게 인수분해를 했으니까 인수분해를 업그레이드 한 거잖아.

56 **아폰**: 우리 CAS로도 해보자. *factor*가 어디 있더라? 그래 여기 *function*에서 찾았지? (CAS에 식을 입력한다.) 맞아! 결과가 같아. 역시 우리가 잘하는 것 같아.

아폰은 인수분해를 전개 일반화의 역과정으로 생각하여 x^2-1, x^3-1을 인수분해하였다. 그런데 아패는 전개 과정에서 파악한 소거항 첨가 기법을 사용하여 주어진 식에 소거될 수 있는 같은 항을 더하고 빼면서 첨가하여 적당한 공통인수를 찾아내는 방식으로 인수분해하였다. x^2-1의 인수분해에서는 간단하게 x를 더하고 빼는 방식으로 공통인수 $(x+1)$을 묶어내어 인수분해하였고, x^3-1의 인수분해에서는 x^2과 x를 빼고 더하는 방식으로 공통인수 $(x-1)$을 묶어내어 인수분해하였다.

아폰이 사용한 전개 일반화의 역 기법으로 인수분해하는 방법과 아패의 소거항 첨가 기법으로 새롭게 인수분해를 이해하는 방법에 대하여 두 학생이 서로 의견을 교환함으로써 여러 가지 방법의 지필 기법의 시도가 인수분해에 대한 더 깊은 개념적 이해를 유도하는 모습을 볼 수 있었다(프로토콜 51-54). 지필 기법에 대한 두 학생의 상호작용 후에 CAS 기법에 대한 확인이 있었다. 두 학생은 CAS 기법의 결과를 확인한 후 자신들의 인수분해가 맞는다는 것을 확신하고 자신감을 보였다. 이때 CAS는 결과 확인의 역할을 하였다. CAS 어플리케이션을 사용하는 환경에서 CAS 기법의 결과가 지필 기법의 결과와 일치한다는 것을 확인하고, 결과에 대해 확신하고 문제의 상황을 종료시키는 CAS의 결과 확인(CR)의 역할을 도식으로 나타내면 [그림 6]과 같다.



[그림 6] CAS의 결과 확인(CR)의 역할에 대한 도식
[Fig. 6] A diagram of the role of checking the result(CS) of CAS

2) 인지 자극의 역할

CAS가 인지 자극의 역할을 한다는 것은 지필 기법의 결과와 CAS 기법의 결과가 다를 경우 CAS는 학생들에게 지필 기법의 결과가 잘못되었다는 인지 자극을 주고, 바른 결과를 알려 줌으로써 스스로 도전하는 마음이 생기도록 하는 것을 말한다. 본 연구에서는 두 기법의 결과가 다를 때 조정 과정을 통해 학생들이 직접 완전한 인수분해를 시도하도록 인지 자극을 주었다. CAS의 인지 자극은 학생들이 학습 활동에서 지필 기법과 CAS 기법의 상호작용을 더 풍부하게 하였다. 인지자극을 받은 학생들은 지필 기법에서 CAS 기법으로 또는 CAS 기법에서 지필 기법으로의 조정 작업에 여러 가지 기법을 동원하였고 다양한 조정 과정을 고안하였다.

다음은 아그네시 모둠에서 x^4-1의 인수분해를 하는 과정의 일부이다.

탐구과제 Ⅱ
1. 다음 식을 인수분해하시오.
③ x^4-1

57 **아패**: 이제 x^4-1을 해보자.

58 **아폰**: $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$로 인수분해 됐어.

59 **아패**: 나도!

60 **아폰**: 그러면? (CAS의 결과를 본다.) 결과가 다른데? $(x^2+1)(x+1)(x-1)$이야.
음… 이건 어느 게 맞는 거지?

61 **아패**: 내가 생각하기엔 CAS 기법의 결과가 맞는 것 같아. 우리가 인수분해를 제대로 마친 게 아니야.

62 **아폰**: 그런 것 같아. 완전하게 인수분해를 못한 거지. 그러면 어떻게 같다는 것을 보이지? $(x^2+1)(x+1)$을 CAS에서 바로 전개하면 (x^3+x^2+x+1)이 되겠다. (CAS에 $(x^2+1)(x+1)(x-1)$을 복사하여 입력하고 $(x-1)$을 지운 후 엔터를 친다.) 여기 봐! 같은 거야!

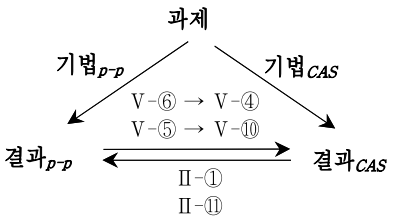
63 **아패**: 응 그렇네. 그렇지만 그건 두 결과가 같다는 말은 되는데 x^4-1의 인수분해 결과가 어느 것이 맞는지는 아니잖아? 어! 여기 이렇게 하면 되겠다. 나는 (x^3+x^2+x+1)을 다시 한 번 더 인수분해 해봤어. x^3과 x^2에서 공통인수 x^2을 묶어내면 $(x+1)$ 공통인수가 생기고 이 공통인수로 다시 묶고 남은 항들을 적었을 때 두 식의 결과가 같아서 나는 이렇게 정리했어.

$$\begin{aligned}&x^3+x^2+x+1\\&=x^2(x+1)+(x+1)\\&=(x^2+1)(x+1)\end{aligned}$$

64 **아폰**: 그러니까 결국 x^4-1을 인수분해한 결과는 우리가 CAS에서 확인한 $(x^2+1)(x+1)(x-1)$이 맞는 거야.

지필 기법과 CAS 기법에서 나온 결과가 다를 경우 학생들은 기계가 더 정확히 인수분해를 해준다는 생각 때문에 CAS 기법의 결과를 더 신뢰하여 지필 기법의 결과를 더 인수분해해야 한다는 생각을 가졌다. 따라서 두 기법의 조정 과정을 통해 실제로 두 식이 같다는 것을 보일 때 지필 기법의 결과를 더 인수분해하여 CAS 기법의 결과와 같게 만드는 조정 활동을 주로 하였다. 일반적으로 CAS가 틀리지 않고 옳은 결과를 산출할 것이라는 생각은 학생들로 하여금 자신의 지필 기법의 풀이가 더 인수분해되어야 한다고 하는 인지를 자극하였다. 이 때 CAS의 역할은 미완성 결과에 대한 반성과 완전한 인수분해를 하도록 촉구하는 역할을 하게 되며, 이러한 인지 자극의 역할 덕분에 지필 기법이 풍부해지는 효과가 나타나며 문제를 여러 측면에서 생각하게 하는 계기가 되었다.

아그네시 모둠이 x^6-1을 조정하는 과정을 기술하면 다음과 같다. 아그네시 모둠은 전개 일반화의 역 기법으로 x^6-1을 인수분해하였고, 이 결과가 CAS의 결과와 일치하지 않는 것을 확인한 후 두 결과가 같다는 것을 보이려고 하였다. CAS 기법의 결과가 지필 기법의 결과와 다른 것에 인지 자극을 받은 아패는 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)$을 직접 지필로 부분 전개하여 $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$와 일치함을 보였으며, 아폰은 CAS를 사용하여 전개하였다. 그리고 아패는 이것으로 만족하지 않고, $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$의 인수를 세 항씩 묶어 공통인수를 찾은 후 세제곱합 기법으로 인수분해하여 CAS의 결과와 일치시켰고, 이것을 본 아폰은 아패의 방법을 조금 바꾸어 두 항씩 묶어 공통인수를 찾는 방법을 생각하였으며, (x^4+x^2+1)의 인수분해에서 다시 한 번 더 좌절하지만 아패의 도움으로 복이차식 인수분해 방법으로 문제를 해결하였다.



[그림 7] CAS의 인지 자극(CS)의 역할에 대한 도식
[Fig. 7] A diagram of the role of cognitive stimulation(CS) of CAS

이 과정에서 두 학생은 CAS의 결과를 비계로 사용하는 것은 물론 두 학생 상호간의 대화와 설명을 통해 서

로에게 비계의 역할을 하는 모습을 볼 수 있었다. CAS 기법 인수분해 결과가 없었다면 학생들은 지필 기법 결과를 더 인수분해해야 한다고 생각하지 못했을 것이다. [그림 7]은 아그네시 모둠의 x^6-1 인수분해 과정에서 인지 자극(CS)의 역할을 도식화하여 나타낸 것이다.

3) 사고 확장의 역할

본 연구에서 CAS 기법의 결과가 지필 기법의 결과와 다르다는 것을 확인함과 동시에 자신의 사고를 수정하거나 확장하게 되는 경우, CAS가 사고 확장의 역할을 한다고 보았다.

다음은 아그네시 모둠이 x^9-1을 인수분해하는 과정에서 사고를 수정하는 장면의 일부이다.

탐구과제 Ⅲ 1. 다음 식을 인수분해 하시오. ③ x^9-1

65 **아폰**: x^9-1도 지수가 홀수 9이니까 당연히 2개의 인수가 나올 거야.
$(x-1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ 이야.
(CAS에 $factor(x^9-1)$을 입력한다.) 어! 이럴 수가! 아니네…

66 **아패**: 이건 좀 이상한 것 같아. 뭔가가 잘못되고 있는 거야. 일단 CAS에 $(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)(x-1)$로 나온 결과와 우리가 예측한 결과가 같은 것인지부터 살펴봐야 할 것 같아.

67 **아폰**: 아패! 네가 쓰던 방법이 생각났는데, 두 항씩 묶어야겠어.

68 **아패**: 그런데 얘($(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$을 가리키며)는 항이 총 9개라 두 항씩 묶을 수 없을 것 같아. 세 항씩 묶어야겠어.

$$\begin{aligned}&(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)\\&=x^6(x^2+x+1)+x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\\&=(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

어어! 됐어. 그러면 두 식이 같다고 할 수 있어.

69 **아폰**: 나는 CAS에서 $(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)$을 전개했더니 같아졌어.

70 **아패**: 그러면 혹시 n이 3의 배수이면 인수가 2개가 아니라 3개가 되는 건가?

71 **아폰**: (탐구과제 Ⅱ의 문제 1에서 x^6-1의 결과를 찾는다.) 아니야. x^6-1도 6이 3의 배수인데 인수가 3개가 아니라 그땐 4개야.

72 **아패**: 어? 그럼 이상하다. 어떻게 된 거지? 우리가 추측한 'n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'라는 추측이 틀린 것이 되잖아? 결국 홀수인데도 n이 3의 배수이면 인수가 3개 이상이라는 말일까?

73 **아폰**: n이 3의 배수 15일 때를 생각해 보자. (CAS에 $factor(x^{15}-1)$을 입력한다.) 인수가 4개 나오는데.

74 **아패**: 그럼 그게 맞나봐. 'n이 2 또는 3의 배수를 제외한 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.'로 우리의 추측을 바꾸어야겠어.

75 **아폰**: 'n이 3의 배수이면 x^n-1의 인수는 3개 이상이다.' 라는 추측도 가능한 것 같아.

아그네시 모둠은 x^9-1의 인수분해는 'n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1은 오직 2개의 인수만 존재한다.'라는 이전의 추측에 따라 2개의 인수만 가질 것이라고 확신하면서, 전개 일반화의 역 기법을 이용하여 x^9-1을 2개의 인수로 인수분해하였다. 그러나 CAS 기법 결과가 $(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)(x-1)$로 나타나는 인식론적 순간에 직면한다. x^9-1의 인수분해가 더 이루어져야 하고 자신들이 이전에 세운 추측이 잘못되었으므로 수정이 필요하다고 느끼게 되었다. 그리고 두 가지 작업에 착수하였다. 아패는 x^9-1의 지필 기법의 결과와 CAS 기법의 결과를 조정하는 과정에서 $(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$의 항이 총 9개라는 점에 착안하여 세 항씩 공통인수를 묶는 방법을 사용하여 완전한 인수분해에 성공하면서 'n이 3의 배수이면 인수가 2개가 아니라 3개이다'라는 배수 개념의 추측을 생각하게 되었다. 그러나 x^6-1의 인수가 4개라는 아폰의 지적으로 이 추측은 다시 'n이 3의 배수이면 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'로 수정되었다. 그리고 $x^{15}-1$의 인수가 4개 나온다는 것을 CAS 기법으로 확인한 후 초기의 추측을 'n이 2 또는 3의 배수를 제외한 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'로 수정하였다.

다음은 CAS가 사고 확장의 역할을 하는 다른 사례로

아그네시 모둠이 탐구과제 Ⅲ에서 추측을 만드는 과정의 일부이다.

탐구과제 Ⅲ 2. 앞의 탐구과제 활동을 바탕으로 x^n-1(단, $n \geq 2$인 자연수)의 인수분해 결과는 어떤 수 n에 대하여 다음이 성립하게 되는지 추측하시오. ① 오직 2개의 인수만 존재한다. ② 인수가 2개보다 많다. ③ $(x+1)$을 인수로 가진다.

76 **아패**: (탐구과제 Ⅱ의 문제 2와 x^9-1 인수분해를 다시 살펴본다.) 인수가 오직 2개인 경우는 앞에서 'n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'고 추측했었는데. x^9-1에서 문제가 있었어.

77 **아폰**: 맞아. 그래서 'n이 2 또는 3의 배수를 제외한 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다.'로 추측을 수정했었어. 그런데 뭔가 좀 더 알아봐야 될 것 같아.

78 **아패**: 좀 더 확인해 보자. 그러면 9는 3의 배수잖아. 홀수 중에서 3의 배수는 인수가 3개 이상이라는 거지?

79 **아폰**: 직접 확인해 보자. 그 다음 3의 배수는 12인데 짝수니까 패스! 그 다음 3의 배수는 15잖아.

80 **아패**: 그러면 $n=15$를 해보자. (두 학생은 각각 CAS에 $factor(x^{15}-1)$입력한다.)

81 **아폰**: 네가 먼저 했어?

82 **아패**: $(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)(x-1)$이야. 4개 나왔어! 홀수 중에서 3의 배수는 모두 제외하는 것이 맞는 것 같아.

83 **아폰**: 그런데 3의 배수만 제외되는 걸까? 15는 3×5잖아? 15는 3의 배수이기도 하지만 5의 배수이기도 하잖아. 그럼 홀수인 5의 배수도 제외시켜야 하는 것 아냐?

84 **아패**: 그럴지도 모른다는 불길한 예감이 든다.

85 **아폰**: 5의 배수, 그럼 7의 배수는?

86 **아패**: 5, 7

87 **아폰**: 35를 확인해 보자. (두 학생은 각각 CAS에 $factor(x^{35}-1)$을 입력한다.) 어? 이런! 'Expression too long'이라고 떴어. 못한다는 얘기잖아. 어떻게 해?

88 **아패**: 난 나왔어! 이 기계가 더 커서 좋은 것인가 봐. (웃는다.) 그런데 인수가 4개야.

89 **아폰**: 잠깐. 35는 3의 배수가 아니잖아. 그런데 35도 오직 2개의 인수만 갖는 홀수가 아니라는 얘기잖아.

90 **아패**: 뭔가 이상해! 홀수 중에서 3의 배수가 아니고.

91 **아폰**: 5의 배수도 아니고, 35가 5×7이니까 7의 배수도 안 되겠네.

92 **아패**: 홀수 중에서 3의 배수, 5의 배수, 7의 배수를 다 빼면… 뭐가 남지?

93 **아폰**: 인수가 2개인 지수 n만 적어보자. 3, 5, 7인데. 참 우리가 처음에 2는 인수가 2개였잖아? 2, 3, 5, 7?

94 **아패**: 11과 13은 방금 앞에서 2개 인수만 나왔어.

95 **아폰**: 그럼 2, 3, 5, 7, 11, 13. 얘네들 다 소수잖아! 어, 그렇네! 소수야!

96 **아패**: 소수라면 2를 굳이 따로 말할 필요도 없잖아.

97 **아폰**: 응. 그럼, 2, 3, 5, 7, 11, 13, $\cdots$

98 **아패**: 소수면 인수가 2개인가 봐.

99 **아폰**: 추측을 'n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'로 수정해야 할 것 같아.

100 **아패**: 두 번째 추측에서 인수가 2개보다 많을 때는 언제일까? 지난 번에 우리가 추측한 2보다 큰 짝수는 아닌 것 같아. 일단 홀수인 $n=9$, 15일 때 인수가 2개보다 많았어. x^9-1을 인수분해할 때 우리가 'n이 3의 배수인 홀수이면 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'라는 것도 추측했어. 이걸 모두 종합해야 할 것 같아.

101 **아폰**: 방금 우리가 오직 2개의 인수만 존재할 때를 소수일 때라고 추측을 했잖아. 소수가 아닌 경우에 인수가 어떻게 나오는지 지금까지 한 것을 확인해보면 감이 올 것 같아. (앞의 페이지를 넘겨 검토한다.) 소수인 경우를 빼면 모두 3개 이상의 인수를 가져.

102 **아패**: 그렇네. 2개보다 많다는 것은 3개 이상이니까. '소수가 아닐 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'인 거네. 그럼 세 번째 추측에서 $(x+1)$을 인수로 갖

는 경우는 언제일까?

103 **아폰**: $(x+1)$ 인수가 있는 경우를 다 찾아보면 되잖아. 여기 보면, 어디지? 2, 4, 6, 8, 10, 12 모두 $(x+1)$ 인수가 있어.

104 **아패**: 응. 짝수일 때는 $(x-1)$과 $(x+1)$을 모두 인수로 갖는 것 같아.

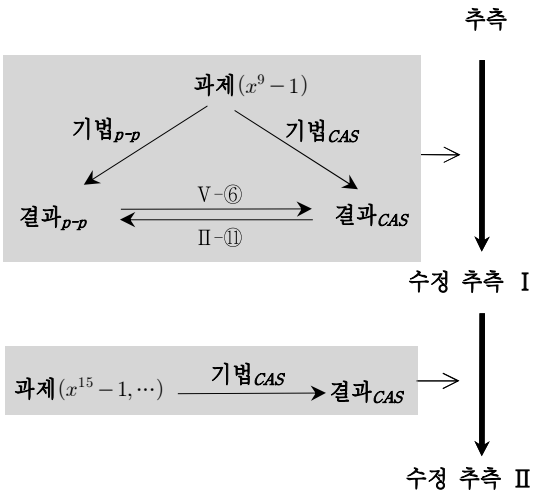
105 **아폰**: (탐구과제지 앞부분을 살펴본다.) 그런가 봐. 홀수일 때는 지금까지 $(x-1)$ 인수만 있고 $(x+1)$ 인수가 없어. 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x-1)(x+1)$을 인수로 가진다'로 수정하는 것이 더 나을 것 같아.

아그네시 모둠은 탐구과제 Ⅱ의 문제 2에서 'n이 2 또는 홀수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'라는 첫 번째 추측이 x^9-1의 인수분해 과정에서 성립하지 않는다는 것을 인지하고 'n이 2 또는 3의 배수를 제외한 홀수일 때 x^n-1은 오직 2개의 인수만 존재한다'로 수정하였다. 그러나 아패가 $x^{15}-1$의 인수분해 결과 4개의 인수를 가지므로 3의 배수를 제외하는 것이 맞다고 말할 때 아폰은 15는 3의 배수이기도 하지만 5의 배수이기도 한데, 왜 '3의 배수만 제외되는 걸까?' 라는 반문을 하게 된다. 두 학생은 지수가 3의 배수가 아닌 35를 선택하여 $x^{35}-1$을 CAS에서 인수분해하였고 확인 결과 4개의 인수를 가졌다. 5의 배수나 7의 배수도 오직 2개의 인수만 가진다는 조건에서 제외시켜야 한다는 것을 인식한다. 이 과정에서 아이폰은 'Expression too long'을 결과 창에 나타냄으로써 기계 상의 한계를 드러낸다. 하지만 아이패드는 4개의 인수로 인수분해 결과를 보여주었다. 아폰의 인식론적 직면의 순간은 '3의 배수만 제외되는 걸까?'라는 의문을 발산할 때였다. 그리고 이것을 해결하기 위해 $x^{35}-1$의 CAS 기법 인수분해를 시도하고 5의 배수, 7의 배수 등도 제외시켜야 한다는 생각으로 추측을 수정하고 정교화시켰다. 그리고 2개의 인수만 가지는 지수를 2, 3, 5, 7, 11, 13, $\cdots$ 열거하고 상호작용하는 가운데 소수라는 새로운 생각을 떠올리게 되었다. CAS 기법의 결과가 도화선이 되어 두 학생의 사고가 배수에서 소수로 전환과 확장이 이루어졌다. 추측은 다시 'n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'로 수정되었다.

두 번째 추측은 'n이 2보다 큰 짝수일 때 x^n-1의 인수는 2개보다 많다'였다. 아패와 아폰은 x^9-1의 인수분해 과정에서 'n이 3의 배수이면 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'라는 새로운 추측을 하면서 지수가 짝수가 아닌 3의 배수인 홀수 9일 때 x^9-1이 3개의 인수를 가진다는 사실에서 두 번째 추측이 수정되어야 한다고 인식하였다. 그리고 'n이 소수일 때 x^n-1의 인수는 오직 2개이다'라고 수정한 첫 번째 추측에서 짝수나 3의 배수, 5의 배수, 7의 배수 등은 모두 인수가 3개 이상이라는 것을 종합하여 어떻게 표현할지를 생각하다가 소수가 아닌 수를 생각하게 되고 '소수가 아닐 때 x^n-1의 인수는 3개 이상이다'로 두 번째 추측을 수정하였다.

세 번째 추측은 탐구과제에서 수행한 모든 짝수 지수의 x^n-1의 인수분해 결과가 $(x+1)$ 인수를 가졌으므로 처음의 추측 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x+1)$을 인수로 가진다'를 그대로 수용하였다. 그리고 홀수 지수일 때는 $(x+1)$ 인수를 가지지 않고 짝수 지수일 때만 $(x+1)$ 인수를 가지므로 'n이 짝수일 때 x^n-1은 $(x-1)(x+1)$을 인수로 가진다'로 추측을 정교화하였다.

[그림 8]은 아그네시 모둠 학생의 사고 확장의 역할을 도식으로 나타낸 것으로, 과제의 내용은 과제에 따라 변경되어야 하며 추측과 수정 추측은 이론과 수정 이론으로 볼 수 있다. x^9-1의 인수분해 조정과정과 $x^{15}-1$, $x^{35}-1$의 CAS 인수분해 활동에서, CAS는 학생들에게 사고를 마무리하거나 틀린 결과를 바른 결과로 고치라는 신호가 아니라 새로운 사고의 전환이 이루어져야 한다는 강력한 메시지를 주고 있다. 학생들은 그 메시지를 받아 새로운 사고를 고민하게 되고 사고의 수정과 확장이 이루어졌다. 이 과정은 과제의 수준에 따라 여러 번 반복될 수 있고 사고의 전환으로 나타난 새로운 추측이 이전의 추측과 관련이 없는 새로운 국면으로 과제를 이끌어 갈 수도 있다. Kuhn(1999)은 무엇을 예측해야 할지를 정확히 알면서 무엇인가 잘못되어 있다는 것을 깨달을 수 있는 사람에게만 새로움이 모습을 드러낸다고 하였다. CAS는 사고의 비계 역할을 동반하면서 새로움의 발견을 이끌어왔다고 할 수 있다. 홀수에서 배수의 개념을 떠올리고, 배수의 개념에서 소수의 개념을 확장하는 학생들의 모습은 마치 학생 자신이 활동하는 세계를 확장시키는 모습을 연상하게 하였다.



[그림 8] CAS의 사고 확장(ET)의 역할에 대한 도식
[Fig. 8] A diagram of the role of extending thinking(ET) of CAS

이상에서 CAS가 학생들의 사고와 행동에 미친 영향에 주목하면서 CAS가 학생의 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 어떤 역할을 하는지 알아보았다. “결과 확인(CR: Checking the Result)의 역할”, “인지 자극(CS: Cognitive Stimulation)의 역할”, “사고 확장(ET: Extending Thinking)의 역할”은 CAS의 기계적인 변환에 초점을 맞춘 실용주의적 역할이 아니며, 학생들의 인지에 초점을 맞춘 인식론적 역할을 강조하고, 세분화하고 있다. CAS가 수학교실에서 학생들과 함께하는 의미있는 학습 도구로 자리잡기 위해서는 학생 중심의 사고를 도울 수 있는 CAS의 역할이 강조되는 수학 수업이 학교 현장에서 이루어져야 할 것이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 스마트폰과 태블릿 PC의 Symbolic Calculator 어플리케이션을 이용하여 x^n-1의 인수분해 일반화 과정을 살펴보고 CAS의 역할에 대하여 탐구하였다. 본 연구는 CAS 어플리케이션을 사용한 수업이 지필 수업보다 정량적인 학습 효과가 있다는 것을 알아보기보다는 학생들이 CAS기능을 이용하여 x^n-1 의 인수분해를 어떻게 일반화하는지 알아보고, 그 과정에서 CAS가 학생들에게 결과 확인의 역할뿐 아니라 인지 자극 또는 사고 확장의 기회를 제공하는 질적 사례에 초점을 두어 기술하였다.

x^n-1의 인수분해 일반화 과정은 과제-기법-이론화의 관점에서 x^n-1의 형태로 전개되는 식의 일반화, x^n-1(단, $n\geq 2$인 자연수)의 완전한 인수분해, 추측과 추측의 수정, 증명이라는 4가지 이론화 부분으로 나누어 분석하였다. 기법 중심의 대수 활동을 통해 학생들은 내적 모순을 경험하는 인식론적 장면에 직면하게 되고, 이 과정을 해결해가는 학생들의 노력은 점차 자신이 할 수 있는 수학 학습의 범위를 확장시켰다. CAS라는 강력한 도구를 가지고 인수분해 공식의 이해 수준을 넘어 학생들이 사고하고 조정하고 추측하고 증명하며 개념을 심화시키고 향상시키는 모습을 볼 수 있었다.

결과적으로 학생들은 CAS의 도움이 아니었다면 해결하기 어려웠을 탐구과제를 무리 없이 하나하나 해결하였다. 지식의 절차는 개념적 성장을 강화할 수 있고, 때로 절차적 지식이 우선 위치를 점하여 새로운 개념의 발달 원동력이 될 수 있다고 한 Hiebert와 Lefevre(1986)의 생각과 과학의 발달에서 패러다임의 전환은 연속적이지 않고 단속·단절적이라고 한 Kuhn(1999)의 생각 그리고 본 연구의 과정과 결과를 종합할 때 과제-기법-이론화 중심의 학습은 수학의 이론적 반성과 개념적 이해를 강화할 수 있다고 하겠다.

x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 CAS의 역할은 CAS 기법을 사용하여 실행한 결과를 학생들이 어떻게 해석하고, 또 이어지는 다음 사고와 행동을 어떻게 취하느냐를 분석하여 결과 확인(CR)의 역할, 인지 자극(CS)의 역할, 사고 확장(ET)의 역할이라는 3가지로 분류하였다. 이는 테크놀로지의 역할에 대해 Lagrange(2005b)가 언급한 실용주의적 역할과 인식론적 역할의 관점에 기인한 것이다. CAS를 포함한 공학적 도구가 과연 학생들의 수학적 사고를 향상시킬 수 있는 유용한 도구인가? 라는 물음에 대한 답을 얻기 위해 x^n-1의 인수분해 일반화 과정에서 CAS는 실용주의적 역할뿐만 아니라 과제-기법-이론화가 상호작용하면서 인식론적 역할을 하게 된

다는 것을 보였다. CAS의 사용 결과가 학생들의 다음 행동과 사고에 미친 영향까지를 포함하여 파악하여야 CAS의 역할을 알 수 있으며, 이때 CAS가 단순히 실용적인 역할이 아닌 인식론적 역할을 하고 있다는 것을 파악할 수 있었다. CAS는 단순한 결과의 확인뿐만 아니라 지필 기법만으로는 해결하기 힘든 과제에서 학생들의 인지를 자극하고 사고를 확장하는 기회를 제공하는 만큼 학생들의 머리 밖에서 학생들의 사고를 돕는 또 다른 인지작용이 가능한 도구로 인식되어야 할 것이다.

앞으로 수학학습에서 CAS의 사용이 유의미하게 이루어지기 위한 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 인수분해뿐 아니라 함수, 방정식, 기하 등 다양한 수학 영역에서 CAS의 사용에 있어 유익한 과제의 설계가 요구된다. 사실 이것은 CAS가 수학교육에 통합되기 위한 기본 단계라고도 볼 수 있다. 따라서 학생들의 사고 과정에서 유의미한 내적 모순과 성장을 경험할 수 있는 테크놀로지 활동의 설계가 여러 단원에서 이루어져야 한다. 예를 들면 함수 단원에서 Symbolic Calculator가 지원하는 함수의 그래프는 정의역과 치역을 단지 두 손가락을 모으고 벌림으로써 화면의 확대와 축소를 자유롭게 바꿀 수 있는데 이를 활용한 과제의 설계도 흥미로울 것이다.

둘째, 수학교실에서 다양한 CAS 어플리케이션의 사용을 허용하고 사용방법에 대하여 알려주는 교사의 노력이 필요하다. 이를 위해서는 CAS 어플리케이션의 유용한 학습법에 대한 교사연수 프로그램이 체계적으로 마련되어야 할 것이다. 교사들이 수업시간에 활용하는 횟수가 많을수록 또 활용의 질이 높을수록 CAS의 수학실험실 사용빈도도 높아질 것이다.

현재 스마트 교육에 대한 논의가 뜨겁다. 그런데 그러한 논의에서 수학교과에 유용한 어플리케이션에 대한 언급은 찾을 수 없는 것이 아쉽다. 학생들의 수학학습을 진작시킬 수 있는 여러 가지 어플리케이션이나 소프트웨어 그리고 HHA(Handheld activities)인 수학게임 등의 개발과 소개를 위한 노력이 필요한 시점이라고 하겠다.

참 고 문 헌

강인애 (2003). PBL의 이론과 실제. 서울: 문음사.

Kang, I. (2003). The theory and practice of PBL. Seoul: Moonumsa.

양창길, 김철수 (1996). 극한에 대한 실험 수학적 접근. 과학교육 13, 47-66.

Yang, C., & Kim, C. (1996). Experimental mathematics approaches on limits. *Journal of education 13*, 47-66.

조영주, 김경미 (2010). 컴퓨터 대수 환경에서 매개변수 개념에 대한 고등학생의 이해에 관한 사례 연구. 수학교육 논문집 24(4), 949-974.

Cho, Y., & Kim, K. (2010). The case study of high school students' understanding of the concept of parameter in a computer algebra environment. *Communications of Mathematical Education 24*(4), 949-974.

한세호 (2009). 고등학교 수학학습에서 컴퓨터대수체계(CAS)의 도구발생. 박사학위 논문, 건국대학교.

Han, S. (2009). *Instrumental genesis of computer algebra system in high school students' mathematical learning*. Doctoral dissertation, KU.

Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In Tinsley & Johson (Eds.), *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (121-129). Chapman and Hall.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*, 245-274.

Bell, F. H. (1980). *Teaching Elementary School Mathematics*. Iwoa: Wm. C. Brown Company Publisher.

Boers-van Oosterum, M. A. M. (1990). *Understanding of variables and their uses acquired by students in traditional and computer-intensive algebra*. Dissertation. MA: University of Maryland.

Borwein, J., Bailey, D., & Girgensohn, R. (2003). *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. Boston, MA: AK Peters.

Brown, R. (1998). Using computer algebra systems to introduce algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education 5,*

147-160.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Techerches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-266.

Drijvers, P. (2003). *Learning Algebra in a Computer Algebra Environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: CD-β Press.

Graham, A., & Thomas, M. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics 41*, 265-282.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (2004). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculator: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Hiebert J., & Lefevre P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics* (1-27). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A Study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 11*, 205-263.

Kieran, C., & Guzmán, J. (2010). Role of Task and Technology in Provoking Teacher Change: A Case of Proofs and Proving in High School Algebra. In R. Leikin, R. Zazkis (Eds.), *Learning Through Teaching Mathematics* (127-152), New York: Springer.

Kuhn, T. S. (1999). 과학혁명의 구조 (김명자 역), 서울: 까치. (원저 1962년 출판)

Lagrange, J. B. (2000). L'integration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques (The integration of technological instruments in education: an approach by means of techniques) *Educational Studies in Mathematics 43*, 1-30.

Lagrange, J. B. (2003). Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. In J. T. Fey (Ed.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education* (269-283). Reston, VA: NCTM.

Lagrange, J. B. (2005a). Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches, *International Journal of Computers for Mathematical Learning 10*, 143-189.

Lagrange, J. B. (2005b). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (113-135). New York: Springer.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations, the Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: University Press.

Mounier, G., & Aldon, G. (1996). A problem story: Factorisations of x^n-1. *International DERIVE Journal 3*, 51-61.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning cultures and computers*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education 29*, 21-40.

Piaget, J. (1980). *Les formes elementaires de la dialectique*. Paris: Gallimard.

Pozzi, S. (1994). Algebraic reasoning and CAS: Freeing students form syntax? In H. Heugl, & B. Kutzler(Eds.), *Derive in education: Opportunities and strategies* (171-188). Bromley, UK: Chartwell-Bratt.

Prensky, M. (2005). Listen to the natives. *The Association for Supervision and Curriculum Development: Educational Leadership, Dec 2005-Jan 2006*, 9-13.

Rabardel, P., & Samurçay, R. (2001). From Artifact to Instrument-Mediated Learning. *New Challenges to Research on Learning,* International symposium organized by the Center for Activity Theory and Developmental Work Research. University of Helsinki, March, 21-23.

Repo, S. (1994). Understanding and reflective abstraction: Learning the concept of the derivative in the computer environment. *The International Derive Journal 1*(1), 97-113.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and mathematics education, In Bishop et. al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (827-876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students'' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 9*, 281-307.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: Nécessité des orchestrations. *Recherches en didactique des mathématiques 25*, 91-138.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education 9*(3), 77 - 101.

Verillon, P. (2000). Revisiting Piaget and Vigotsky: In search of a learning model for technology education. *Journal of Technology Sutdies 26*(1), 3-10.

A Qualitative analysis of students' factorization of x^n-1 using a CAS application

Cho, Yeong Ju
Master Teacher, Kyesan Girl's High School, Gyesan-dong, Gyeyang-Ku, Incheon, Korea, 407-054
E-mail : cho0ju@hanmail.net

Kim, Kyung Mi
Research Professor, Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University,
Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : kyungmi@korea.ac.kr

Whang, Woo Hyung†
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : wwhang@korea.ac.kr

The purpose of the study was to investigate how students generalize and prove the factoring of x^n-1 using a Computer Algebra System application and the role of CAS in this process. The theoretical framework consists of the anthropological and the instrumental approach. In particular, the basis of the Task-Technique-Theorization(T-T-T) frame adapted form Chevallard's anthropological approach of Didactics is utilized. We found that Technique-Theorization emerges in mutual interaction between paper-and-pencil techniques and computer algebra techniques. And this interaction led to the students' theoretical reflection and conceptual understanding. In this process, we could identify three epistemic role of CAS : the role of checking the result, the role of cognitive stimulation and the role of extending thinking. Therefore CAS plays on a epistemic role of checking the result of a task, stimulating the student' cognition and extending their thinking as well as pragmatic role of producing the result of a input.

* ZDM Classification : U74
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70
* Key words : Computer Algebra System, CAS application, Task-Technique-Theorization
* This research was supported by the College of Education, Korea University Grant in 2012.
† Corresponding author

<부록> 탐구과제 활동지

들어가기

1. 다음 식을 지필 기법으로 전개한 다음, CAS를 사용하여 결과를 확인하시오.
(단, CAS의 전개 명령어는 따로 없다. 엔터를 치면 자동으로 전개가 된다.)

		지필 기법	CAS 기법
①	$(a-b)(a+b)$		
②	$(a-b)(a^2+ab+b^2)$		
③	$(a-1)(a+1)$		
④	$(a-1)(a^2+a+1)$		

2. 다음 식을 지필 기법으로 인수분해한 다음, CAS를 사용하여 결과를 확인하시오. (단, CAS의 인수분해 명령어는 factor 이다.)

		지필 기법	CAS 기법
①	a^2-b^2		
②	a^3-b^3		
③	a^2-1		
④	a^3-1		

탐구과제 Ⅰ : x^n-1 로 전개되는 식

1. 다음 식을 지필 기법으로 전개 하시오.
$(x-1)(x+1)=$
$(x-1)(x^2+x+1)=$

2. 지필 기법으로 전개하지 않고 전개식의 결과를 추측하시오.
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$

3. 지필 기법으로 2의 추측을 확인하시오. 또, 계산기를 사용하여 2의 추측을 확인하시오.
$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=$

4. 세 식 $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x^2+x+1)$, $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ 의 공통점은 무엇인가? 또 세 식의 차이점은 무엇인가?

5. 세 식 $(x-1)(x+1)$, $(x-1)(x^2+x+1)$, $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ 을 전개한 결과가 오직 2개의 항을 가진 다항식으로 나타난다는 것을 어떻게 설명할 수 있는가?

6. x^5-1의 인수분해 결과를 추측하시오.

7. $(x-1)(x^{134}+x^{133}+x^{132}+\cdot\cdot\cdot+x+1)$ 을 전개한 결과가 왜 $x^{135}-1$이 되는지 설명하시오.

8. 7에서 제시한 설명이 다음 등식에서도 타당한지를 설명하시오.
$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdot\cdot\cdot+x+1)=x^n-1$

탐구과제 Ⅱ : x^n-1의 인수분해

1. 다음 식을 인수분해하시오.
(단, 지필 기법과 CAS 기법이 다를 경우 두 기법을 조정하는 과정을 쓰시오.)

		지필 기법	CAS 기법	기법 조정
①	x^2-1			
②	x^3-1			
③	x^4-1			
④	x^5-1			
⑤	x^6-1			

2. 앞의 탐구과제 활동을 바탕으로 x^n-1(단, $n\geq 2$인 자연수)의 인수분해 결과는 어떤 수 n에 대하여 다음이 성립하게 되는지 추측하시오.
① 오직 2개의 인수만 존재한다.
② 인수가 2개보다 많다.
③ $(x+1)$을 인수로 가진다.

탐구과제 Ⅲ : x^n-1의 인수분해

1. 다음 식을 인수분해하시오.
(단, 지필 기법과 CAS 기법이 다를 경우 두 기법을 조정하는 과정을 쓰시오.)

		지필 기법	CAS 기법	기법 조정
①	x^7-1			
②	x^8-1			
③	x^9-1			
④	$x^{10}-1$			
⑤	$x^{11}-1$			
⑥	$x^{12}-1$			
⑦	$x^{13}-1$			

2. 앞의 탐구과제 활동을 바탕으로 x^n-1(단, $n \geq 2$인 자연수)의 인수분해 결과는 어떤 수 n에 대하여 다음이 성립하게 되는지 추측하시오.
① 오직 2개의 인수만 존재한다.
② 인수가 2개보다 많다.
③ $(x+1)$을 인수로 가진다.

※ CAS 기법을 사용하지 않고, 다음 질문에 답하시오(3~5).

3. $x^{2004}-1$에 대하여 다음을 설명하시오.
① 2개보다 많은 인수를 포함하는가?
② $(x+1)$을 인수로 가진다.

4. $x^{3003}-1$에 대하여 다음을 설명하시오.
① 2개보다 많은 인수를 포함하는가?
② $(x+1)$을 인수로 가진다.

5. $x^{853}-1$에 대하여 다음을 설명하시오.
① 2개보다 많은 인수를 포함하는가?
② $(x+1)$을 인수로 가진다.

탐구과제 Ⅳ : x^n-1의 인수분해 일반화

※ 다음 명제를 증명하시오(1~6).

[명제 1] 모든 자연수 n에 대하여 x^n-1(단, $n \geq 2$)은 $(x-1)$을 인수로 가진다.

[명제 2] n이 홀수일 때 x^n+1(단, $n \geq 2$)은 $(x+1)$을 인수로 가진다.

[명제 3] n이 짝수일 때 x^n-1(단, $n \geq 2$)은 $(x+1)$을 인수로 가진다.

[명제 4] n이 2의 거듭제곱일 때 x^n-1(단, $n \geq 2$)은 몇 개의 인수를 가지는가?

[명제 5] n이 소수일 때 x^n-1(단, $n \geq 2$)의 인수는 오직 2개이다.

[명제 6] n이 소수가 아닐 때 x^n-1(단, $n \geq 2$)의 인수는 3개 이상이다.