

실베스터-전달강성계수법에 의한 축대칭 원통형 셸의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Axisymmetric Cylindrical Shell by Sylvester-Transfer Stiffness Coefficient Method

최명수*† · 여동준**

Myung-Soo Choi*† and Dong-Jun Yeo**

(접수일 : 2012년 08월 31일, 수정일 : 2012년 10월 21일, 채택확정 : 2012년 10월 26일)

Abstract: In this paper, the computational algorithm for free vibration analysis of an axisymmetric cylindrical shell is formulated by the Sylvester-transfer stiffness coefficient method (S-TSCM) which combines the Sylvester's inertia theorem and the transfer stiffness coefficient method. After the computational programs for obtaining the natural frequencies and natural modes of the axisymmetric cylindrical shell are made by the S-TSCM and the finite element method (FEM), the computational results which are natural frequencies, natural modes, and computational times by both methods are compared. From the computational results, we can confirm that S-TSCM has the reliability in the free vibration analysis of the axisymmetric cylindrical shell and is superior to FEM in the viewpoint of computational times.

Key Words : Cylindrical Shell, Axisymmetric Shell, Free Vibration Analysis, Sylvester's Inertia Theorem, Transfer Stiffness Coefficient Method, Finite Element Method

1. 서 론

주위에서 쉽게 볼 수 있고 공학적으로도 중요한 구조물 중의 하나가 셸(shell)이다. 셸은 형상에 따라 원통형, 원추형, 구형 등이 존재하며, 셸의 설계 시에는 일반적으로 구조해석 및 진동해석 등이 중요하다.

셸의 진동해석을 수행하기 위한 해석 알고리즘¹⁾으로는 유한요소법(finite element method), 급수해법(series solution), 리츠법(Ritz's method) 및 전달행렬법(transfer matrix method) 등이 널리 알려져

있고, 본 연구와 관련이 있는 해석 알고리즘인 전달영향계수법(transfer influence coefficient method)도 셸의 진동해석을 효과적으로 수행할 수 있다.

셸의 진동해석을 위한 알고리즘 중에서 현재 가장 많은 사용자를 확보하고 있는 것은 유한요소법이다. 유한요소법으로 원통형 셸 구조물의 자유진동 해석을 수행할 경우에는 모델링 과정에서 축대칭 셸요소, 평면 셸요소, 곡면 셸요소 등을 사용할 수 있다. 그런데 원통형 셸 구조물은 축대칭 구조를 가지는 것이 많고, 이와 같은 구조물의 자유진동 해석을 유한요소법으로 수행할 경우에는

*† 최명수(교신저자) : 전남대학교 해양경찰학과

E-mail : engine@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7183

**여동준 : 전남대학교 해양기술학부

*† Myung-Soo Choi(corresponding author) : Department of

Maritime Police Science, Chonnam National University

E-mail : engine@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7183

**Dong-Jun Yeo : Faculty of Marine Technology, Chonnam National University

축대칭 셀요소를 사용하는 것이 다른 셀요소를 사용하는 것보다 계산 시간이나 계산 메모리의 이용 측면에서 효과적이다.

한편, 유한요소법은 범용적인 해석 프로그램을 개발하는 것은 편리하지만, 알고리즘의 구조상 대규모 선형 연립방정식의 해법에 귀착되므로 대규모 자유도를 갖는 구조물의 자유진동 해석을 수행할 경우에는 기억용량이 큰 컴퓨터를 필요로 하는 취약점이 있다²⁾.

Irie³⁾ 등은 전달행렬법을 이용하여 원통형 셀의 자유진동 해석을 수행한 바 있다. 전달행렬법은 기억용량이 비교적 적은 컴퓨터에서도 대규모 자유도를 갖는 구조물의 자유진동 해석을 수행할 수 있지만, 구조물의 중간에 아주 단단한 탄성지지 존재하거나 고차의 고유진동수를 구할 경우에는 수치계산상 문제점이 지적되고 있다. Yeo²⁾ 는 상기 전달행렬법의 문제점을 해결하기 위한 방안으로 전달영향계수법을 원통형 셀의 자유진동 해석에 적용하여 그 유효성을 제안한 바 있다.

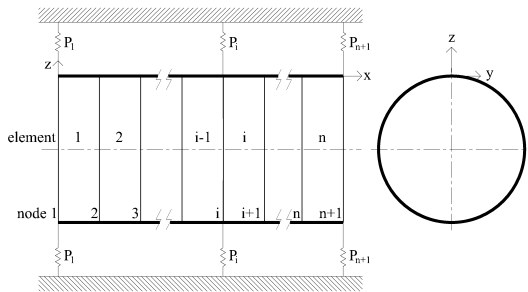


Fig. 1 Analytical model

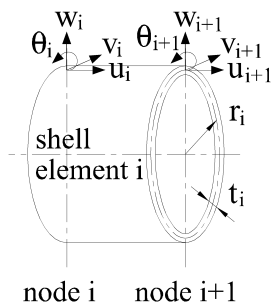


Fig. 2 Cylindrical shell element

Choi^{4,6)} 등은 강성계수의 전달을 기본 개념으로 하는 자유진동 해석 알고리즘인 전달강성계수법 (transfer stiffness coefficient method)으로 직선형 구조물, 골조형 구조물 그리고 평판형 구조물의 자유진동 해석을 효과적으로 수행한 바 있다.

상기의 전달행렬법, 전달영향계수법, 전달강성계수법은 유한요소법에 비해 계산 시간 및 메모리의 이용측면에서 효과적이지만, 공통적으로 다음과 같은 취약점이 존재한다. 자유진동 해석 시에 이 방법들은 진동수 방정식에 이분법(bisection method)⁷⁾을 도입하여 부호 변화를 판별하여 고유진동수를 찾아낸다. 그런데 이 과정에서 초기 진동수 간격(step)을 크게 하면 검색 범위 내에 있는 고유진동수를 일부 찾아내지 못할 가능성이 있다. 반면에 초기 진동수 간격을 너무 작게 하면 계산 시간이 급격히 증가한다. 그리고 고유진동수를 찾았다하더라도 그 고유진동수의 차수를 직접적으로 알아낼 수는 없다.

Choi⁸⁾ 등은 상기 전달 계열 방법들의 장점은 그대로 유지하면서 상기 취약점을 완전히 해결함과 동시에 계산 시간이 더욱 빠른 실베스터-전달 강성계수법(Sylvester-transfer stiffness coefficient method)을 개발하고 간단한 1차원 직선형 보에 적용하여 그 유효성을 확인한 바 있다.

해석기법으로서 범용성을 가지기 위해서는 다양한 구조물에 대한 일반적인 적용 및 해석이 가능해야 한다. 본 연구에서는 실베스터-전달강성계수법을 축대칭 원통형 셀의 자유진동 해석에 적용할 수 있는 알고리즘을 정식화하고 이를 기반으로 전산 프로그램을 만든다. 그리고 계산 결과의 비교를 위해 유한요소법으로 동일한 해석이 가능한 전산 프로그램을 만든 후, 양 방법에 의한 계산 결과의 비교를 통해 실베스터-전달강성계수법의 유효성을 확인한다.

2. 축대칭 원통형 셀의 자유진동 해석 알고리즘

2.1 해석모델

탄성지지된 축대칭 원통형 셀은 Fig. 1과 같이

하나의 원통형 셀과 다수의 기초지지 탄성스프링으로 구성된다. 원통형 셀은 Fig. 2와 같이 일정한 반경을 갖는 다수의 원통형 셀요소로 분할된다. 기초지지 탄성스프링은 기초로부터 원통형 셀을 대칭적으로 지지한다.

원통형 셀에서 좌단과 우단, 기초지지 탄성스프링의 결합점 그리고 사용자의 요청에 의한 셀의 가상 분할점을 모두 원주 절점(circular node, 이하에서는 ‘절점’으로 생략함)이라 정의하고, 원통형 셀이 n 개의 셀요소로 분할된다면, 각 절점은 좌단에서 우단으로 순차적으로 각각 절점 1, 절점 2, ..., 절점 $(n+1)$ 로 부른다.

절점의 변위벡터 ($\mathbf{d} = \{u, v, w, \theta\}$)는 셀요소의 길이방향(x 축방향)의 변위 u , 원주방향(y 축방향)의 변위 v , 반경방향(z 축방향)의 변위 w , 그리고 각변위 $\theta = dw/ds$ 로 구성된다. 절점의 힘벡터 ($\mathbf{f} = \{F_u, F_v, F_w, M\}$)는 셀요소의 길이방향의 힘 F_u , 원주방향의 힘 F_v , 반경방향의 힘 F_w , 그리고 모멘트 M 으로 구성된다. 각 절점의 자유도 수는 4이므로, Fig. 1에 나타난 $(n+1)$ 개의 절점을 갖는 해석 모델은 총 $4(n+1)$ 개의 자유도를 갖는다. 기초지지 스프링은 각 절점당 최대 4방향의 스프링이 존재할 수 있고, 각 스프링의 방향별 스프링상수를 각각 k_u, k_v, k_w, K 라고 한다.

현 방법에서는 경계조건을 기초지지 스프링의 스프링상수를 변경하여 모델링하므로, 절점 1과 절점 $(n+1)$ 의 기초지지 스프링은 항상 존재한다. 예를 들면, 좌단의 경계조건이 자유인 경우에는 절점 1에 있는 기초지지 스프링의 스프링상수 값이 0이 된다. 만약, 우단의 경계조건이 고정인 경우에는 절점 $(n+1)$ 에 있는 기초지지 스프링의 스프링상수 값을 ∞ 로 고려할 수 있는 수치적으로 아주 큰 값으로 설정한다.

2.2 축대칭 원통셀요소의 질량 및 강성행렬

유한요소법에 사용되는 일정한 반경을 갖는 축대칭 원통형 셀요소의 질량행렬 및 강성행렬은 일반적으로 다음 식과 같이 유도된다⁹⁾.

$$\hat{\mathbf{M}}_i = \pi \rho_i r_i t_i L_i \int_0^1 \hat{\mathbf{N}}_i^T \hat{\mathbf{N}}_i d\xi \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \pi r_i L_i \int_0^1 \hat{\mathbf{B}}_i^T \hat{\mathbf{D}}_i \hat{\mathbf{B}}_i d\xi \quad (2)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{N}}_i = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & 0 & 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & n_4 & 0 & 0 & n_5 & n_6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 - \xi, & n_2 &= \xi, & n_3 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ n_4 &= L_i(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), & n_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ n_6 &= L_i(-\xi^2 + \xi^3), \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_i = \alpha \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\nu}_i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_i^2/12 & \nu_i t_i^2/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_i t_i^2/12 & t_i^2/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\nu}_i t_i^2/24 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = E_i t_i / (1 - \nu_i^2), \quad \tilde{\nu}_i = 1 - \nu_i,$$

$$\hat{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & 0 & 0 & b_{10} & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_3 & b_{15} & b_{16} & 0 & b_6 & b_{17} & b_{18} \\ 0 & b_{19} & b_{20} & b_{21} & 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_1 &= -1/L_i, & b_2 &= -b_1, & b_3 &= n_w n_1 / r_i, & b_4 &= n_3, \\ b_5 &= n_4, & b_6 &= n_w n_2 / r_i, & b_7 &= n_5, & b_8 &= n_6, \\ b_9 &= -b_3, & b_{10} &= -b_6, & b_{11} &= (6 - 12\xi) / L_i^2, \\ b_{12} &= (4 - 6\xi) / L_i, & b_{13} &= -b_{11}, & b_{14} &= (2 - 6\xi) / L_i, \\ b_{15} &= (n_w / r_i)^2 n_3, & b_{16} &= (n_w / r_i)^2 n_4, \\ b_{17} &= (n_w / r_i)^2 n_5, & b_{18} &= (n_w / r_i)^2 n_6, \\ b_{19} &= 2b_1, & b_{20} &= 12n_w(-\xi + \xi^2) / (r_i L_i), \\ b_{21} &= 2n_w(1 - 4\xi + 3\xi^2) / r_i, & b_{22} &= 2b_2, \\ b_{23} &= 12n_w(\xi - \xi^2) / (r_i L_i), \\ b_{24} &= 2n_w(-2\xi + 3\xi^2) / r_i \end{aligned} \quad (3)$$

이고, L_i, t_i, r_i 는 각각 i 번째 원통 셀요소의 길이, 두께, 반지름이다. 그리고 ρ_i, E_i, ν_i 는 재료의 밀도, 영 계수(Young's modulus), 푸아송 비(Poisson's ratio)이고, ξ 는 x/L_i 를 의미한다.

임의의 i 번째 원통형 셀요소의 좌측과 우측의 힘벡터($\tilde{\mathbf{f}}_i^L, \tilde{\mathbf{f}}_i^R$)와 변위벡터($\tilde{\mathbf{d}}_i^L, \tilde{\mathbf{d}}_i^R$) 사이의 관계는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_i^L \\ \tilde{\mathbf{f}}_i^R \end{bmatrix} = [\hat{\mathbf{K}}_i - \omega^2 \hat{\mathbf{M}}_i] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_i^L \\ \tilde{\mathbf{d}}_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_i^L \\ \tilde{\mathbf{d}}_i^R \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 원통형 셀요소의 강성행렬($\hat{\mathbf{K}}_i$)과 질량행렬($\hat{\mathbf{M}}_i$) 그리고 고유진동수 ω 에 의한 동강성행렬은 식(4)와 같이 부분행렬(submatrix) $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ 로 분해한다.

2.3 강성계수행렬의 전달

알고리즘의 정식화를 쉽게 설명하기 위해 하나의 절점을 절점 좌측과 절점 우측으로 분할한다. 그리고 힘벡터와 강성계수행렬의 기호 위에 \sim 를 붙이면 절점 좌측을 의미하고, 동일 기호위에 \wedge 를 붙이면 절점 우측을 뜻한다. 변위벡터는 절점에서 항상 연속이므로 절점 좌측과 절점 우측의 변위벡터가 항상 동일하다. 따라서 변위벡터의 기호 위에는 절점의 좌측과 우측을 나타내는 표시를 붙이지 않는다. 그리고 기호 옆의 하첨자는 절점 번호 또는 셀요소의 번호를 의미한다.

절점 i 의 좌측에서 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_i$)와 변위벡터(\mathbf{d}_i) 사이의 관계를 절점 i 좌측의 강성계수행렬($\bar{\mathbf{S}}_i$)를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{d}_i \quad (5)$$

그리고 절점 i 의 우측에서 힘벡터($\hat{\mathbf{f}}_i$)와 변위벡터(\mathbf{d}_i) 사이의 관계를 절점 i 우측의 강성계수행렬($\hat{\mathbf{S}}_i$)을 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \hat{\mathbf{S}}_i \mathbf{d}_i \quad (6)$$

여기서, 각 절점은 자유도가 4이므로, 상기 강성계수행렬의 크기는 각각 4×4 가 된다.

전달강성계수법에서는 셀요소 좌측 절점의 힘벡터의 정방향은 유한요소법과는 반대 방향이다. 그리고 요소를 기준으로 표현한 식(4)를 절점을

기준으로 나타내면 다음 식이 된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_i \\ \bar{\mathbf{f}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i^T & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(5)의 i 대신에 $(i+1)$ 을 대입한 식과 식(6) 그리고 식(7)로부터 강성계수행렬의 필드(field) 전달식을 구하면

$$\bar{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{C}_i + \mathbf{B}_i^T \mathbf{V}_i \quad (8)$$

가 되고, 여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \hat{\mathbf{S}}_i + \mathbf{A}_i \quad (9)$$

이다.

절점 i 에 기초지지 스프링이 존재하면, 절점 i 좌측과 우측의 힘벡터가 달라진다. 따라서 절점 i 에서 힘과 모멘트의 평형식은

$$\hat{\mathbf{F}}_i = \bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{d}_i \quad (10)$$

이고, 여기서 기초지지 스프링의 스프링상수로 구성되는 대각행렬 \mathbf{P}_i 는 다음 식과 같다.

$$\mathbf{P}_i = \text{diag}(k_u, k_v, k_w, K)_i \quad (11)$$

식(5)와 식(6) 그리고 식(10)으로부터 강성계수행렬의 포인트(point) 전달식을 구하면

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \bar{\mathbf{S}}_i + \mathbf{P}_i \quad (12)$$

이 된다.

2.4 고유진동수 및 고유모드의 계산

현 알고리즘에서는 경계조건을 절점의 기초지지 스프링으로 모델링하므로, 절점 1 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_1$ 는 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식(6)과 식(10)의 i 대신에 1을 대입한 식으로부터 절점 1 우측의 강성계수행렬 $\hat{\mathbf{S}}_1$ 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{P}_1 \quad (13)$$

식(13)를 시작으로, 식(8)과 식(12)를 반복적으로 적용하면, 마지막 절점인 절점 $(n+1)$ 우측의 강성계수행렬 $\hat{\mathbf{S}}_{n+1}$ 을 구할 수 있다.

우단의 경계조건 역시 절점 $(n+1)$ 의 기초지지 스프링으로 모델링하였으므로, 절점 $(n+1)$ 우측의 힘벡터 $\hat{\mathbf{f}}_{n+1}$ 은 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식(6)의 i 대신에 $(n+1)$ 을 대입하면

$$\hat{\mathbf{S}}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{0} \quad (14)$$

가 되고, 이 식으로부터 다음 식과 같은 진동수 방정식을 유도할 수 있다.

$$|\hat{\mathbf{S}}_{n+1}(\omega)| = 0 \quad (15)$$

식(15)에 이분법을 도입하여 고유진동수를 구할 경우, 거짓근(false root)¹⁰⁾이 발생하여 고유진동수가 아닌 것도 고유진동수로 오인할 수 있다. 따라서 거짓근을 제거하기 위해 진동수 방정식을 다음 식과 같이 수정하여 고유진동수를 구하는 것이 기존의 전달강성계수법이다.

$$\left| \prod_{i=1}^n |\mathbf{G}_i(\omega)| \right| |\hat{\mathbf{S}}_{n+1}(\omega)| = 0 \quad (16)$$

그러나 식(16)에 이분법을 적용하여도 설정된 초기 진동수 간격을 크게 하면 고유진동수를 빠뜨릴 수가 있고, 반대로 초기 진동수 간격을 너무 작게 하면 계산 시간이 급격히 증가하는 문제점이 있다. 이 문제점을 효과적으로 해결하기 위하여 본 연구에서는 참고문헌 (8)에서 증명한 것처럼 실베스터의 관성법칙(Sylvester's inertia theorem)¹¹⁾을 이용하여 궁극적으로 식(16)을 식(17)로 변경한다. 식(17)을 통해 임의의 검색 진동수($\hat{\omega}$) 이하에 존재하는 모든 고유진동수의 개수($N(\hat{\omega})$)를 알 수 있으므로, 식(17)에 이분법을 적용하면 초기 진동수 간격에 관계없이 모든 고유진동수를 빠뜨리지 않고 구할 수 있다.

$$N(\hat{\omega}) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i \quad (17)$$

여기서

$$N_i = \begin{cases} f(\mathbf{G}_i(\hat{\omega})) & (i=1, 2, \dots, n) \\ f(\hat{\mathbf{S}}_i(\hat{\omega})) & (i=n+1) \end{cases} \quad (18)$$

이고, 함수 $f(\mathbf{A}(\hat{\omega}))$ 는 행렬 \mathbf{A} 의 음의 고유치의 개수이다.

고유모드는 고유진동수를 먼저 구한 후, 마지막 절점인 절점 $(n+1)$ 의 변위벡터는 식(14)로부터 구한다. 식(6), 식(7) 그리고 식(9)로부터 아래의 식(19)를 유도할 수 있다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} \quad (i=n, n-1, \dots, 1) \quad (19)$$

식(19)로부터 마지막 절점의 변위벡터를 제외한 모든 절점의 변위벡터를 우단에서 좌단으로 순차적으로 구한다. 끝으로 변위벡터의 성분 중에서 절대치가 가장 큰 값을 찾고, 이 값으로 모든 변위벡터의 성분을 나누어 고유모드를 정규화한다.

3. 수치계산 결과 및 검토

매트랩(MATLAB)¹²⁾을 사용하여 축대칭 원통 셸의 자유진동을 해석할 수 있는 전산 프로그램을 실베스터-전달강성계수법(S-TSCM)과 유한요소법(FEM)으로 각각 만들었다. 그리고 경계조건이 고정-자유 및 고정-고정인 2가지 원통형 셸의 계산 모델에 대하여 퍼스널 컴퓨터(Intel Core2 CPU, 2.93 GB RAM) 상에서 고유진동수와 고유모드를 계산한 결과 및 계산에 사용된 시간을 비교·검토하였다.

3.1 계산 모델 1

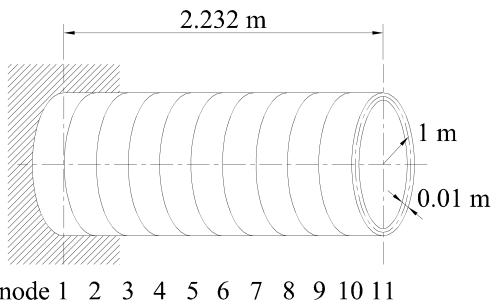
계산 결과의 신뢰성을 확인하기 위하여, 이전의 문헌²⁾에서 자유진동 해석이 수행된 바 있는 지름이 일정한 원통형 셸을 계산모델 1로 선정하였다.

계산 모델 1은 길이 2.232 m, 지름 1 m, 두께 0.01 m인 원통형 셸이고, 경계조건은 좌단이 고정, 우단이 자유이다. 재료의 물성치는 밀도가 7840 kg/m³, 종탄성계수가 206.7 GPa, 푸아송 비가 0.3이

다. 수치 계산 모델 1을 10개의 축대칭 원통형 셀 요소로 모델링한 것이 Fig. 3이다.

Table 1은 원주방향 파의 수(m)가 각각 1에서 5일 경우, 1차부터 4차까지의 고유진동수를 계산한 결과이다. 원통형 셀을 10개, 20개, 50개 그리고 100개의 축대칭 셀요소로 분할하여 S-TSCM과 FEM으로 계산 모델 1의 고유진동수를 계산한 결과, 양 방법의 계산 결과는 완전히 일치하였다. 또한, 계산 결과의 비교를 위해 기존의 전달영향계수법(TICM)²⁾으로 계산한 결과도 Table 1에 제시하였다. Table 1에서 축대칭 셀요소의 분할수를 증가시킬수록 S-TSCM과 FEM의 계산 결과는 TICM의 계산 결과에 수렴함을 알 수 있었다. 이는 이산화 모델링에서 요소의 수를 증가시킬수록 동적 해석의 정확성이 증가되는 것과 동일하다. 그리고 축대칭 셀요소의 분할수를 증가시킬수록 TICM의 결과에 수렴하는 이유는 TICM은 모델링 단계에서 이산화하지 않고, 원통셀의 지배방정식으로부터 직접 고유진동수를 구하기 때문이다.

계산 모델 1을 100개의 원통형 셀요소로 분할하여 모델링하고 원주방향 파의 수(m)가 1에서 5일 때, 1차부터 4차까지의 고유모드를 S-TSCM과 FEM으로 계산한 결과는 서로 잘 일치하였다. Fig. 4는 원주방향 파의 수가 1일 때, 계산 모델 1에 대하여 1차부터 4차까지의 고유모드를 S-TSCM으로 계산한 결과를 보여준다. Fig. 4에서 붉은 실선은 원통셀의 길이방향 변위 u 의 모드, 파란 점선은 원주방향 변위 v 의 모드, 검은 파선은 법선방향 변위 w 의 모드이다.



node 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
 Fig. 3 Computational model 1 modeled by 10 axisymmetric cylindrical shell elements

Table 1 Natural frequencies for model 1 (unit: Hz)

(a) $m = 1$

Order	S-TSCM & FEM				TICM
	10	20	50	100	
1	207.03	206.76	206.71	206.70	206.70
2	553.40	551.27	550.67	550.58	550.55
3	708.93	706.94	706.41	706.34	706.31
4	770.22	767.01	766.10	765.96	765.92

(b) $m = 2$

Order	S-TSCM & FEM				TICM
	10	20	50	100	
1	100.21	99.863	99.783	99.773	99.770
2	348.77	346.32	345.64	345.55	345.51
3	589.79	583.79	582.11	581.86	581.78
4	701.83	693.53	691.14	690.79	690.68

(c) $m = 3$

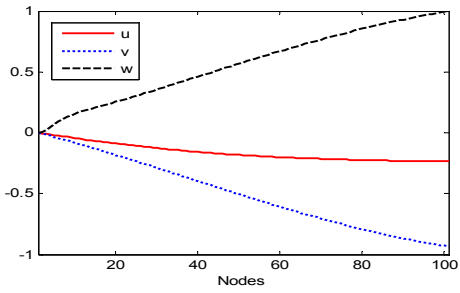
Order	S-TSCM & FEM				TICM
	10	20	50	100	
1	57.721	57.340	57.246	57.234	57.230
2	230.11	227.49	226.80	226.70	226.67
3	448.62	441.00	438.89	438.59	438.49
4	596.66	584.51	581.07	580.58	580.41

(d) $m = 4$

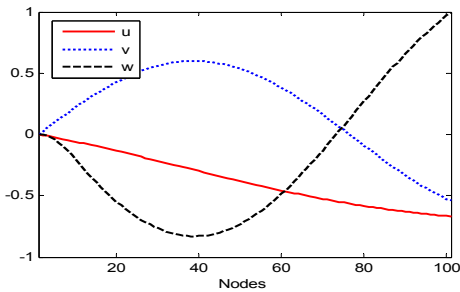
Order	S-TSCM & FEM				TICM
	10	20	50	100	
1	49.746	49.450	49.377	49.367	49.364
2	164.98	162.27	161.56	161.46	161.43
3	344.53	336.21	333.96	333.64	333.54
4	499.36	484.38	480.22	479.63	479.43

(e) $m = 5$

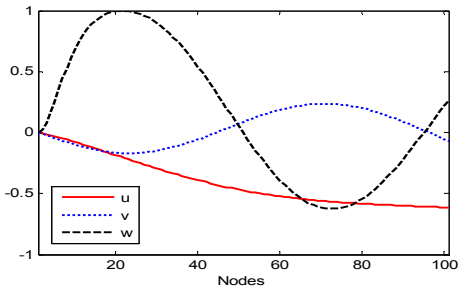
Order	S-TSCM & FEM				TICM
	10	20	50	100	
1	63.286	63.111	63.069	63.063	63.061
2	134.24	131.67	131.01	130.92	130.89
3	276.15	267.65	265.39	265.08	264.97
4	421.73	405.12	400.61	399.97	399.76



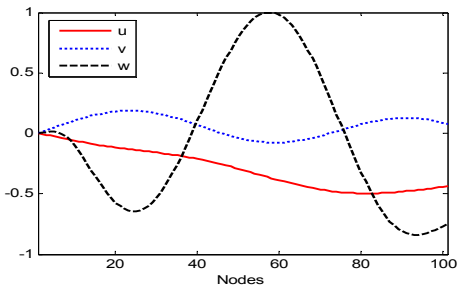
(a) 1st mode ($m = 1$)



(b) 2nd mode ($m = 1$)



(c) 3rd mode ($m = 1$)



(d) 4th mode ($m = 1$)

Fig. 4 Natural modes of model 1

Table 2 Natural frequencies for model 2 (unit: Hz)

(a) $m = 1$

Order	S-TSCM & FEM			
	10	20	50	100
1	459.41	458.05	457.68	457.63
2	705.11.	702.06	701.20	701.07
3	776.24	772.13	770.95	770.78
4	802.99	797.41	795.78	795.55

(c) $m = 2$

Order	S-TSCM & FEM			
	10	20	50	100
1	291.70	290.04	289.61	289.56
2	527.22	522.08	520.66	520.46
3	670.04	662.38	660.21	659.90
4	741.99	732.51	729.78	729.38

(c) $m = 3$

Order	S-TSCM & FEM			
	10	20	50	100
1	199.75	197.65	197.12	197.05
2	391.53	385.33	383.66	383.42
3	554.52	543.61	540.58	540.15
4	661.31	647.01	642.93	642.34

(d) $m = 4$

Order	S-TSCM & FEM			
	10	20	50	100
1	148.37	145.90	145.28	145.20
2	302.50	295.58	293.74	293.49
3	457.58	444.43	440.84	440.33
4	580.91	562.22	556.97	556.23

(e) $m = 5$

Order	S-TSCM & FEM			
	10	20	50	100
1	124.30	121.77	121.14	121.06
2	246.95	239.53	237.60	237.33
3	385.61	371.08	367.18	366.63
4	511.99	490.00	483.93	483.08

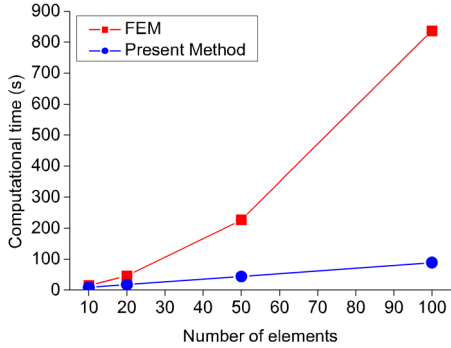


Fig. 5 Computational times for model 1

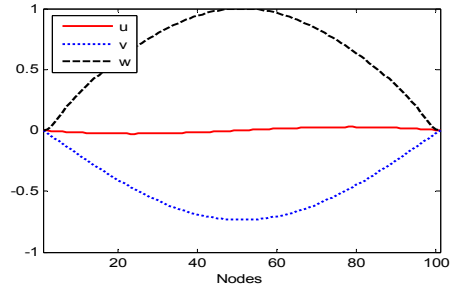
Fig. 5는 S-TSCM과 FEM으로 계산 모델 1에 대하여 Table 1의 고유진동수를 구하는데 소요된 계산 시간을 보여주고 있다. S-TSCM이 FEM보다 계산시간의 측면에서 훨씬 우수함을 확인할 수 있었고, 특히, 분할 요소의 수가 증가할수록 그 차이가 확연히 드러남을 알 수 있었다.

3.2 계산 모델 2

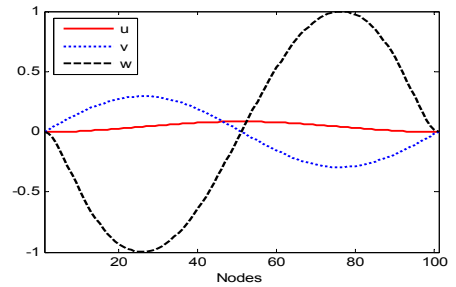
계산 모델 2는 치수 및 물성치가 계산 모델 1과 동일하고, 경계조건은 양단 고정이다. 원통형 셀을 10개, 20개, 50개 그리고 100개의 축대칭 셀요소로 분할하여 S-TSCM과 FEM으로 계산 모델 2의 고유진동수를 계산한 결과, 양 방법의 계산결과는 일치하였고, Table 2에 그 결과를 제시하였다. Table 2에서도 축대칭 요소의 분할수를 증가시킬수록 고유진동수가 수렴해 감을 확인할 수 있었다.

계산 모델 2를 100개의 원통형 셀요소로 분할하여 모델링하고 원주방향 파의 수(m)가 1에서 5일 때, 1차부터 4차까지의 고유모드를 양 방법으로 계산한 결과는 서로 잘 일치하였다. Fig. 6는 $m=1$ 일 때, 계산 모델 2의 1~4차까지의 고유모드를 S-TSCM으로 계산한 결과를 보여준다. Fig. 6에서 붉은 실선, 푸른 점선, 검은 파선은 각각 원통 셀의 길이방향 변위 u , 원주방향 변위 v , 법선방향 변위 w 의 모드이다.

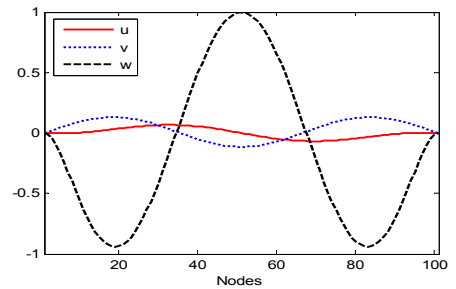
Fig. 7은 현 방법(S-TSCM)과 FEM으로 계산 모델 2에 대한 고유진동수(Table 2)를 계산하는데 소요된 계산 시간이다. 계산 모델 1의 결과와 동일하게, S-TSCM이 FEM보다 계산 시간의 측면에서 우수함을 확인할 수 있었다.



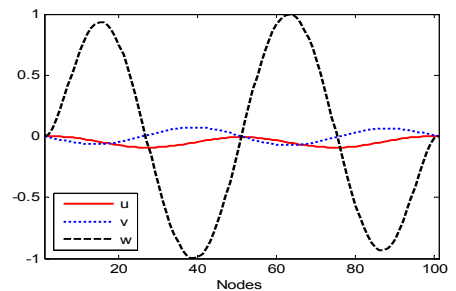
(a) 1st mode ($m=1$)



(b) 2nd mode ($m=1$)



(c) 3rd mode ($m=1$)



(d) 4th mode ($m=1$)

Fig. 6 Natural modes of model 2

상기 계산 모델 1 및 계산 모델 2에 대한 수치 계산 결과를 비교·검토한 결과, 유한요소-전달강성계수법이 유한요소법에 비해 계산 정도 (computational accuracy)의 감소 없이 효과적으로 자유진동 해석을 수행함을 확인할 수 있었다.

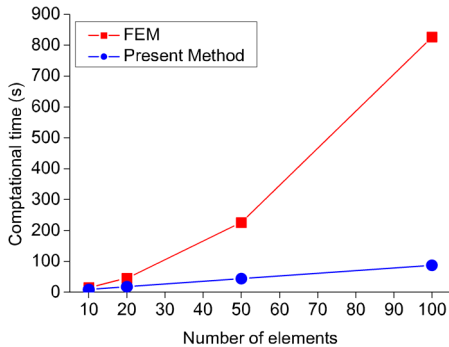


Fig. 7 Computational times for model 2

4. 결 론

축대칭 원통형 셸을 대상으로 실베스터의 관성법칙과 전달강성계수법을 조합한 실베스터-전달강성계수법을 이용하여 자유진동 해석 알고리즘을 정식화 하였다. 그리고 정식화한 알고리즘을 기반으로 매트랩으로 축대칭 원통형 셸의 고유진동수와 고유모드를 계산할 수 있는 전산 프로그램을 만들었다. 계산 결과를 비교하여 유한요소법으로 동일한 해석이 가능한 전산프로그램을 만든 후, 계산 결과를 비교하였다.

고정-자유 및 고정-고정의 경계조건을 갖는 축대칭 원통형 셸을 대상으로 실베스터-전달강성계수법과 유한요소법으로 고유진동수와 고유모드를 계산한 결과는 완전히 일치하였다. 따라서 실베스터-전달강성계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

상기 2가지 계산모델에 대해 양 방법으로 자유진동을 해석하는데 사용된 계산 시간을 비교한 결과, 실베스터-전달강성계수법이 유한요소법보다 훨씬 적은 시간이 소요되었다. 그리고 알고리즘의 특성상 유한요소법은 전체 자유도에 해당하는 전산 메모리를 일시에 사용함에 비해, 실베스터-전달강성계수법은 전달의 개념을 사용하므로 대규

모 계산 모델에 대해서도 소규모의 계산 메모리를 이용하여 자유진동 해석이 가능하므로 계산 메모리의 운영면에서도 우수함을 알 수 있다. 따라서 축대칭 원통형 셸의 자유진동 해석을 수행할 경우에는 계산 비용의 측면에서 실베스터-전달강성계수법이 유한요소법보다 효과적임을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. K. Suzuki et al., 1996, "Introduction to Vibrations of Shells", Corona Publishing Co., Tokyo, pp. 167-175.
2. D. J. Yeo, 1996, "Vibration Analysis of Plate and Shell Structures by Transfer Influence Coefficient Method", Doctoral Thesis, National Fisheries University of Pusan, pp. 120-158.
3. T. Irie, G. Yamada and Y. Muramoto, 1983, "Free Vibration of a Circular Cylindrical Shell Elastically Restrained by Axially Spaced Springs", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, No. 3, pp. 544-548.
4. D. H. Moon and M. S. Choi, 1999, "Vibration Analysis of Structures Having Various Connection Parts Using Transfer of Stiffness Coefficient", Transactions of the KSME (A), Vol. 23, No. 2, pp. 344-356.
5. D. H. Moon and M. S. Choi, 2000, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient", Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 5, pp. 725-736.
6. M. S. Choi, 2003, "Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 17, No. 6, pp. 805-815.
7. J. Kiusalaas, 2005, "Numerical Methods in Engineering with MATLAB", Cambridge University Press, Cambridge, pp. 146-149.
8. M. S. Choi, T. Kondou and Y. Bonkobara, 2012, "Development of Free Vibration Analysis

Algorithm for Beam Structures by Combining Sylvester's Inertia Theorem and Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 26, No. 1, pp. 11-19.

9. C. T. F. Ross, 1984, "Finite Element Programs for Axisymmetric Problems in Engineering", Ellis Horwood Limited, Chichester, pp. 105-115.
10. A. Sueoka et al., 1998, "A Method of Vibrational Analysis Using a Personal Computer", The Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol. 48, No. 1, pp. 31-46.
11. J. W. Demmel, 1997, "Applied Numerical Linear Algebra", SIAM, Philadelphia, p. 202.
12. <http://www.mathworks.com>.