

http://dx.doi.org/10.7236/JIIBC.2013.13.4.179

JIIBC 2013-4-24

## 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환의 성능 향상을 위한 Quincunx 표본화 기법

### Quincunx Sampling Method for Performance Improvement of 2D High-Density Wavelet Transformation

임중희\*, 신중홍\*\*, 지인호\*\*\*

Joong-Hee Lim, Jong-Hong Shin, Inn-Ho Jee

**요약** 영상처리에서 quincunx 격자를 사용하는 기법은 대표적인 비분리의 표본화 기법이다. 이 방법은 기존의 이차원 분리가능처리 기법보다 더 많은 다양한 방향성을 가지며 대역적 특성도 우수하다. 고밀도 이산 웨이브렛 변환은  $N$ 개의 입력 신호를  $M$ 개의 변환 계수들로 확장하는 변환이다( $M > N$ ). 이차원 처리에서 이 고밀도 이산 웨이브렛 변환의 이동불변의 장점은 표준 이산 웨이브렛 변환보다 더 우수하다. 그래서 이 변환은 다른 많은 웨이브렛보다 더 유용하게 사용될 수 있지만 표본화율이 높은 단점도 존재한다. 본 논문에서는 quincunx 표본화를 사용하는 고밀도 이산 웨이브렛 변환을 제안하였다. 이 방법은 고밀도 이산 웨이브렛과 비분리 처리의 특징을 유지하고 조합하는 방법이다. 제안된 방법은 영상처리 응용분야에서 좋은 성능을 갖는다.

**Abstract** The quincunx lattice is a non-separable sampling method in image processing. It treats the different directions more homogeneously and good frequency property than the separable two dimensional schemes. The high density discrete wavelet transformation is one that expands an  $N$  point signal to  $M$  transform coefficients with  $M > N$ . In two dimensions, this transform outperforms the standard discrete wavelet transformation in terms of shift-invariant. Although the transformation utilizes more wavelets, sampling rates are high costs. This paper proposed the high density discrete wavelet transform using quincunx sampling, which is a discrete wavelet transformation that combines the high density discrete transformation and non-separable processing method, each of which has its own characteristics and advantages. Proposed wavelet transformation can service good performance in image processing fields.

**Key Words** : high density, non-separable, quincunx, shift invariance, direction

## 1. 서론

디지털 영상에 대한 다해상도 분석은 2차원 이산 웨이브렛 변환(discrete wavelet transformation)의 수행으로

가능하다. 이 변환은 2차원 디지털 영상 신호에 대하여 분리 가능(separable) 웨이브렛과 분리 가능 부표본화(subsampling) 격자(lattice) 방식을 채택하여 사용하였다. 정방형 화소 격자는 2차원 디지털 영상의 분리 처리

\*정회원, 한국특허정보원

\*\*정회원, 숭실사이버대학교 정보보안학과

\*\*\*정회원, 홍익대학교 컴퓨터정보통신공학과

접수일자 : 2013년 7월 2일, 수정완료 : 2013년 8월 5일

게재확정일자 : 2013년 8월 16일

Received: 2 July, 2013 / Revised: 5 August, 2013 /

Accepted: 16 August, 2013

\*\*Corresponding Author: [ijee@hongik.ac.kr](mailto:ijee@hongik.ac.kr)

Dept. of Computer & Information Communications Engineering,  
Hongik University, Korea

를 위해서 사용되는 대표적인 부표본화 격자이다. 분리 가능 웨이브렛과 정방형 격자의 사용은 웨이브렛 필터의 설계와 계산 측면 둘 모두에서 유용하다. 그래서 현재 대부분의 영상 압축 알고리즘들에서는 이 방법을 사용하고 있다. 그러나 이런 분리 처리 방법은 모든 응용에서 효과적이지 않고 일부 응용들에서는 제한을 받는다. 그리고 2차원 이산 웨이브렛 변환을 통해서 생성되는 부대역 영상들(subband images)은 상호간의 독립성을 보장할 수 있는 이동 불변(shift invariance) 성질을 만족하지 못한다. 따라서 어느 특정 부대역 영상들에 대하여서만 디지털 영상처리 기술이 적용된다면, 완전재생(perfect reconstruction)의 영향을 주게 되어 2차원 이산 웨이브렛 역 변환을 통해 생성되는 복원 영상의 품질을 보장하기가 어렵다.

1998년 이후 다차원 신호 비분리(non-separable) 필터뱅크(filter bank)와 다차원 비분리 웨이브렛 변환에 대한 연구가 진행되었지만, 복잡성 때문에 넓게 사용되지 못했다. 그 후, 2000년대 이후에 등장한 다차원 2세대 웨이브렛 변환들에서 비분리 격자가 채택되었으며 그리고 영상의 비분리 처리를 위한 최적의 표본화 구조가 6각형(hexagonal) 격자인 것으로 알려졌다<sup>[1]</sup>. 그러나 이 격자는 복잡성 때문에 하드웨어 및 소프트웨어의 구현이 어렵다. 그래서 절충안으로 제시된 것이 quincunx 격자이다. Quincunx 격자는 비분리 격자의 대표적인 기법으로, 정방형 격자보다 공간 표본화 구조에서 더욱 효율적이다<sup>[2]</sup>.

기존 웨이브렛 변환이 이동 불변의 성질을 만족하지 못하는 원인은 웨이브렛 필터뱅크(filter bank)에서의 다운 샘플링(down sampling)과정 때문이다. 이 과정에서는 많은 표본들이 제거되기 때문에, 생성된 각 부대역들은 주파수상에서 중첩(aliasing)을 발생시켜서 에너지 분포에 큰 변화를 일으키게 한다. 따라서 각 부대역 영상의 계수들은 서로 상이한 값들을 출력하므로, 부대역 영상의 적절한 처리를 어렵게 한다<sup>[3]</sup>. 고밀도 이산 웨이브렛 변환(high density discrete wavelet transformation)은 기존 웨이브렛 변환이 이동 불변 성질을 만족하지 못하는 것을 극복하기 위해서 제안되었다. 이것은 다운 샘플링 과정에서 감소되는 표본의 수를 변경하여서, 입력의 표본보다 더 많은 표본의 수가 생성되는 변환이다. 즉, 웨이브렛 변환에서 N개의 입력 신호들이 M개의 변환 계수들로 증가하게( $M > N$ ) 하는 변환이다. 그러나 증가된 표

본들에 의해서 부대역간의 중첩이 발생하지 않으므로 이동 불변 성질을 만족하게 한다<sup>[4]</sup>.

본 논문에서는 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환에 quincunx 격자의 표본화를 적용한 비분리 처리 실험을 수행하였다. 그리고 각종 성능실험을 통해서 제안된 방법이 기존의 2차원 이산 웨이브렛 변환과 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환들의 정방형 분리처리 방식보다 이동 불변을 만족하면서 더 많은 방향 선택성을 갖는 것을 확인하였다. 그리고 잡음제거 기법 실험에 적용하여 우수성을 확인하였다. 따라서 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환의 비분리 처리 방식은 잡음제거 기술, 워터마킹(watermarking) 기술, 텍스처(texture) 분할 기술, 영상의 분류 기술, 움직임 예측 및 보상 기술 등에서 보다 더 효과적인 처리를 수행할 수가 있다.

본 논문의 구성으로 2장에서는 본 논문의 기본 개념이 되는 이산 웨이브렛 변환의 표본화 격자를 소개하였다. 그리고 영상에서 처리 방법을 제시하였다. 3장에서는 고밀도 이산 웨이브렛 변환에 대한 기본적인 개념을 제시하였다. 4장에서는 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환에 대한 처리방법을 소개하고 그리고 제안된 방법으로 quincunx 표본화가 적용된 이중 밀도 이산 웨이브렛 변환 기술을 설명하였다. 5장에서는 제안된 방법에 대한 성능을 평가하기 위한 실험과 그 결과를 제시하였다. 마지막으로 6장에서는 본 연구에 대한 결론을 제시하였다.

## II. 이산 웨이브렛 변환을 위한 표본화 격자

### 1. 이산 웨이브렛 필터뱅크

이산 웨이브렛 변환은 디지털 필터뱅크 동작으로 수행된다. 그리고 사용되는 디지털 필터뱅크의 디지털 필터들은 저주파 통과 필터와 고주파 통과 필터들로 구성되며, 이 필터들은 특수하게 설계되어서 직교 특성, 선형 특성을 만족한다. 또한 디지털 필터뱅크에는 표본의 수를 감소시키는 다운 샘플링(down sampling) 과정과 표본의 수를 증가시키는 업 샘플링(up sampling)과정이 포함된다. 소리 또는 음성 신호와 같은 1차원 신호에 대한 이산 웨이브렛 변환은 그림 1과 같이 다해상도 신호로 분해되었다가, 역변환 과정을 통해서 다시 합성되어 식(1)의 완전 재생이 만족된다.

$$x(n) = \hat{x}(n) \quad (1)$$

이론상 이산 웨이브렛 변환은 생성되는 저주파 부대역 신호에 대한 필터링과 다운 샘플링을 무한 반복하면 얻어진다. 실제적으로 계속된 다운 샘플링으로 인해서 입력 데이터가 사라져버리게 되므로 반복되는 단계(stage)가 제한된다.

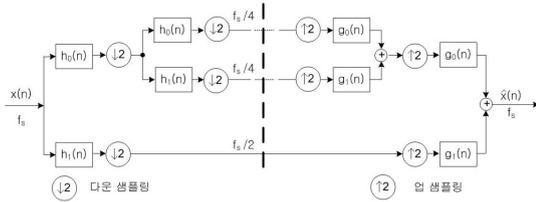


그림 1. 이산 웨이브렛 변환 필터뱅크  
Fig. 1. Discrete Wavelet Transformation Filter Bank

그림 1에서 왼편의 다해상도 분해로 생성되는 부대역 신호들의 데이터 크기의 총합은 입력된 이산 신호의 데이터 크기와 동일하다.

$$f_s = \frac{f_s}{4} + \frac{f_s}{4} + \frac{f_s}{2} \quad (2)$$

그래서 이것을 정밀하게 표본화되는 이산 웨이브렛 변환(Critically sampling Discrete Wavelet Transformation : CDWT)이라고 한다. 필터뱅크(filter bank)에 포함된 다운 샘플링(down sampling)과정이 CDWT의 특성을 만족할 수 있게 하지만, 이로 인해서 절반의 표본들이 제거되어서 이동 불변(shift invariance)의 성질을 만족하지 못하게 하는 원인이 된다.

## 2. 2차원 이산 웨이브렛 변환의 표본화 격자

일반적인 2차원 이산 웨이브렛 변환에서는 입력 신호인 디지털 영상에 대하여 수직과 수평 방향으로 분리된 처리를 수행하게 되는데 이런 방식을 분리 웨이브렛 변환(separable wavelet transformation)이라고 한다. 따라서 표본화 과정도 수직과 수평방향으로 다운 샘플링이 수행되도록 정방형 화소 격자를 기본적으로 사용한다. 그러나 이차원 영상 공간에서 최적의 표본화 구조는 육각형(hexagonal) 격자이다. quincunx 격자는 육각형 격자보다 구현이 용이한 방법으로 정방형과 육각형의 절충형 격자이다.

## 가. 분리가능(separable) 표본화 격자

분리가능 격자의 확장 행렬은  $D=2I_d$ 이며,  $I_d$ 는  $d$ 차원 단위행렬이다.  $D$ 는 대각(diagonal)의 특징을 갖는다. 웨이브렛 변환의 각 스케일에서 분해 부대역의 수는  $M=2^d$ 이며,  $d=2$ 인 경우를 그림으로 설명한 것이 그림 2(a)이다. 그리고 수학적 표현은 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

각 부대역들 간의 이동은  $t_0=(0, 0)$ ,  $t_1=(1, 0)$ ,  $t_2=(0, 1)$  그리고  $t_3=(1, 1)$ 일 때, 응답은  $\tau_0=(0, 0)$ ,  $\tau_1=(1/2, 0)$ ,  $\tau_2=(0, 1/2)$  그리고  $\tau_3=(1/2, 1/2)$ 이다.

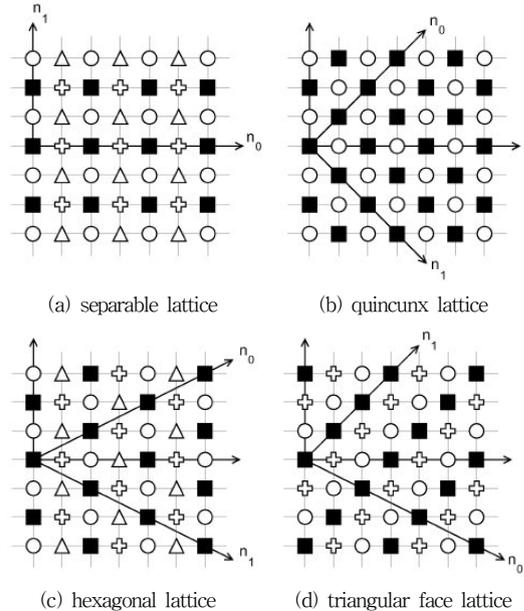


그림 2. 표본화 격자의 종류  
Fig. 2. Sampling Lattices

## 나. 바둑판(checkerboard) 표본화 격자

바둑판 격자의 확장 행렬은 다음과 같이 정의 된다.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & (-1)^{d-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$D$ 의 표현은 대각이 아니므로 결과적으로 이것은 비분리 격자이다. 웨이브렛 변환의 각 스케일에서  $M$ 개의 분해 부대역 수는 차원에 종속적이다.  $d=2$ 인 경우에서, 바둑판 격자는 quincunx 격자라고 한다. 그리고  $d=3$ 인 경우, 면심 사방정계(face centered orthorhombic) 격자라고 한다.  $d=2$ 인 경우를 그림으로 설명한 것이 그림 2(b)이다. 그리고 수학적 표현은 다음과 같다.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

각 부대역들 간의 이동은  $t_0=(0, 0)$ ,  $t_1=(1, 0)$ 일 때, 응답은  $\tau_0=(0, 0)$ ,  $\tau_1=(1/2, 1/2)$ 이다.

#### 다. 육각형(hexagonal) 표본화 격자

최적의 표본구조로 알려진 육각형 격자의 확장 행렬은 다음과 같이 정의된다. 그리고 그림 2(c)가 육각형 격자를 나타낸다.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$D$ 는 대각이 아니므로 결과적으로 이것은 비분리의 격자이다. 각 스케일에서 분해 부대역들의 수는  $M=4$ 이다. 각 부대역들 간의 이동은  $t_0=(0, 0)$ ,  $t_1=(1, 0)$ ,  $t_2=(2, 0)$  그리고  $t_3=(3, 0)$ 일 때, 응답은  $\tau_0=(0, 0)$ ,  $\tau_1=(1/4, 1/4)$ ,  $\tau_2=(1/2, 1/2)$  그리고  $\tau_3=(3/4, 3/4)$ 이다.

#### 라. 삼각면(triangular face) 표본화 격자

확장 행렬은 다음과 같이 정의되고 그림 2(d)는 이를 나타낸다.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$D$ 는 대각이 아니므로 결과적으로 이것은 비분리의 격자이다. 각 스케일에서 분해 부대역들의 수는  $M=3$ 이다. 이 구성에서, 격자의 각 점은 동일 스케일에서 두 격자들의 삼각형 중심에 있다. 각 부대역들 간의 이동은  $t_0=(0, 0)$ ,  $t_1=(1, 0)$ , 그리고  $t_2=(2, 0)$ 일 때, 응답은  $\tau_0=(0, 0)$ ,  $\tau_1=(1/3, 1/3)$ , 그리고  $\tau_2=(2/3, 2/3)$ 이다<sup>[1]</sup>.

### 3. Quincunx 표본화를 사용한 2차원 웨이브렛 변환

Quincunx 표본화는 디지털 영상의 회전(rotation) 기하학처리 방법에서 45도 회전으로 쉽게 구현될 수 있다. 식(8)은 디지털 영상의 45도 회전 기하학을 통해서 quincunx 격자가 생성되는 것을 나타낸다. 즉, 식(8)은 식(5)와 동일한 결과이다.

$$\begin{bmatrix} x_{dest} \\ y_{dest} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{source} \\ y_{source} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{source} \\ y_{source} \end{bmatrix}$$

여기서,  $x_{source}$ 와  $y_{source}$ 는 회전이 일어나기 전의 영상 화소의 좌표가 된다. 그리고  $x_{dest}$ 와  $y_{dest}$ 는 영상 화소들이 회전된 후의 좌표를 나타낸다.

디지털 영상의 45도 회전과정에서 발생하는 표본들의 변화는 마름모꼴의 형태가 되어서 그림 2(b)와 같이 된다. 그림 3은 quincunx 표본화를 적용한 2차원 비분리 처리 이산 웨이브렛 변환을 나타낸 것이다. 첫 단계에서는 수평 방향으로 필터링이 진행되고, 표본화 과정에서 영상은 시계 방향으로 45도 회전하면서 그 크기가 감소된다. 두 번째 단계에서는 45도 회전된 영상을 처리하므로, 추가된 대각 방향으로 필터링이 수행된다. 그리고 두 번째 표본화를 통해서 90도 회전을 하게 된다. 세 번째 단계에서는 90도 회전된 영상을 처리하므로 수직 방향의 필터링이 수행되고 세 번째 표본화는 영상을 135도 회전시킨다<sup>[4][5]</sup>.

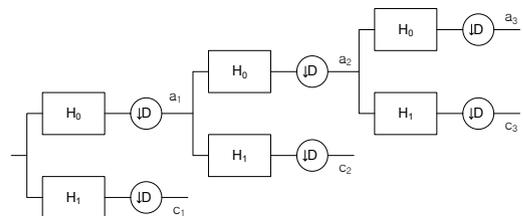


그림 3. 비분리 이산 웨이브렛 변환  
Fig. 3. Non-separable Discrete Wavelet Transformation

그림 4는 그림 3의 방법으로 처리된 디지털 영상에 대한 부대역 영상들을 나타낸 것이다. 3단계까지 수행된 것

으로 부대역의 영상의 크기는 한 단계가 진행될 때마다 1/2씩 감소한다.

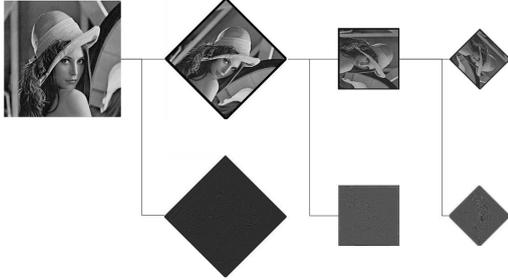


그림 4. 비분리 웨이블릿 변환의 영상처리 결과  
Fig. 4. Image Processing Result of Non-separable Wavelet Transformation

### III. 고밀도 이산 웨이블릿 변환 필터뱅크

고밀도 이산 웨이블릿 변환에서는 더 많은 부대역 신호를 생성하기 위해서 3개의 대역을 형성한다. 그리고 기존 표준 이산 웨이블릿 변환보다 3배 많은 밀도를 갖는다. 그림 5는 3채널로 구성된 고밀도 이산 웨이블릿 변환의 필터뱅크를 나타낸 것이다. 처음의 두 채널에서는 2에 의한 다운 샘플링 과정이 존재하지만 마지막 채널에서는 다운 샘플링 과정이 존재하지 않는다<sup>[6]</sup>. 부대역 신호의 총 데이터율은 입력 데이터율 2배가 되며, 다음과 같이 표현이 된다.

$$\frac{f_s}{2} + \frac{f_s}{2} + f_s = 2f_s \quad (8)$$

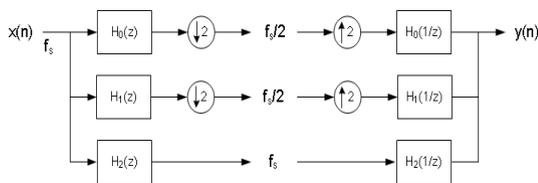


그림 5. 고밀도 이산 웨이블릿 변환  
Fig. 5. High Density Discrete Wavelet Transformation

이 변환은 저주파 대역 출력이 다시 동일한 필터뱅크에 입력되는 것이 반복된다. 즉, 스케일이 증가함에 따라서 입력 데이터와 출력 데이터의 비율은 다음의 식(9)와

같이 증가해서 3배의 밀도가 된다.

$$2f_s \Rightarrow \frac{5f_s}{2} \Rightarrow \frac{11f_s}{4} \Rightarrow \frac{23f_s}{8} \Rightarrow \dots \Rightarrow 3f_s \quad (9)$$

그림 5의 3채널 필터뱅크는 완전재생 조건을 만족하도록 설계가 되어야 한다. 저대역 통과 필터  $h_0$ 의 전달함수  $H_0(z)$ 는  $P(z)$ 와  $Q(z)$ 의 곱으로 인수 분해가 가능하다. 그리고 이 인수 분해로부터 필터  $h_1$ 과  $h_2$ 를 결정할 수 있다. 입력이  $x(n)$ 이고 출력이  $y(n)$ 이라고 하면,  $y(n)$ 은 다음과 같다.

$$Y(z) = 0.5[H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)]H_0(1/z) + 0.5[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)]H_1(1/z) + H_2(z)H_2(1/z)X(z) \quad (10)$$

식(10)이 완전재생을 만족시키기 위해서는 다음과 같은 조건들이 필요하다.

$$H_0(z)H_0(1/z) + H_1(z)H_1(1/z) + 2H_2(z)H_2(1/z) = 2 \quad (11)$$

그리고

$$H_0(-z)H_0(1/z) + H_1(-z)H_1(1/z) = 0 \quad (12)$$

따라서 필터 집합들은 저역통과 필터  $h_0$ 와 이것의 전달함수에 대한 인수분해로부터 차례로 얻어진다. 결과적으로 필터들은 다음과 같이 정리된다.

$$H_0(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{k_0} \quad (13)$$

$$H_1(z) = z^{-\alpha} \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{k_1} \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^{k_2} A(-1/z)(-z)^M$$

$$H_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-z^{-1}}{2}\right)^{k_2} C(z)$$

그리고  $F(z) = H_0(z)H_0(1/z)$ 라고 가정하면,  $f(n)$ 은 대칭의 홀수 길이의 필터(선형 위상 FIR 필터)가 된다.  $F(z)$ 가 최대평탄(maximal-flat) 선형위상 FIR조건에 의해서 다음과 같이 얻어진다.

$$F(z) = \left(\frac{z+2+z^{-1}}{4}\right)^{K_0} \times \sum_{k=0}^{k_2-1} \left(\frac{K_0-1+k}{k}\right) \left(\frac{-z+2-z^{-1}}{4}\right)^k \quad (14)$$

고밀도의 웨이브렛 변환을 실행하는 필터 बैं크의 필터 계수는 주어진  $K_0, K_1, K_2$ 에 의해서 여러 종류를 생성할 수 있다. 간단하게  $K_1=1, K_2=3$ 으로 설정하고  $K_0=K_1+K_2=4$ 가 되도록 하면, 다음을 얻는다.

$$F(z) = 2 \left( \frac{z + 2 + z^{-1}}{4} \right)^4 \times (13.5 - 7(z + z^{-1}) + 1.25(z^2 + z^{-2})) \quad (15)$$

$F(z)$ 로부터  $H_0(z)$ 를 얻기 위해 인수분해를 실행하면, 다음과 같이 얻어진다.

$$H_0(z) = \left( \frac{1 + z^{-1}}{4} \right)^4 (3.0337 - 2.0315z^{-1} + 0.4120z^{-2}) \quad (16)$$

그리고  $H_1(z)$ 와  $H_2(z)$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$H_1(z) = \left( \frac{1 + z^{-1}}{2} \right) \left( \frac{1 - z^{-1}}{2} \right)^3 \times (0.4120 + 2.0315z^{-1} + 3.0337z^{-2}) \quad (17)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1 - z^{-1}}{2} \right)^4 \times (0.1150 - 0.8740z^{-1} + 2.1792z^{-2}) \quad (18)$$

얻어진 필터 계수들은 표 1과 같으면 그 길이는 7또는 6탭이 된다. 그리고 이 필터들의 주파수 응답은 그림 6과 같으며, 필터  $h_0$ 는 저역통과 필터이고 필터  $h_1$ 은 대역통과 필터이다. 그리고  $h_2$ 는 고역통과 필터이다<sup>[6]</sup>.

표 1. 고밀도 이산 웨이브렛 필터 계수  
Table 1. High Density Discrete Wavelet Filter Coefficient

n	$h_0(n)$	$h_1(n)$	$h_2(n)$
0	0.189604909379	0.025752563665	0.010167956157
1	0.631450512121	0.075463998066	0.046750380120
2	0.655505518357	-0.06433341412	-0.009172584871
3	0.099615139800	-0.327704691428	-0.354664087684
4	-0.163756210215	0.228185687127	0.499004628714
5	-0.023958870736	0.252240693362	-0.192086292435
6	0.025752563665	-0.189604909379	0

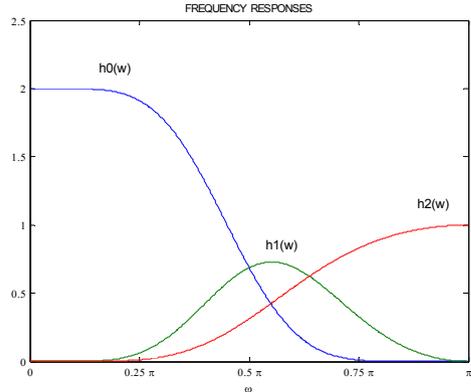


그림 6. 고밀도 이산 웨이브렛 필터들의 응답  
Fig. 6. Filter Response of High Density Discrete Wavelet Filters

#### IV. 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환

본 논문에서는 quincunx 표본화를 사용하는 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환을 제안하였다.

##### 1. 2차원 분리가능 고밀도 이산 웨이브렛 변환

수직과 수평으로 분리하여 처리하는 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환에서는 각 스케일마다 9개의 부대역이 존재한다. 그림 7은 2차원 분리가능 고밀도 이산 웨이브렛 변환의 수행 과정을 나타낸 것이다<sup>[4]</sup>.

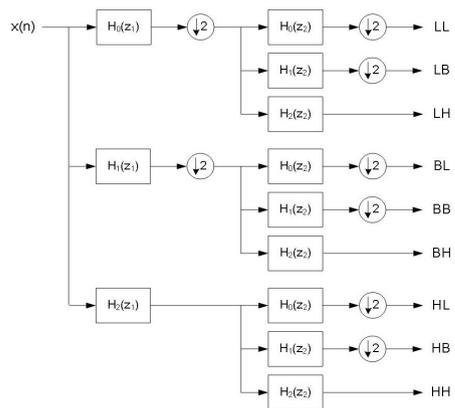


그림 7. 2차원 고밀도 이산 웨이브렛 변환  
Fig. 7. 2D High Density Discrete Wavelet Transformation

L은 저대역, H는 고대역, B는 대역통과라고 하면, 생성되는 부대역은 LB, LH, BL, BB, BH, HL, HB, HH가 된다. 그리고 최저주파수 부대역인 LL이 존재한다. 세 번째 채널은 다운 샘플링 과정이 생략되었기 때문에, 생성되는 각 부대역의 크기는 동일하지 않다. 만약 LL 대역의 크기가  $N \times N$ 이면, LB 부대역은  $N \times 2N$ 이 되며 그리고 HH 부대역은  $2N \times 2N$ 이 된다. 표 2는 2차원 고밀도 이산 웨이블릿 변환의 대역별 부대역 영상의 크기를 정리한 것이다.

표 2. 고밀도 이산 웨이블릿 변환 부영상 크기  
Table 2. Sub-band Image Size of High Density Discrete Wavelet Transformation

LL	$N \times N$
LB	$N \times N$
LH	$N \times 2N$
BL	$N \times N$
BB	$N \times 2N$
BH	$2N \times N$
HL	$2N \times N$
HB	$2N \times 2N$
HH	$2N \times 2N$
Total	$16(N \times N)$

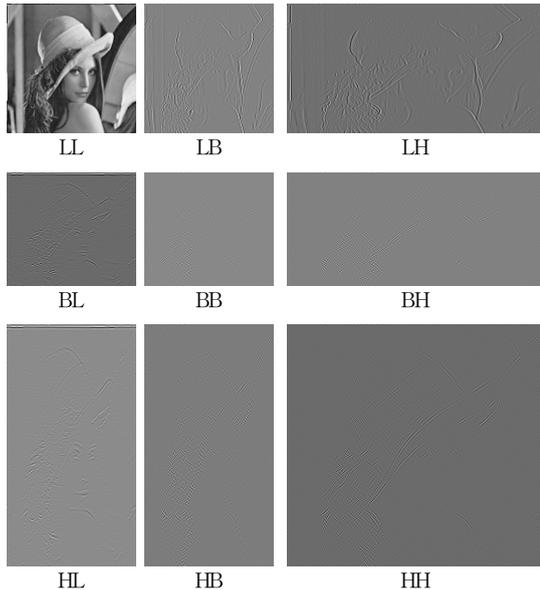


그림 8. 2차원 분리가능 변환의 부대역 영상들  
Fig. 8. Sub-band Images of 2D Separable Transformation

그림 8은  $256 \times 256$  Lena 영상을 1단계만 분리처리 변환하여 얻어진 부대역 영상들을 나타낸 것이다. LB, BL, BB는 크기가  $128 \times 128$ 이고 LH, BH는  $128 \times 256$ 이다. 그리고 HL, HB는  $256 \times 128$ 이다. 마지막으로 HB는  $256 \times 256$ 이다<sup>[7]</sup>.

## 2. 2차원 비분리 처리의 고밀도 이산 웨이블릿 변환

본 논문에서 제안한 고밀도 이산 웨이블릿 변환에 대한 2차원 비분리 처리 기법은 quincunx 표본화를 적용한 것으로 고역통과 필터링 과정에서는 표본화 과정이 존재하지 않는다. 따라서 분리처리와 마찬가지로 대역별 부대역 영상의 크기가 다르다. 또한 영상의 회전 정도는 부대역 영상별 다르게 나타난다. 그림 9는 비분리 처리를 수행을 나타낸 것으로 고주파 부분에 quincunx 표본화가 존재하지 않는 것을 확인할 수 있다.

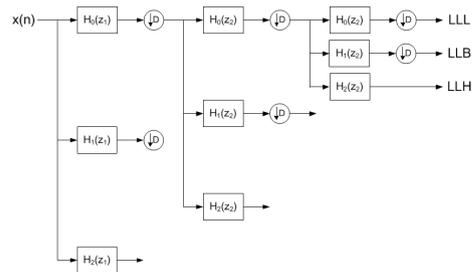


그림 9. Quincunx 비분리 고밀도 웨이블릿 변환  
Fig. 9. Quincunx Non-separable High Density Wavelet Transformation

비분리 처리로 생성된 부대역들은 크기와 회전각도 차이가 발생한다. 그래서 LLL 부대역의 크기가  $N \times N$ 이면, LLB 부대역은  $N \times N$ 이 되지만 LLH 부대역은  $\sqrt{2}N \times \sqrt{2}N$ 이 된다. 그리고 LLL과 LLB는 135도 회전되고 LLH는 90도 회전한다. 그림 10은 본 논문에서 제안한 방법으로 동일한 영상을 그림 9와 같은 구조의 비분리 처리를 통해서 얻어진 부대역 영상들이다. 고주파 영역에서 표본화 과정이 생략되어서 크기뿐만 아니라 회전의 각도도 다양하게 나타나는 것을 확인할 수 있다. 그렇지만 분리처리 방법과 비교하여 볼 때, 생성되는 부대역의 전체 수는 적다. 따라서 고밀도 이산 웨이블릿 변환에서 단점이 될 수 있는 과밀도에 대한 부분을 해결할 수 있다. 또한 영상의 회전으로 다양한 방향성을 갖는 것을 예측할 수 있다.

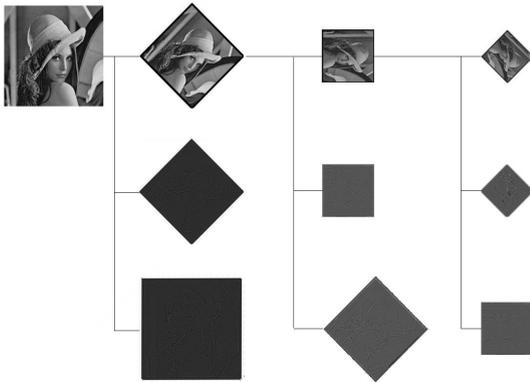


그림 10. 2차원 비분리처리 변환의 부대역 영상들  
Fig. 10. Sub-band Images of 2D Non-separable Transformation

### V. 성능 실험

본 논문에서는 2차원 비분리의 고밀도 이산 웨이브렛 변환의 성능을 분석하기 위해서 객관적인 실험을 수행하였다. 식(14)와 식(15)으로부터  $K_1=1$ ,  $K_2=1$ 로 설정하고  $K_0=K_1+K_2=2$ 가 될 때 얻어지는 고밀도 이산 웨이브렛 필터를 실험에서 사용하였다. 필터 계수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\sqrt{2}}{4} [1, 2, 1] \\ h_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4} [1, 0, -1] \\ h_2 &= \frac{1}{2} [1, -1, 0] \end{aligned} \quad (19)$$

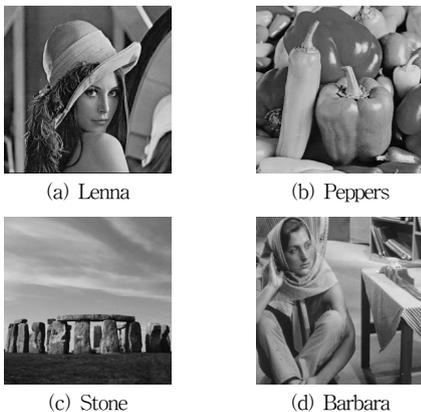


그림 11. 실험 영상  
Fig. 11. Test Images

실험에 사용된 실험 디지털 영상은 8비트 그레이 영상을 사용하였다. 그리고 영상의 크기는 256×256 또는 512×512를 선택적으로 사용하였다. 그림 11은 실험 영상을 나타낸 것으로 (a)와 (b) 영상의 크기는 256×256이고 (c)와 (d)의 영상의 크기는 512×512이다.

그리고 실험 성능을 정량적으로 평가하기 위해 식(20)로 정의되는 첨두 신호대 잡음비(Peak Signal to Noise Ratio)를 사용하였다.

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (20)$$

MSE(mean square error)는 평균 제곱 오차로 식(21)과 같다.

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \| I(i,j) - k(i,j) \|^2 \quad (21)$$

여기서,  $I(i,j)$ 는 원 영상,  $k(i,j)$ 는 복원 영상을 나타낸다.

#### 1. 완전재생 만족 실험

완전재생을 만족하여야만 제안된 웨이브렛 변환의 가역성을 만족한다. 그래서 타 웨이브렛 변환과 비교하면서 완전재생 만족 실험을 실시하였다. 이 실험에서는 각 실험영상에 대하여 4단계의 스케일까지 웨이브렛 변환을 진행하고 다시 역변환을 통해서 각 실험영상을 복원하였다. 그리고 복원 영상과 원 영상에 대한 PSNR를 구하였다. 그림 12는 표준 이산 웨이브렛 변환(SWT), 이중 밀도 이산 웨이브렛 변환(DUWT)<sup>[8]</sup>, 고밀도 이산 웨이브렛 변환(HDWT) 그리고 quincunx 표본화를 사용한 비분리의 고밀도 이산 웨이브렛 변환(QHDWT)의 완전재생 PSNR 값을 나타낸 것이다. 제안된 QHDWT는 충분히 높은 PSNR 값이므로 완전재생을 만족한다. 따라서 변환의 가역성 특징을 잘 만족한다고 할 수 있다. 그리고 타 웨이브렛 변환들과 비교하면 제안된 QHDWT의 PSNR 값이 미소한 차이지만 더 높은 것을 확인할 수 있다. 이것은 표본화 격자의 특성상 분리가능 격자보다 quincunx 격자의 특성이 더 우수하기 때문이다.

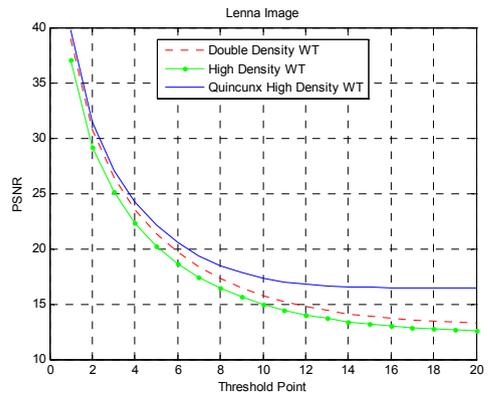


그림 12. 웨이블릿 변환에 대한 완전 재생 실험  
Fig. 12. Perfect Reconstruction of Wavelet Transformations

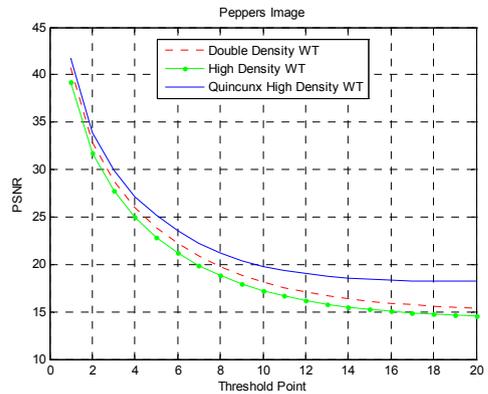
## 2. 이동 불변의 만족도

웨이블릿 변환으로 생성된 부대역 계수들은 저주파성분의 일부 큰 에너지 값을 제외하고 대부분의 고주파 성분으로 거의 0으로 존재한다. 그러나 실제적으로 변환 과정에서 발생하는 필터 및 컨벌루션 계산오류 때문에 0이 아닌 작은 값을 갖는 계수들이 존재한다. 이런 값의 제거 방법은 고주파 대역의 웨이블릿 변환 계수들을 단순히 0으로 만드는 것이다.

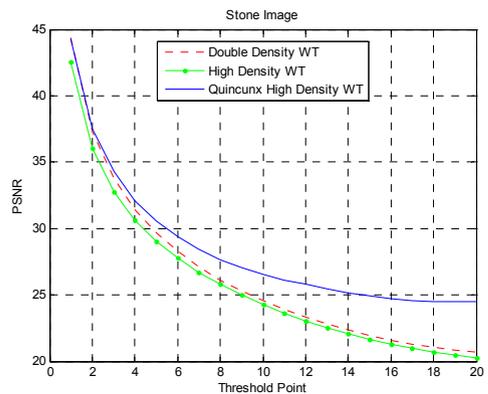
이동 불변을 만족하지 못하는 웨이블릿 변환의 각 부대역 계수들은 서로 상이한 계수 값들을 출력하므로 부대역 계수의 독립적 처리를 어렵게 한다. 이동의 불변성을 잘 만족할수록 부대역별로 독립성이 강하여, 작은 변화가 복원을 하는데 큰 영향을 미치지 못할 것이다. 그래서 더 큰 재생 영상의 PSNR 값을 갖게 된다. 웨이블릿 변환 계수들 중에서 고주파 성분을 0으로 만드는 방법에서 임계값  $T$ 가 증가할수록 계수들이 0으로 되는 개수가 많아진다고 할 때, 임계값 변화에 따른 재생 영상의 PSNR 결과를 통해서 이동불변의 정도를 파악할 수 있다. 즉, 동일 임계값에서 재생 영상의 PSNR 값이 다른 웨이블릿 변환보다 높은 값을 갖는다면 이동불변의 정도가 우수한 것이다. 그림 13은 임계값  $T$ 를 1부터 20까지 변경하면서 얻어진 재생 영상의 PSNR을 비교한 것이다. 실험 결과를 분석하면, 이중 밀도 이산 웨이블릿 변환(Double Density WT)<sup>[8]</sup>와 고밀도 이산 웨이블릿 변환(High Density WT) 보다 quincunx 표본화를 사용한 비분리의 고밀도 이산 웨이블릿 변환(Quincunx High Density WT)의 PSNR이 더 높아서 부대역의 계수들 변화에도 민감하게 반응하지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서, 제안된 비분리처리 기법이 이동의 불변성이 더 좋다고 할 수 있다.



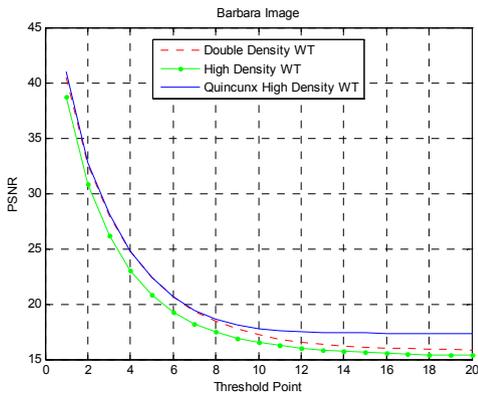
(a) Lenna Image Shift Invariant Result



(b) Peppers Image Shift Invariant Result



(c) Stone Image Shift Invariant Result



(d) Barbara Image Shift Invariant Result

그림 13. 이동 불변 실험 결과  
Fig. 13. Experiment Result of Shift Invariance

3. 선택적 방향성 실험

고밀도 이산 웨이브렛 변환은 많은 부대역 영상으로부터 다양한 방향성을 얻을 수 있다. 그림 14는 분리가능한 웨이브렛 변환으로부터 얻어진 방향성을 나타낸 것이다. 이중 밀도 이산 웨이브렛과 고밀도 이산 웨이브렛 모두 최저주파수의 부대역 LL을 제외한 8개의 대역별 부대역 영상에서 6개의 방향성을 확인하였다<sup>[7]</sup>.

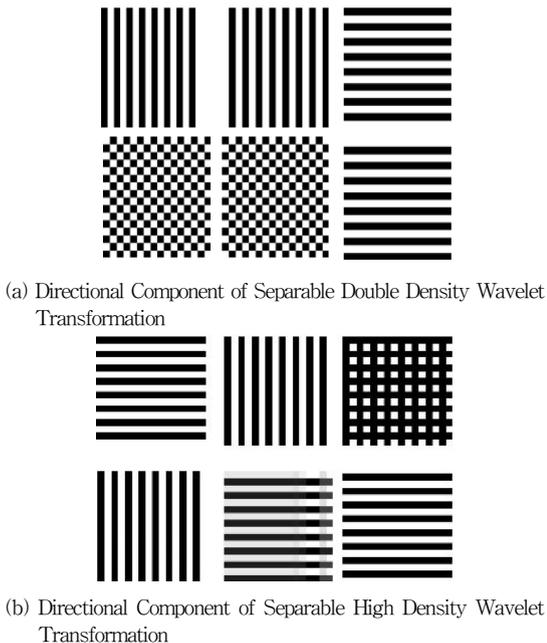


그림 14. 분리가능 웨이브렛 변환의 방향 성분  
Fig. 14. Directional Component of Separable Wavelet Transformation

제안된 방법에 대한 방향 성분은 각 단계마다 부영상이 회전하면서 방향 성분이 새롭게 생겨나므로 그 조합이 다양하다. 그림 15는 8단계까지 수행되면서 생성된 부대역 영상의 방향성 성분을 나타낸 것이다. 결과적으로 제안된 방법은 디지털 영상 특성에 맞는 방향 성분을 더 많이 선택하여 처리할 수 있어 기존 웨이브렛 변환들 보다 더 효율적이다.

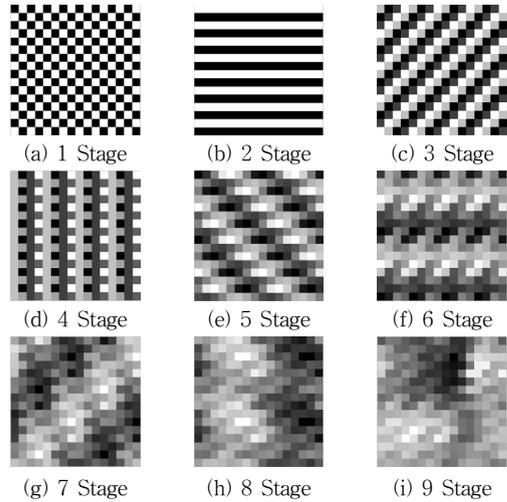


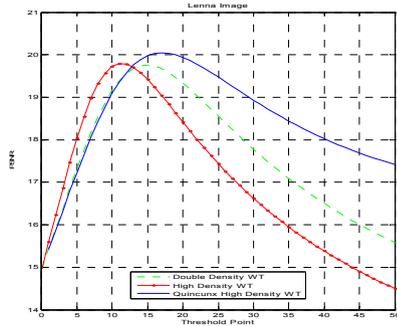
그림 15. 비분리처리 웨이브렛 변환의 방향 성분  
Fig. 15. Directional Component of Non-separable Wavelet Transformation

4. 잡음제거 실험

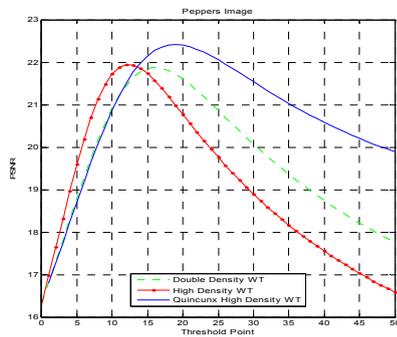
고밀도 이산 웨이브렛 변환이 가장 대표적으로 응용되는 분야가 잡음제거 기술이다. 잡음 신호를 제거하는 가장 기초적인 웨이브렛 기반의 방법은 잡음이 존재하는 웨이브렛 변환 부대역 계수들을 잡음이 없는 웨이브렛 변환 부대역 계수와 유사하게 수정을 하는 것이다. 웨이브렛 변환 계수들은 저주파 성분의 큰 에너지 값을 제외하고 대부분의 고주파 성분은 0에 가까운 값을 갖는다. 따라서 고주파의 잡음 성분을 제거하기 위해서는 0가 아닌 작은 값의 계수만을 단순히 0으로 만드는 것이다.

본 논문의 실험 방법은 잡음이 포함된 디지털 영상용 이산 웨이브렛 변환을 수행하고 생성된 부대역 영상과 임의로 선정된 임계값을 비교해서, 임계값 이하의 부대역 영상 계수들은 잡음으로 판단하고 0 값으로 대체해서 잡음을 제거하는 방법이다. 이 방법에서 선정된 임계값이 작으면, 부대역 영상의 계수 중에서 약간만이 잡음으로

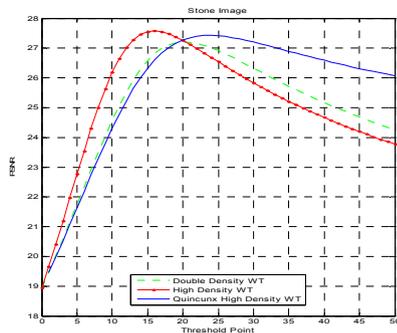
로 판단되어 제거되므로 결과는 만족스럽지 못할 수도 있다. 그렇지만 반대로 선정된 임계값이 너무 크면, 많은 부대역 영상의 계수들이 잡음으로 판단되어 0으로 대체하게 되어서 왜곡이 발생하게 된다. 이 또한 결과가 만족스럽지 못할 수 있다. 따라서 임계값은 적절하게 선택이 되어야 효과적인 잡음 제거가 가능하다.



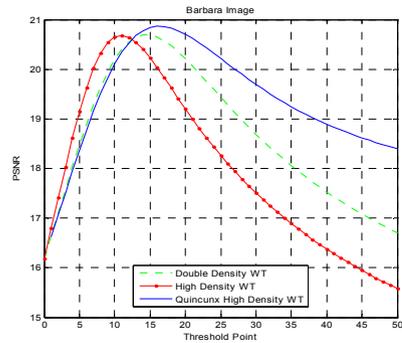
(a) Lenna Image Denoising Result



(b) Peppers Image Denoising Result



(c) Stone Image Denoising Result



(d) Barbara Image Denoising Result

그림 16. 잡음제거 실험 결과  
Fig. 16. Denoising Experiment Results

그림 16은 잡음 제거 실험 결과를 나타낸 것으로, 임계값을 0부터 50까지 변경하면서 잡음이 제거된 영상의 PSNR를 그래프로 표시한 것이다. 실험영상에 첨가된 잡음은 평균 20의 가우시안 균일 랜덤 잡음이다.

Double Density WT<sup>[8]</sup>와 High Density WT는 이중 밀도 이산 웨이브렛 변환과 고밀도 이산 웨이브렛 변환을 나타낸다. 그리고 Quincunx High Density WT는 본 논문에서 제안한 방법이다. 그림 16(a)는 Lenna 영상 그리고 그림 16(b), 그림 16(c), 그림 16(d)는 Peppers, Stone, Barbara에 대한 결과이다. 임계값이 작은 영역에서 제안된 방법의 성능이 타 방법보다 성능이 우수하지 못하다. 그렇지만 임계값이 증가할수록 더 좋은 성능을 보이며 최고의 PSNR 값도 제안된 방법에 의해서 얻어진다. 최고의 PSNR 값을 잡음 제거를 가장 잘해서 원본영상과의 차이가 작다는 것을 의미한다.

## VI. 결론

Quincunx 격자를 이용한 비분리 영상처리 기법은 영상의 대역적 특성을 잘 반영하여서 웨이브렛 변환의 성능을 향상시킨다. 고밀도 이산 웨이브렛 변환의 특징은 이동불변을 만족하는 것으로 그 비용이 많을수록 이동불변의 만족도는 더 높다. 본 논문에서는 이중 밀도 이산 웨이브렛 변환보다 부대역 데이터의 양이 더 많은 고밀도 이산 웨이브렛 변환을 사용하였다. 그렇지만 quincunx 표본화를 사용하여서 기존 분리처리에서의 부대역 데이터 양보다 작으면서도 방향성이 더 많은 비분

리 처리 기법을 제안하였다. 실험결과를 통해서 비분리 처리 기법은 분리가능 처리 방법보다 부대역의 표본의 증가가 크지 않으며, 영상의 회전에 의해서 방향성이 증가한다. 그리고 이동 불변의 특성은 더 우수하다는 것을 확인하였다. 또한 quincunx의 영성 특성을 잘 반영하여 완전재생의 영상품질과 잡음제거 능력도 더 우수하다는 것을 확인하였다.

비분리의 고비용 이산 웨이브렛의 장점은 다양한 응용분야 적용 가능하므로 이에 대한 연구가 더 필요하다.

### References

- [1] Gwenole Quellec, "Adaptive Nonseparable Wavelet Transform via Lifting and Its Application to Content-Based Image Retrieval," IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 19, No. 1, pp. 25-35, January 2010.
- [2] Dimitri Van De Ville, "On the Multidimensional Extension of the Quincunx Subsampling Matrix," IEEE Signal Processing Letters, Vol 12. No. 2, pp. 112-115, February 2005.
- [3] Jingyu Yang, Yao Wang, "Image Coding Using Dual-Tree Discrete Wavelet Transform," IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 17, No. 9, pp. 1555-1569, September 2008.
- [4] Joonghee Lim and Jonghong Shin, "Quincunx Sampling Method for Improvement of Double-density Wavelet Transformation," Journal of the Korea Society of Digital Industry and Information Management, Vol. 8, No. 1, pp. 171-181, March 2012.
- [5] Jonghong Shin, "The Three Directional Separable Processing Method for Double-Density Wavelet Transformation Improvement," Journal of the Korea Society of Digital Industry and Information Management, Vol. 8, No. 2, pp. 131-143, June 2012.
- [6] I. W. Selesnick, "A Higher-density Discrete Wavelet Transform," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 54, No. 8, pp. 3039-3048, August 2006.
- [7] Jonghong Shin, "The Digital Image Processing Method Using Triple-Density Discrete Wavelet Transformation," Journal of the Korea Society of Digital Industry and Information Management, Vol. 8, No. 3, pp. 133-145, September 2012.
- [8] I. W. Selesnick, "The Double-density Dual-tree DWT", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 52, No. 5, pp. 1304-1314, May 2004.

### 저자 소개

#### 임 중 희(정회원)



- 2001년 2월 : 홍익대학교 전자 전기 컴퓨터공학부 공학사
- 2009년 2월 : 홍익대학교 전자 전산공학과 공학석사
- 2012년 8월 : 홍익대학교 전자 전산공학과 공학박사
- 2013년 1월~현재: 한국특허정보원

<주관심분야 : 3D Image Processing, Multimedia Signal Processing>

#### 지 인 호(정회원)



- 1980년 2월 : 서울대학교 전자공학과 공학사
- 1983년 8월 : 서울대학교 전자공학과 공학석사
- 1995년 6월 : Polytechnic Institute of New York University, USA 전기 및 컴퓨터공학과 공학박사

• 1982년~1988년 : 국방과학연구소 선임연구원  
 • 2004년~2005년 : University of Maryland at College Park, USA, 연구교수  
 • 1995년~현재 : 홍익대학교 컴퓨터정보통신공학과 정교수  
 <주관심분야 : DSP, 3D Image Processing, Multimedia Security, Multimedia Signal Processing>

신 중 홍(정회원)



- 1997년 2월 : 홍익대학교 전자 전기공학과 공학사
- 1999년 2월 : 홍익대학교 전자 전기공학과 공학석사
- 2002년 8월 : 홍익대학교 전자 전기공학과 공학박사
- 2003년~현재 : 숭실사이버대학교 정보보안학과 부교수

<주관심분야 : 3D Image Processing, Multimedia Security, Multimedia Signal Processing>

※ 본 논문은 2010년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.