

다수의 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유를 포함하는 복합재료에서의 응력 해석

이정기*[†] · 오상민*

Stress Analysis in Multiple Isotropic Elliptical Fibers of Arbitrary Orientation

Jung-Ki Lee*[†], Sang-Min Oh*

ABSTRACT: A volume integral equation method (VIEM) is introduced for the solution of elastostatic problems in an unbounded isotropic elastic solid containing multiple isotropic elliptical fibers of arbitrary orientation subject to uniform stress at infinity. The fibers are assumed to be long parallel elliptical cylinders composed of isotropic elastic material perfectly bonded to the isotropic matrix. The solid is assumed to be under plane strain on the plane normal to the cylinders. A detailed analysis of the stress field at the matrix-fiber interface for square and hexagonal packing of the fibers is carried out for different values of the number, orientation angles and concentration of the elliptical fibers. The accuracy and efficiency of the method are examined through comparison with results obtained from analytical and finite element methods.

초 록: 체적 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 다수의 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 수행하였다. 장섬유들과 기지 사이의 경계면은 완전결합이라고 가정하여, 평면 변형을 해석을 수행하였다. 즉, 등방성 기지에 다수의 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유의 중심이 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에, 다양한 타원형 장섬유의 체적비와 다양한 경사각에 대하여, 중앙에 위치한 등방성 타원형 장섬유와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사하였다. 또한, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 해석하고, 유한요소법을 이용한 해와 비교해 봄으로서, 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해의 정확도를 검증하였다.

Key Words: 등방성 타원형 장섬유(isotropic elliptical fibers), 임의의 경사각(arbitrary orientation), 체적 적분방정식법(volume integral equation method)

1. 서 론

다양한 형태의 복합재료가 발달함에 따라, 원형 및 타원을 비롯한 다양한 형태의 함유체에서 발생하는 응력 성분을 정확하게 조사하려는 연구가 많은 연구자들에 의하여

진행되고 있다. 그 이유는 원형 또는 타원을 비롯한 다양한 형태의 함유체에서 발생하는 응력 집중 현상으로 인하여, 복합재료에 균열이 발생하고, 전파되어, 결국 복합재료가 파손에 이르게 되기 때문이다[1].

그러나 문제의 복잡성 때문에 해석해를 구할 수 있는 경

접수: 2013년 5월 11일, 수정: 2013년 8월 18일, 게재승인: 2013년 8월 19일

*[†]홍익대학교 기계정보공학과, Corresponding author (E-mail: inq3jkl@wow.hongik.ac.kr)

*홍익대학교 기계정보공학과 대학원

우는 극히 제한되어 있으며[2-5], 대부분의 연구에서는, 유한요소법이나 경계요소법을 이용한 수치해석 방법이 사용되고 있다.

하지만, 유한요소법을 이용한다고 가정하면, 함유체를 포함한 복합재료 전체의 영역을 요소분할해야 한다는 번거로움이 있으며, 특히 함유체와 함유체 사이의 거리가 변하는 문제를 해석할 때 전체의 모델링을 다시 해야 한다는 어려움이 있게 된다. 그리고, 경계요소법을 이용한다면, 함유체가 임의의 형상을 나타내거나 이방성 재료로 이루어지는 경우 수치해석에 많은 어려움이 있게 된다[6-12].

저자는 이전 논문인 “타원 섬유가 포함된 복합재료에서의 탄성 해석[11]”에서 하중이 작용하는 방향과 일치하거나 또는 직각 방향으로 놓여 있는, 다수의 타원형 장섬유를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때, 무한고체 내부에 발생하는 응력분포를 계산하였다. 그러나, Fig. 1[13]에 보이는 복합재료의 단면을 자세히 관찰해보면, 섬유의 형태가 정확하게 원형이 아니라 타원형에 가까우며, 또한 각각의 타원 형태의 섬유가 임의의 각도로 기울어져 있는 것(예를 들어 횡 방향을 기준으로 하였을 때)을 알 수 있다.

그러므로, 본 논문에서는 첫째, 앞에서의 유한요소법과 경계요소법의 문제점을 극복할 수 있는, 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 서로 상호작용을 하는 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유(Fiber, inclusion, 또는 함유체)를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 효과적으로 수행한다; 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 타원형 장섬유가 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여, 각각의 타원을 포함하는 원형 장섬유의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가하고, 경사각이 0°부터 90°까지 15°씩 반시계방향으로 증가할 때, 중앙에 위치한 등방성 장섬유와 등방성 기지의 경계면에서

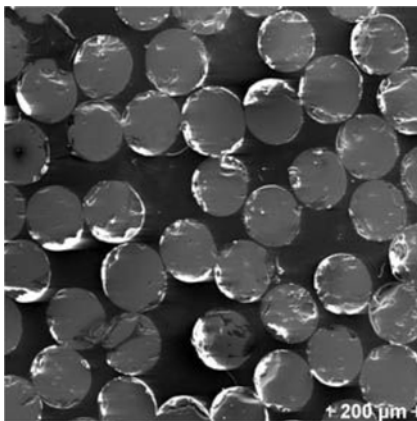


Fig. 1. Phosphate glass fibre/polymer composite cross section [13].

의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사한다. 본 논문에서 타원형 장섬유의 체적비(c)는 타원형 장섬유의 체적비가 아니라, 각각의 타원을 포함하는 원형 장섬유에 대한 체적비를 의미한다는 점을 유의해야 한다. 둘째, 본 논문 자체도 독자적으로 완전한 논문으로 작성하였지만, 본 논문은 저자의 이전 논문[11]의 후속 논문으로서, 타원형 장섬유의 경사각이 중앙에 위치한 등방성 장섬유와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포에 미치는 영향을 중점적으로 조사하였다. 셋째, 본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해가, 다양한 해석 방법들을 이용하여 구한 해들을 검증하는 데 벤치마킹(Benchmark) 자료로 활용될 수 있을 것이다.

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 2는 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 2에서, 기지(Matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 재료로 이루어진다고 가정한다. $c_{ijkl}^{(1)}$ 은 함유체의 탄성상수를 나타내고, $c_{ijkl}^{(2)}$ 은 기지의 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(Traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

Lee와 Mal[6]는 다수의 등방성 함유체를 포함하는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가 다음의 방정식을 만족함을 보였다.

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} q_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi) d\xi \quad (1)$$

식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta c_{ijkl} = c_{ijkl}^{(1)} - c_{ijkl}^{(2)}$ 이며 등방성 함유체와 등방성 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $u_m^o(\mathbf{x})$ 는 무한 하중에 대한 변위를 나타내며, $g_i^m(\xi, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이다. 식 (1)에서 합의 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 ξ_i 에 관해서 행해진다.

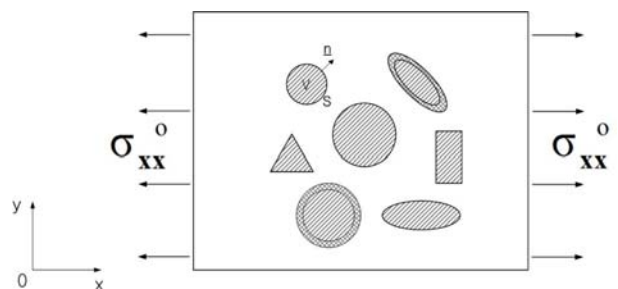


Fig. 2. Geometry of the general elastostatic problem.

다. 여기서, δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피적분함수(Integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다[6].

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(Integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 Lee와 Mal[6]에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 변위, 변형률 및 응력도 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움없이 계산할 수 있다.

등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 Lee와 Mal[6], Lee와 Kim[10], Lee[11,12]에 잘 나타나 있다. 특히, Buryachenko의 전공 서적인 "Micromechanics of heterogeneous materials" [14]의 '4.3절 Volume Integral Equation Method'에 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 설명이 나와 있다.

3. 다수의 장섬유 문제

Fig. 3에 있는 다수의 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유가 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

본 논문에서는, 타원의 장축이 x-축이고, 단축이 y-축이라고 할 때, Fig. 3에 보이듯이 타원의 반경비가 0.5인 타원

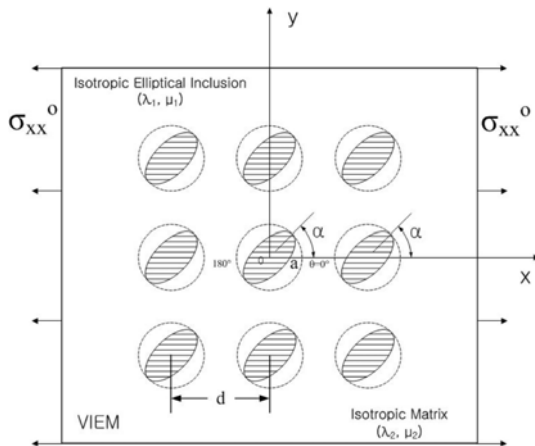


Fig. 3. Multiple isotropic elliptical fibers of arbitrary orientation in the unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

형 장섬유에 대하여, 고려해 보았다.

다수의 타원형 장섬유의 상호작용을 조사하기 위하여, (1) 다수의 타원형 장섬유 중심의 배열이 정사각형(Square) 형태와 정육각형(Hexagon) 형태이고, (2) 타원을 포함하는 원형 장섬유(Fig. 3에 점선으로 표시)의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가하며, (3) 타원형 장섬유의 경사각 α 가 0° 부터 90° 까지 15° 씩 반시계방향으로 증가할 때, 타원형 장섬유의 개수를 늘려가면서, 중앙에 위치한 타원형 장섬유에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 이 경우는 체적 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다. 왜냐하면, (1) 경계요소법과 달리, 모든 경계면에서의 연속 조건이 자동적으로 만족하고, 함유체 내부를 유한요소를 사용하여 요소 분할하므로 임의의 형상을 갖는 함유체를 해석할 때 도 용이하며, (2) 유한요소법과 달리, 무한공간을 이루고 있는 기지는 요소분할할 필요가 없이, 함유체 내부만을 요소분할하면 되기 때문이다. 특히, (3) 함유체의 체적비와 경사각이 변화할 때, 기지를 요소분할할 필요가 없이 함유체의 위치만 변경하면서 모델링할 수 있으므로, 체적 적분방정식법을 이용한 수치해석을 매우 효율적으로 수행할 수 있게 된다[6,10-12].

평면 변형률 문제로 가정한, 다수의 함유체 문제 해석을 위한 체적 적분방정식 (1)은 다음과 같이 표현된다.

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^0(\mathbf{x}) - \int_R \{ [\delta c_{11} g_{1,1}^1 u_{1,1} + \delta c_{12} g_{1,1}^1 u_{2,2} + \delta c_{66} g_{1,2}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] + [\delta c_{22} g_{2,2}^1 u_{2,2} + \delta c_{21} g_{2,2}^1 u_{1,1} + \delta c_{66} g_{2,1}^1 (u_{1,2} + u_{2,1})] \} d\xi_1 d\xi_2 \quad (2)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = u_2^0(\mathbf{x}) - \int_R \{ [\delta c_{11} g_{1,1}^2 u_{1,1} + \delta c_{12} g_{1,1}^2 u_{2,2} + \delta c_{66} g_{1,2}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] + [\delta c_{22} g_{2,2}^2 u_{2,2} + \delta c_{21} g_{2,2}^2 u_{1,1} + \delta c_{66} g_{2,1}^2 (u_{1,2} + u_{2,1})] \} d\xi_1 d\xi_2 \quad (3)$$

여기서, $u_1(\mathbf{x})$ 와 $u_2(\mathbf{x})$ 는 함유체 내부 및 외부를 포함하는 고체의 임의의 위치에서의 변위 성분을 나타낸다. $\delta c_{11} = \delta c_{22} = (\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)$, $\delta c_{12} = \delta c_{21} = \lambda_1 - \lambda_2$, 그리고 $\delta c_{66} = \mu_1 - \mu_2$ 를 나타낸다. 또한, g_i^m 은 무한 공간을 차지하는 등방성 기지에서의 탄성정역학 Green 함수를 나타내고, 다음과 같이 주어진다[15].

$$g_i^m = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[-\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \ln r \delta_{im} + r_{,i} r_{,m} \right] \quad (4)$$

여기서, $\mathbf{r} = |\mathbf{x} - \xi|$, $i, m = 1, 2$ 그리고 λ, μ 는 등방성 무한기지에서의 Lamé 상수를 나타낸다.

3.1 단일의 등방성 타원형 장섬유 문제

등방성 장섬유와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에

Table 1. Material properties of the isotropic matrix and the isotropic elliptical fiber for the elastostatic problems

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Isotropic fiber
λ	67.34	176.06
μ	37.88	176.06

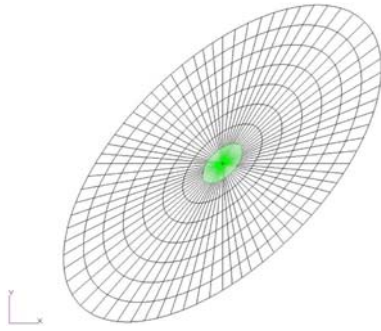


Fig. 4. A typical discretized model for a single elliptical fiber at an inclined angle $\alpha = 45^\circ$ in the volume integral equation method.

나타나 있으며, 저자의 이전 논문[11]의 물질 특성치와 동일하다. Fig. 4는 경사각이 45° 일 때, 단일의 등방성 타원형 장섬유 문제 해석을 위하여 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델의 예를 나타내며, 장섬유 내부를 576개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

경사각이 0° 일 때, 단일의 등방성 타원형 장섬유와 등방성 기지로 이루어진 무한고체가 무한 인장하중을 받을 때, 장섬유 내부에 발생하는 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)에 대한 해석해는 1.6144이고, 체적 적분방정식법의 해는 1.6147(평균 값)이었다. 단일의 등방성 타원형 장섬유 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 되는 것을 알 수 있으며[6,10-12,16], 체적 적분방정식법의 해와 해석해가 서로 잘 일치하는 것을 확인하였다.

3.2 다수의 등방성 타원형 장섬유 중심의 배열이 정사각형(square) 형태일 경우

다음에는, 다수의 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유의 중심이 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다(Fig. 5).

각각의 타원을 포함하는 원형 장섬유의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가하고, 타원형 장섬유의 경사각 α 가 0° 부터 90° 까지 15° 씩 반시계방향으로 증가할 때, 타원형 장섬유의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 장섬유에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 등방성 장섬유와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다. Table 2는 장섬유의 체적비에 따라 달라

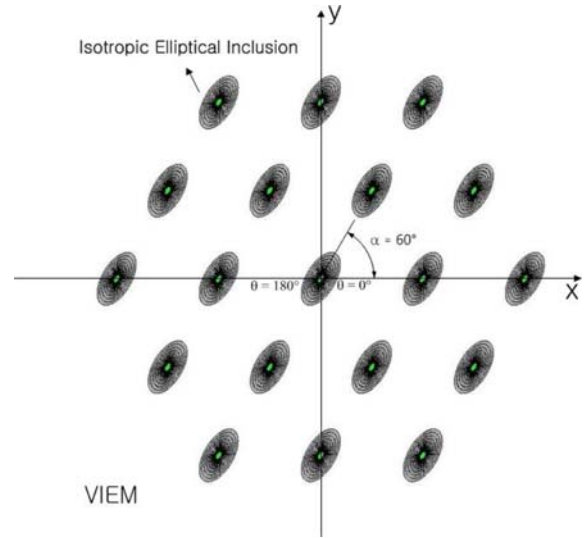


Fig. 5. A typical discretized model for multiple elliptical fibers of arbitrary orientation in the volume integral equation method.

Table 2. Fiber separation distances according to different fiber volume fractions

Fiber volume fraction (c)*	Fiber separation distance (d) / Radius of circular fiber (a)**	
	Square array	Hexagonal array
0.20	3.9633	4.2589
0.30	3.2360	3.4774
0.40	2.8025	3.0115
0.50	2.5066	2.6935

*Fiber volume fraction (c) of circular fiber circumscribing its respective elliptical fiber (Fig. 3)

**Radius of circular fiber circumscribing its respective elliptical fiber (Fig. 3)

지는 타원형 장섬유 중심 사이의 거리(d)를 나타낸다.

Fig. 5는 다수의 타원형 장섬유 해석을 위하여 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델의 예를 나타내며[17], 각각의 장섬유 내부를 576개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

Fig. 6, Fig. 7과 Fig. 8은 서로 다른 장섬유의 체적비에 대하여, 각각 9개, 25개 그리고 49개의 임의로 경사진 타원형 장섬유가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 장섬유와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 여기서 θ 는 x축 양의 방향을 기준으로, 중앙에 위치한 등방성 장섬유의 경계면을 따라 반시계방향으로 측정된 각도를 나타낸다.

서로 다른 개수의 장섬유의 체적비에 대하여, 경사각이 증가할수록 중앙에 위치한 타원형 장섬유 경계면에서의 인장응력 성분의 크기가 줄어드는 것을 알 수 있다.

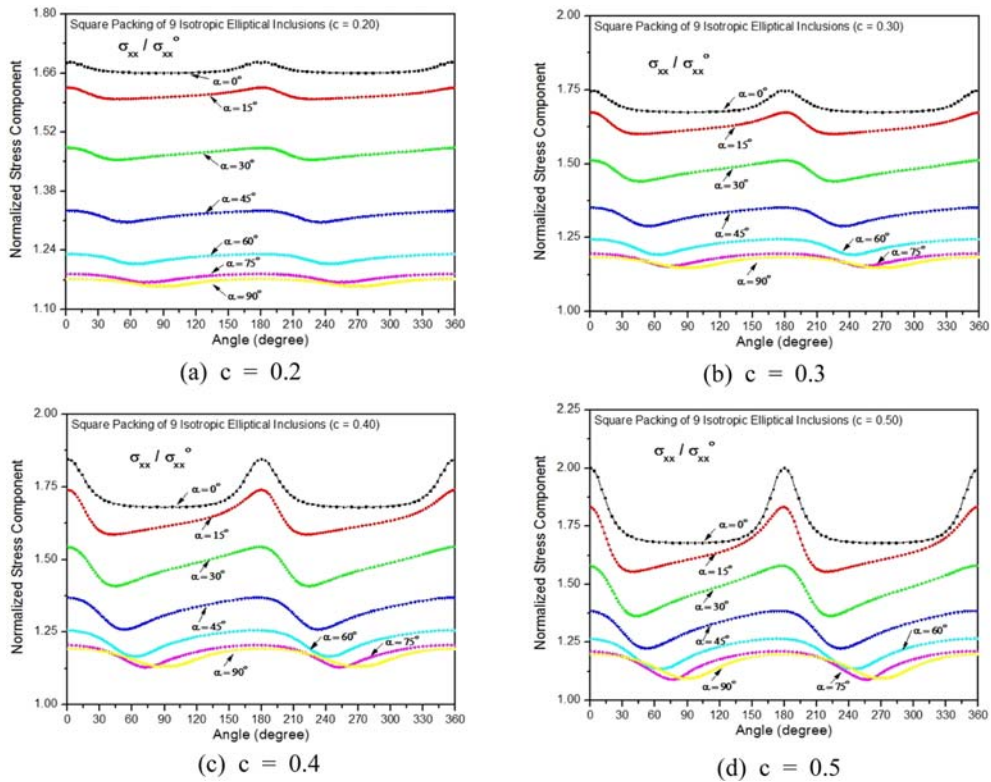


Fig. 6. Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the square packing of 9 elliptical fibers (inclusions).

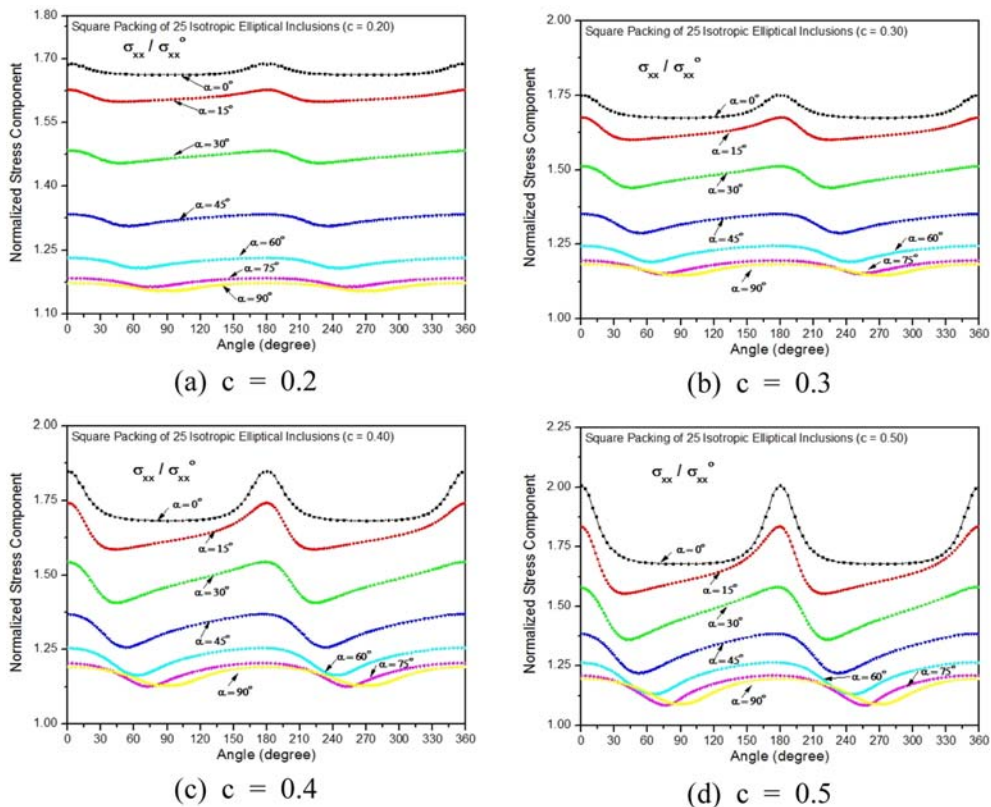


Fig. 7. Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the square packing of 25 elliptical fibers (inclusions).

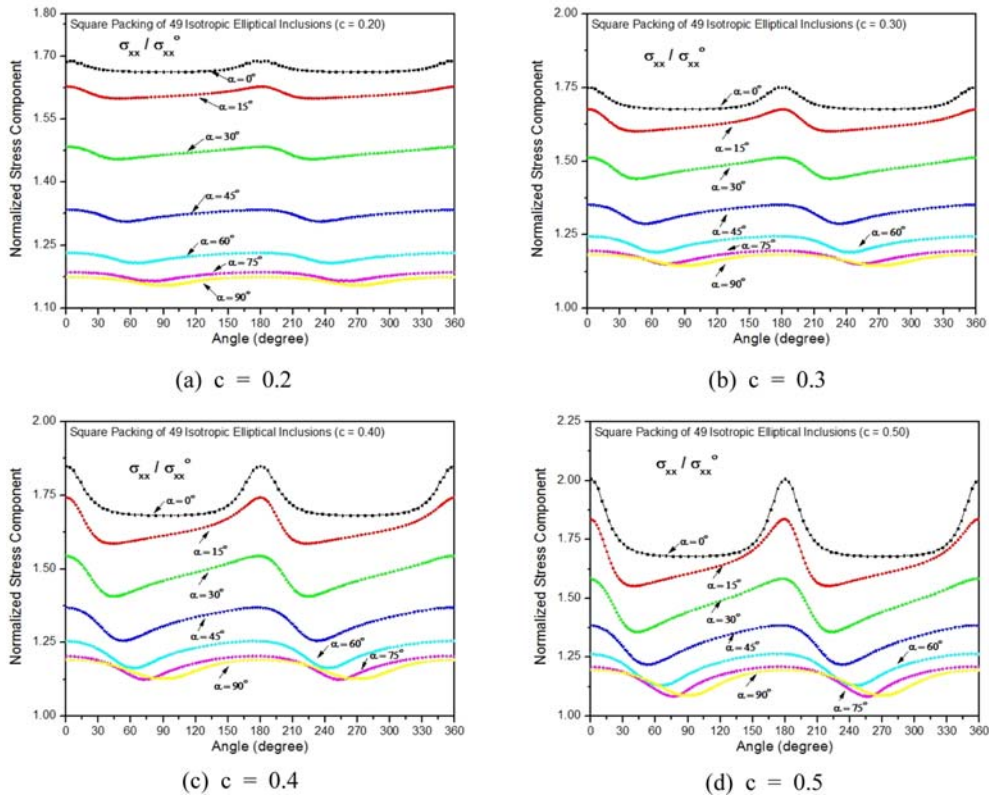


Fig. 8. Normalized tensile stress component($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the square packing of 49 elliptical fibers (inclusions).

3.3 체적 적분방정식법을 이용한 해의 검증

3.1절에서 단일의 타원형 장섬유에 대한 체적 적분방정식법을 이용한 해와 해석해가 서로 잘일치함을 알 수 있다. 이번에는, 다수의 타원형 장섬유에 대한 체적 적분방정식법을 이용한 해를 검증하기 위하여, 장섬유의 체적비(c)가 0.35이고, 경사각이 60° 이며, 9개의 등방성 장섬유의 배열이 정사각형 형태일 때, 체적 적분방정식법을 이용한 해와 다수의 임의로 경사진 타원형 장섬유를 모델링하고 해석하는데 매우 효율적이라고 판단되는, 상업용 유한요소법 코드인 PATRAN[17]과 NASTRAN[18]을 이용한 해를 서로 비교 검토해 보았다.

Fig. 9는 NASTRAN에 사용된 유한요소법 모델을 나타낸다. Fig. 9(a)는 전체 모델을 나타내고, (b)와 (c)는 9개의 장섬유 주위(A로 표시)를 확대한 모델을 나타내며, (d)는 중앙의 장섬유 주위(B로 표시)를 확대한 모델을 나타낸다.

Fig. 9에 사용된 4개의 절점을 갖는 사각형 요소의 개수는 203,200이다. 중앙의 타원형 장섬유와 기지의 경계면에서의 정확한 응력분포를 구하기 위하여, 매우 세밀한(Refined) 유한요소들을 사용하여 요소 분할하였다. 또한, 무한 공간을 이루는 정사각형 한 변의 길이가 A로 표시되는 정사각형 한 변의 길이의 약 23.5배가 되도록 하여, 무한공간을 충분히 반영할 수 있도록 하였다.

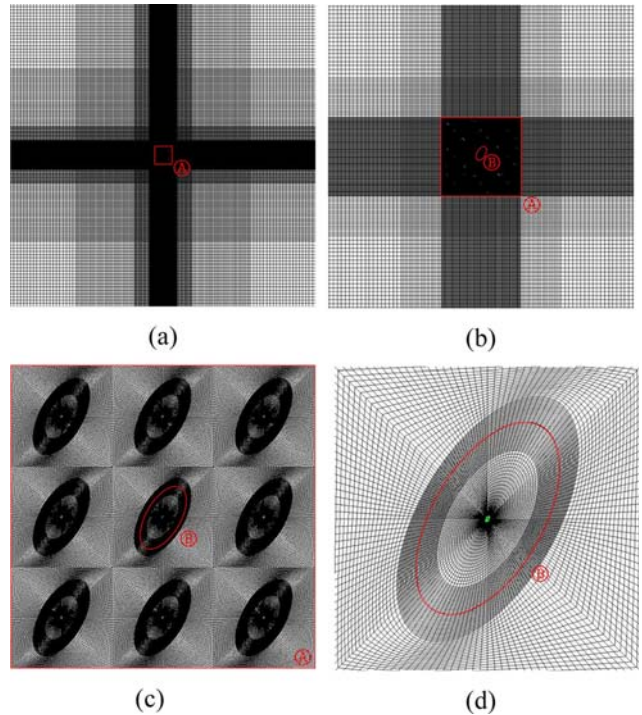


Fig. 9. A typical discretized model in the finite element method for the square packing of 9 isotropic elliptical fibers with an aspect ratio of 0.5 at an oriented angle $\alpha = 60^\circ$ [17].

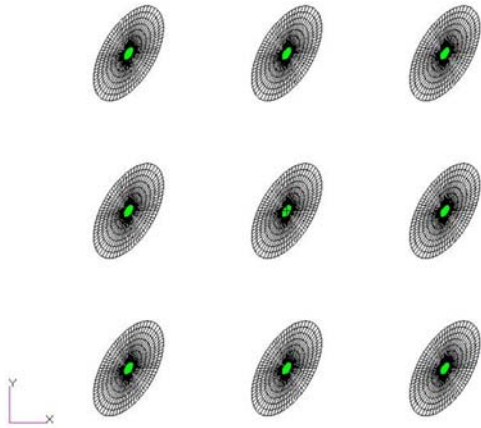


Fig. 10. A typical discretized model in the volume integral equation method for the square packing of 9 isotropic elliptical fibers with an aspect ratio of 0.5 at an oriented angle $\alpha = 60^\circ$ [17].

Fig. 10은 체적 적분방정식법 모델을 나타내며, Fig. 9에 있는 유한요소법 모델과 비교해 보았을 때, 체적 적분방정식법에 사용되는 모델이 매우 효율적임을 확인할 수 있다. 그 이유로는 1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분

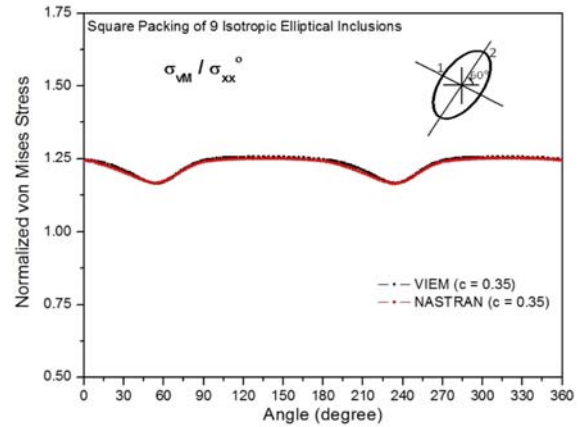
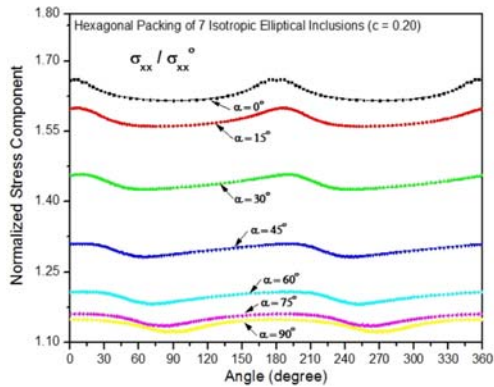
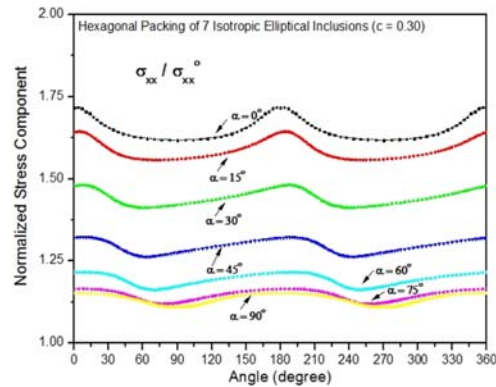


Fig. 11. Comparison of numerical solutions using the VIEM and NASTRAN for the normalized von Mises stress ($\sigma_{VM}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the square packing of 9 isotropic elliptical fibers with an aspect ratio of 0.5 at an oriented angle $\alpha = 60^\circ$ [17].

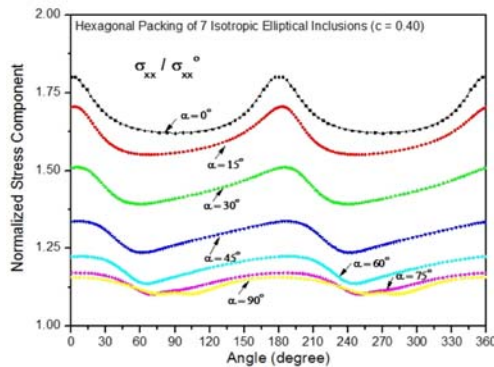
할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, 2) 특히, 장섬유의 체적비(c)와 경사각(α)이 바뀌어도, 장섬유의 위치만 변경하면 되기 때문이다.



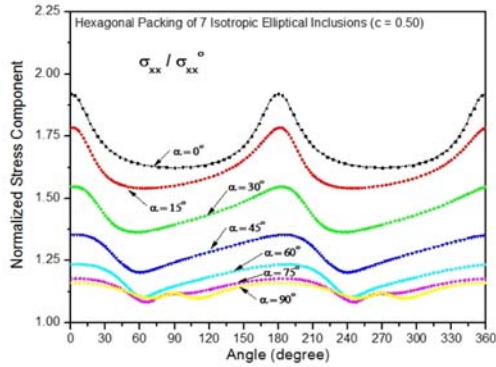
(a) $c = 0.2$



(b) $c = 0.3$



(c) $c = 0.4$



(d) $c = 0.5$

Fig. 12. Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the hexagonal packing of 7 elliptical fibers (inclusions).

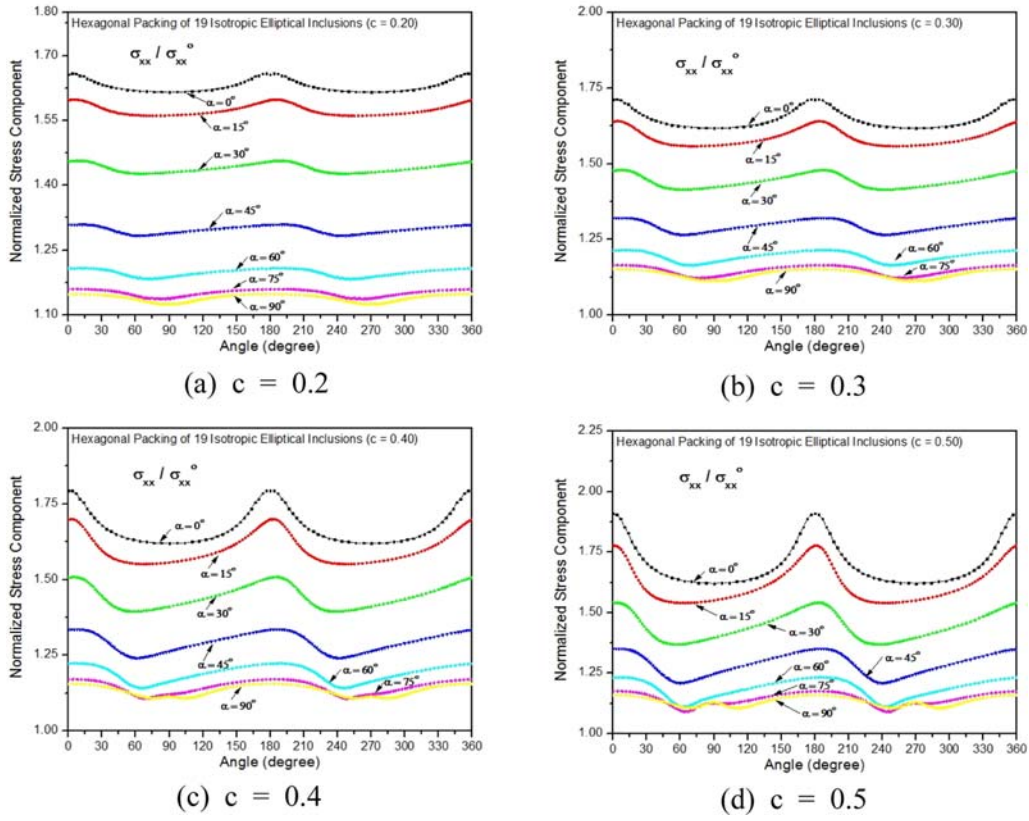


Fig. 13. Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the hexagonal packing of 19 elliptical fibers (inclusions).

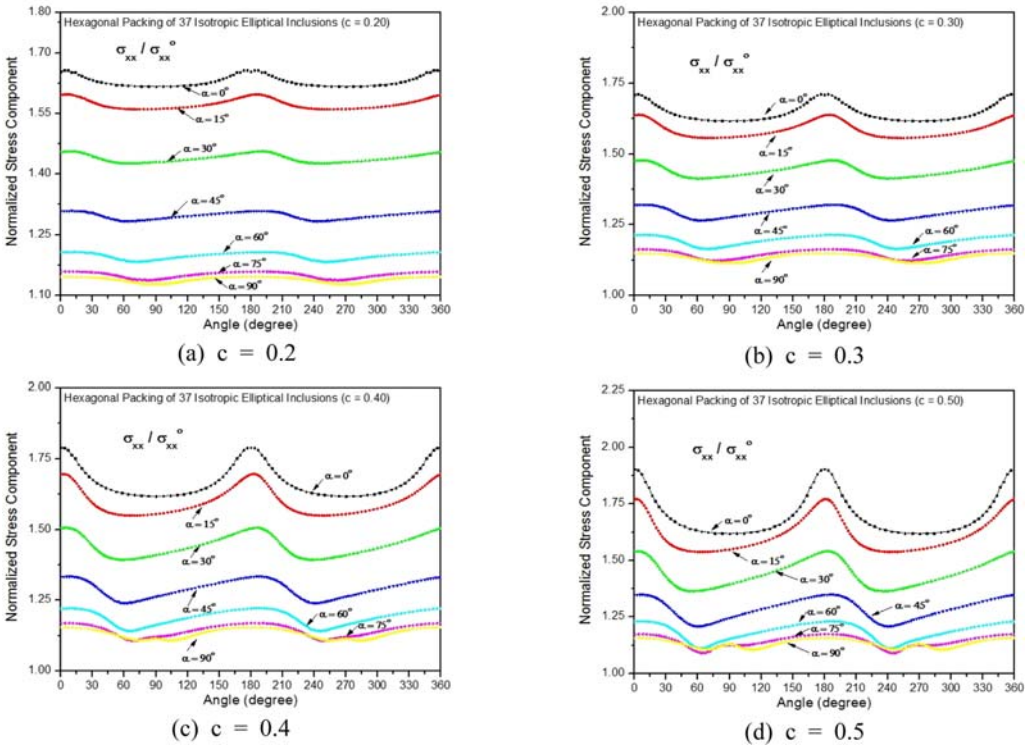


Fig. 14. Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical fiber and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading for the hexagonal packing of 37 elliptical fibers (inclusions).

Fig. 11은 중앙에 위치한 등방성 타원형 장섬유와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 von Mises 응력 성분($\sigma_{vm}/\sigma_{xx}^0$)에 대한 체적 적분방정식법에 의한 해와 NASTRAN을 이용한 해와의 비교를 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 체적 적분방정식법에 의한 해와 NASTRAN을 이용한 해가 서로 잘 일치함을 확인할 수 있다.

3.4 다수의 등방성 타원형 장섬유 중심의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 경우

다음에는, 각각의 타원을 포함하는 원형 장섬유의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가하고, 타원형 장섬유의 경사각 α 가 0° 부터 90° 까지 15° 씩 반시계방향으로 증가할 때, 타원형 장섬유의 개수를 a) 7개, b) 19개, c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 장섬유에서의 응력분포의 변화를 조사하였다(Fig. 5).

Fig. 12, Fig. 13와 Fig. 14는 서로 다른 장섬유의 체적비에 대하여, 각각 7개, 19개 그리고 37개의 임의로 경사진 타원형 장섬유가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 장섬유와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

역시 이전의 경우와 비슷한 경향으로 서로 다른 개수의 장섬유의 체적비에 대하여, 경사각이 증가할수록 중앙에 위치한 타원형 장섬유 경계면에서의 인장응력 성분의 크기가 줄어드는 것을 알 수 있었다.

4. 결 론

본 논문에서는 체적 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 적용하여, 등방성 무한기지에 다수의 임의로 경사진 등방성 타원형 장섬유가 포함된 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 복합재료에 발생하는 응력분포에 관한 해석을 수행하였다.

첫째로, 체적 적분방정식법에서는 (1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분할할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, (2) 특히, 장섬유의 체적비와 경사각이 바뀌어도, 타원형 장섬유의 위치만 변경하면서 모델링하면 되기 때문에, 체적 적분방정식법을 이용하는 것이 유한요소법을 이용하는 것보다 매우 효율적이라는 것을 확인하였다.

둘째로, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때, 본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해가 벤치마킹(Benchmark) 자료로 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로

한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No. 2011-0026686)과 홍익대학교 산학연계 실무프로그램 중 산학 아카데미 사업을 통해 수행되었습니다. 지원에 감사드립니다.

참고문헌

1. Lee, Y.-T., and Chen, J.-T., "Null-field Approach for the Anti-plane Problem with Elliptical Holes and/or Inclusions," *Composites: Part B*, Vol. 44, 2013, pp. 283-294.
2. Christensen, R.M., and Lo, K.H., "Solutions for Effective Shear Properties in Three Phase Sphere and Cylinder Models," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 27, 1979, pp. 315-330.
3. Bose, S.K., and Mal, A.K., "Elastic Waves in a Fiber-Reinforced Composite," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 22, 1974, pp. 217-229.
4. Maslov, B.P., "Stress-Strain State in the Matrix of Stochastically Reinforced Composites," *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 25, No. 3, 1989, pp. 282-288.
5. Yang, R.B., and Mal, A.K., "The Effective Transverse Moduli of a Composite with Degraded Fiber-Matrix Interfaces," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, No. 11, 1995, pp. 1623-1632.
6. Lee, J.K., and Mal, A.K., "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, 1997, pp. 23-31.
7. Lee, J.K., Choi, S.J., and Mal, A., "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 16, 2001, pp. 2789-2802.
8. Lee, J.K., Han, H.D., and Mal, A., "Effects of Anisotropic Fiber Packing on Stresses in Composites," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 33-36, 2006, pp. 4544-4556.
9. Dong, C.Y., Lo, S.H., and Cheung, Y.K., "Numerical Solution of 3D Elastostatic Inclusion Problems Using the Volume Integral Equation Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2, 2003, pp. 95-106.
10. Lee, J.K., and Kim, H.-R., "Volume Integral Equation Method for Multiple Circular and Elliptical Inclusion Problems in Anti-plane Elastostatics," *Composites: Part B*, Vol. 43, 2012, pp. 1224-1243.
11. Lee, J.K., "Elastic Analysis in Composite Including Multiple Elliptical Fibers," *Journal of the Korean Society for Composite Materials*, Vol. 24, No. 6, 2011, pp. 37-48.
12. Lee, J.K., "Stress Analysis of Multiple Anisotropic Elliptical Inclusions in Composites," *Composite Interfaces*, Vol. 19, No. 2, 2012, pp. 93-119.
13. Brauer, D.S., Rüssel, C., Vogt, S., Weisser, J., and Schnabelrauch, M., "Degradable Phosphate Glass Fiber Reinforced Polymer Matrices: Mechanical Properties and Cell Response," *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, Vol. 19, Issue 1, 2008,

- pp. 121-127.
14. Buryachenko, V.A., *Micromechanics of Heterogeneous Materials*, Springer, New York, 2007.
 15. Banerjee, P.K., *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1993.
 16. Wang, X., Pan, E., and Sudak, L.J., "Uniform Stresses Inside an Elliptical Inhomogeneity with an Imperfect Interface in Plane Elasticity," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, 2008, pp. 054501-1~054501-5.
 17. PATRAN User's Manual, Version 2010.1.2, MSC/PATRAN, 2010.
 18. NASTRAN User's Manual, Version 2010.1.3a, MSC/NASTRAN, 2010.