Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 4 (Aug. 2013), 233–243

The Historical Background of Erlangen Program

에를랑겐 프로그램의 성립 배경

HAN Kyeong Hye 한경혜

The Erlangen program is a scholastic plan by German mathematician Felix Klein, in which he, based on group theory, made a reassessment of geometry as well as an attempt to generally organize it. In this paper, I will introduce the historical and scholastic background of the Erlangen program, overview the process of its formation, and provide some comments regarding its historical significance.

Keywords: geometry, group, transformation, invariant theory; 기하학, 군, 변환, 불변이론.

MSC: 01A55 ZDM: A30

1 서론

19세기에 다방면에 걸쳐 활약상을 보였던 독일 수학자 펠릭스 클라인의 에를랑겐 프로그램(Erlangen Program, 이하 EP로 약칭)은 현대 대수학의 기본 개념인 '군' 개념을 사용하여 당시까지 발전하였던 기하학의 체계를 정리했다는 점에서 높은 평가를 받아 왔다 [2].

쿠랑(Courant)은 EP를 가리켜 "아마도 19세기 후반에 가장 큰 영향을 끼쳤으면서도 광범하게 읽힌" 논문이라고 평하였으며 [6], 쿨리지(Coolidge)는 EP야말로 "유클리드 이래 가우스와 리만을 제외하고는 아마 가장 큰 영향을 끼쳤을 것"이라고 언급하기도 했다 [5, p. 293].

먼저 클라인이 수학자로서 성장하는 과정을 간략히 소개하고 나서, 어떤 사회적, 학술적 배경을 통해서 EP를 작성하게 되었는지를 파악하도록 한다. 당시 19세기는 사영기하학을 비롯한 수학 각 영역이 고유의 방법론을 가지고 독자적 체계를 세워나가는 특징이 강하였다. 그런 과정에서 이런 다양한 흐름을 통합하는 EP의 새로운 관점이 어떻게 형성되어 나갔는지를 살펴보도록 한다.

HAN Kyeong Hye: Dept. of Math., Soonchunhyang Univ. E-mail: stern251@hanmail.net
Receiveded on May 27, 2013, revised on July 20, 2013, accepted on Aug. 21, 2013.

2 EP의 주관적 배경: 클라인을 둘러싼 상황

에를랑겐 프로그램의 저자 펠릭스 클라인(Felix Christian Klein, 1849–1925)은 1849년 4월 25일 독일 서부 도시 뒤셀도르프(Düesseldorf)에서 출생하였다. 애초에 물리학자가 되고 싶어했던 클라인은 본(Bonn) 대학에서 수학과 물리학을 공부하였으며, 1868년 플뤼커 (Julius Plücker, 1801–1868)의 지도로 선 기하학(line geometry)과 역학에의 응용을 다룬 논문 〈캐노니칼 형식 위의 선 좌표 사이의 일반 2차식의 변환에 관하여 Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zwischen Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form〉를 제출하여 19세의 나이로 박사 학위를 받았다. 클라인은 플뤼커가 선 기하학의 체계 확립이라는 과제를 남겨두고 사망하자 그의 미완성 유고 논문 〈새로운 공간 기하학 Neue Geometrie des Raumes〉의 후반부를 썼다 [16]. 다음 해인 1869년에 클라인은 베를린에서 잠시 머물다가 바이어슈트라스(Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897)를 통해 알게 된 리(Marius Sophus Lie, 1842–1899)와 함께 파리에 유학하여 군 개념 연구를 공동으로 진행하게 된다 [11].

1870년 프로이센과 프랑스 사이의 보불전쟁이 발발하자 귀국한 클라인은 위생병으로 참전하였으며, 전쟁이 끝난 후 괴팅겐 대학에서 강의와 연구를 시작하였다. 이 시기에 그의 관심은 기하학으로 선회하였다. 그 결과 1871년 비유클리드 기하학을 다룬 중요 논문을 발표하기에 이른다 [12].

이후 클라인은 23세라는 젊은 나이에 남부 독일 에를랑겐(Erlangen)에 소재한 알렉산더 대학교(Friedrich Alexander Universität) 전임교수로 초빙되었다. 에를랑겐 대학 임용을 적극 추진했던 이는 또 다른 스승이라 할 수 있었던 클렙쉬(Alfred Clebsch, 1833–1872)였다. 클라인은 부임하면서 "새로운 기하학 연구에 관한 비교 고찰 Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"이라는 제목의 문건을 전공 학부에 제출하였다 [13]. 이를테면 대학 교수 임명과 관련된 모종의 의무사항을 이행한 것이다. 이 문헌은 에를랑겐 프로그램(Erlagen Program)이라는 이름의 대학 취임 강연 원고로 널리 알려져 있지만, 사실 연구 논문이라기보다 기하학에 관하여 리와 토론한 개념들을 토대로 한 이후 연구 계획에 해당하는 내용이 담겨있다[1].

그런데 클라인이 EP를 작성하던 이 시기에 클렙쉬가 39세의 나이로 유명을 달리했다. 또한 그 앞뒤 시기인 1867년에서 1872년에 걸쳐 뫼비우스(A. F. Möbius, 1790–1868), 슈타이너(J. Steiner, 1796–1869), 폰 슈타우트(Karl G. Ch. von Staudt, 1798–1867) 등 유수의 독일 기하학자들도 잇달아 세상을 떠났다. 그럼으로써 그는 23세의 나이에 독일

1) 실제 취임 연설은 수학교육에 관한 내용이었다고 한다 [18].

기하학의 전통을 잇는 상속자 역할을 떠맡아야 하는 상황이었다 [22].

3 EP의 시대적 배경: 19세기 기하학과 그 특징

EP가 쓰인 19세기는 기하학이 비약적으로 발전한 시기이다. 그 배경으로는 먼저 당시 유럽이 산업사회로 이행하는 급격한 변화를 겪게 되어 교육받은 엔지니어가 필요했던 사회상황을 들 수 있다. 이 요구에 부응하여 생겨난 분야가 바로 화법기하학이다. 이 분야를 학문적으로 다듬은 창시자는 몽쥬(G. Monge, 1746–1818)이다. 그는 프랑스 혁명 시기 에콜 폴리테크니크를 주도적으로 설립한 당사자이기도 하다.

기하학의 발전은 다양한 방향으로 이루어졌다. 기하학의 기초를 이루는 사고방식도 전통적으로 답습해 오던 내용을 과감하게 벗어났다. 더 이상 기하학을 좌표, 길이, 평행, 거리 등의 개념에 국한하여 취급하거나 점을 모든 기하학의 출발점으로 보지 않게 되었다. 그래서 19세기 중엽에 이르러 이전과 전혀 다른 네 가지 관점이 전면에 등장하게 된다.

첫째, 기하학과 계량이 불가분의 관계에 있다는 재래의 인식이 희석되었다. 몽쥬, 카르노(L. N. M. Carnot, 1753–1823)와 퐁슬레(J. V. Poncelet, 1788–1867) 등을 거치면서 "사영"과 비사영적 성질이 분명해졌다. '사영' 이나 '절단' 과 같은 사영변환을 거치면서 보존되거나 파괴되는 성질이 무엇인지를 명확하게 구분하게 된 것이다. 사영기하학의 체계에서 근본적으로 길이, 각의 크기나 합동 따위의 개념은 불필요하다. 하지만 사영기하학의 정립에 매진해 온 뫼비우스, 슈타이너 역시 거리 개념을 배제하고 '사영 변환' 을 정의하지는 못했으므로 방법상의 근본적 결함을 없애는 데는 성공하지 못한 상태였다. 그들은 사영기하학에서 가장 기본이라 할 수 있는 '사영' 이라는 성질을 설명하기 위해 거리개념에 근거한 '복비'(비조화비)를 여전히 도입하였던 것이다. 이제 거리를 기초로 한 계량 개념을 제거하는 것이야말로 순수 사영기하학을 향한 마지막 단계로 남았다고 할 수 있다. 그러다가 폰 슈타우트가 온전한 사영적 방법 수립의 기초를 마련하는 데 성공을 거두게 된다. 폰 슈타우트는 조화적인[2] 도형이 사영변환에서 불변이라는 사실을 이용하여 완전사변형에서 사영성을 다음과 같이 새롭게 정의하였다 [21, p. 49]:

> "두 도형 각각에서 하나의 조화도형이 다른 조화도형으로 대응될 때 이 두 기본 도형을 서로 사영적이라 한다."

이러한 인식은 클라인에 이르러 더욱 분명해진다 [12]. 클라인은 케일리(Arthur Cayley, 1821–1895)의 사영적 거리개념을 도입하여 유클리드 기하학뿐만 아니라 비유클리드 기하학까지 설명하였다. 이 과정에서 클라인은 폰 슈타우트의 방법을 채택하여 평행공리를

2) 복비의 값이 -1인 경우의 네 원소를 조화4원소(harmonic tetrad)라 하고 이를 찾기 위한 작도에서 나타나는 도형을 조화 도형이라 한다.

전제하지 않는 사영기하학의 체계를 세울 수 있음을 보였다. 이로써 사영기하학은 2000년 이상 '기하학' 자체와 동일시 되어온 유클리드 기하학뿐만 아니라 비유클리드 기하학까지도 포괄하는 상위의 개념이 되었다. 나아가 기술적 요구에 따라 발전하기 시작한 사영기하학이 현대적 공리주의를 거쳐 더욱 고차원의 기하학으로 발전하는 기초가 되었다 [7].

이후 EP가 거리 개념과 사영기하학 사이의 관계를 해명하는 역할을 수행하게 된다.

둘째, 사영기하학의 발달 결과 전통적인 좌표 개념이 확장되었다. 뫼비우스, 헤세(O. Hesse, 1811–1874), 케일리, 플뤼커 등이 이와 관련된 성과를 거두었다. 예컨대 플뤼커는 선좌표, 면좌표를 사용함으로써 기존의 관념, 즉 점이 모든 기하학의 출발점이라는 인식을 허물어뜨린다. 이는 '쌍대성 원리' 에 근거한 사고로서 일반적 표현인 아래 직선의 방정식에서 u_1, u_2, u_3 를 정점 x_1, x_2, x_3 을 지나는 직선을 나타내는 체계가 되도록 하는 변수로 파악하였다.

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

그리고 u_1, u_2, u_3 를 "직선 좌표"라 지칭하였는데 이 관점에서 보자면 위 방정식은 그 점을 지나는 직선속, 즉 그 점 자체를 나타내게 된다. 다시 말하면 위 일차식을 점의 좌표로 나타낸 직선의 방정식으로 해석할 수 있듯이 직선의 좌표로 나타낸 점의 방정식으로도 역시 해석 가능하다. 이러한 해석 방법은 플뤼커가 선형 및 이차 도형의 기하학 분야에서 새로이 확장된 영역에서 전개한 아주 새로운 사고라 할 수 있다 [11, p. 193].

19세기를 거치면서 좌표 개념은 일반적 의미를 획득하게 되고 다양체 개념에서 보자면 좌표체계란 독립적인 매개변수들로 구성되며 이들의 기하학적 의미는 아주 다양하다고 할 수 있다. 이 역시 역사적으로 EP의 필수불가결한 전제가 된다.

셋째, 공간의 차원 개념이 논쟁의 주제가 된다. 임의의 고차원 공간으로 관심이 옮겨가게 된 배경으로는 수학과 물리학 사이의 결합이 작용한다고 할 수 있다. 셋 이상의 독립적인 물리적 대상이 필요하기 때문이었다. 한편 과감한 추상화 과정으로서 n차원 기하학이 성립하였다. 우선 케일리와 그라스만(Hermann Günther Grassmann, 1809–1877)은 독립적 좌표 변수의 수를 늘였다. 케일리는 부울(G. Boole, 1815–1864)의 직접적 영향을 받았으며, 그라스만은 라이프니츠의 아이디어를 차용하였다. 그라스만은 자신의 저서 〈광연론 Ausdehnungslehre〉(1844, 1864)에서 n개의 변수 $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ 으로 표현된 연속체 R_n 을 아핀 기하학의 관점에서 다루면서 다음 식을 결합시켜 계량적 고찰방식을 부가하였다.

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

말하자면 통상적 유클리드 기하학을 n차원인 R_n 으로 확장하였다 [11, p. 269].

넷째, 새로운 공간 개념이 생겨났다. 인식론적으로 보자면 객관적으로 존재하는 물리적 공간의 연구는 수학적 공간의 연구와 분리되어야 함을 뜻하게 되었다. 광범하게 받아들

여지던 칸트(Immmanuel Kant, 1724–1804)의 철학에 반하여 다양한 기하학을 세우는 일은 객관적으로 존재하는 공간 구조와 아무런 상관이 없는 수학적 테마가 된 것이다. 당시 가우스(C. F. Gauss, 1777–1855), 로바체프스키(N. I. Lobačevskij, 1772–1856), 보야이(J. Bolayi, 1802–1860) 등이 이러한 인식의 전환을 드러내 보이고 있었다. 이들이 앞서거니 뒤서거니 발견한 기하학의 체계는 바로 비유클리드 기하학으로, 그 중에서도 쌍곡 기하학에 해당한다[3]. 이제 어떤 기하학이 공간을 수학적으로 가장 잘 파악하는가는 오로지 경험에 따른다고 할 수 있게 되었다.

이후 리만(B. Riemann, 1826–1866)이 평면의 국소 영역을 이차 미분식으로 나타내어 비유클리드 기하학의 기본 개념을 세웠다. 리만의 교수 자격 논문 "기하학의 기초에 놓인 가설에 관하여 Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"에서 그 과정이 보다 명료하게 전개되었다. 그리고 헬름홀츠(H. Helmholtz 1821–1894)의 논문과 클라인 자신이 비유클리드기하학을 주제로 작성한 논문에 이어 "EP"가 한 획을 긋는다 [1, 10].

4 EP의 학술적 배경

19세기 전반은 기하학이 폭발적으로 발전하는 양상을 띠는 한편 내적 폐쇄성이 허물어지는 모습도 보인다. 같은 세기 중반에 이르러서는 여러 수학자들이 "기하학", "기하학적 방법"의 내적 관계를 파악하려고 노력하는 가운데 기하학의 본질을 개념적으로 새로이 정립하려는 시도도 눈에 띄었다.

샤슬레(M. Chasles, 1793–1880)는 〈기하학적 방법의 기원과 발달에 관한 역사 개관 Aperçu historique sur l'origine et le développement des methodes géométrie〉(1837)에서 전통적인 개념, 즉 기하학은 "크기의 측정을 대상"으로 한다는 관점을 폐기하고 대신 "크기의 순서"를 다루는 것을 기하학의 목표로 설정하였다 [4]. 샤슬레의 관점은 다소 모호하기는 하지만 여러 갈래의 기하학적 방향을 종합하려는 시도로 볼 수 있다. 이처럼 다양한 방향을 통합하려는 노력이 EP의 마지막 동기라 할 수 있다. 클라인은 훗날 회고적으로 다음과 같이 언급하였다 [14].

> "나의 관심은 이미 본(Bonn)에 머물던 시기(1865–1868)[4]에 수학 학파들 간의 논쟁에서 서로 유사하거나 외관상 유사하지 않지만 본질적으로 관련 있는 연구 방향의 상호관계를 이해하고, 그 논리적 대립을 통일적 관점으로 포괄하는 데 있었다."

---

3) 클라인은 유클리드 기하학, 비유클리드 기하학을 포괄하여 포물, 타원, 쌍곡기하학으로 분류하였다 [12].
4) 플뤼커의 제자이자 조교이던 1865년에서 1868년 사이를 가리킨다.

19세기 중반부터 1872년에 이르기까지 무르익은 기하학의 분류라는 사고는 군개념의 도움으로 비로소 실현되기에 이르렀다.

기하학에 군 이론을 접목시킨 원조는 뫼비우스의 "기하학적 동류 관계 Geometrische Verwandtschaft" 이라 할 수 있다. 뫼비우스는 1920년대에 퐁슬레 (Poncelet) 의 연구에 기초하여 변환에 대한 관심을 드러냈다. 그는 도형의 '동류 관계' 를 '변환' 과 변환의 해석적 표현식을 통하여 다각도로 연구하였다. 변환 사이의 논리적 관계 연구가 차츰 큰 비중을 차지하게 되었으며, 변환의 분류가 과제로 제기되었다.

뫼비우스는 자신의 저서 ⟨기하학의 해석적 취급을 위한 보조도구, 중심 계산 Der Barycentrische Calcul: ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie⟩ (1827) 에서 자신의 목표를 분명하게 드러내었다. 뫼비우스는 서문에서 다음과 같이 밝히고 있다.

> "도형 사이의 관계를 밝히는 것, 즉 기하학적 유사성을 다루는 것이 제 2장의 내용이며, 여기서 채용된 의미에서 기하학 전체의 기초를 제시하고자 한다. 이는 완벽하게 일반성을 갖추어야 하며 충분히 논증해야 하므로 매우 어려운 작업이 될 것이다." [17]

이 책의 기본 발상은 무게중심의 개념을 기하학적으로 이용한다는 것으로 주어진 삼각형의 각 꼭짓점에 무게 p_1, p_2, p_3 를 주고 그 무게중심을 점 P 의 좌표로 삼는다.

아울러 두 공간의 점 사이에 생겨나는 일대일 대응에 관한 명쾌한 사고를 전개하였다. 이를 아주 단순화시켜 체계적으로 등급이 매겨진 "동류 관계 Verwandtschaften" 라는 개념들을 만드는 데 적용했으며, 합동을 일컫는 "상등", "닮음", (오일러에게서 유래한) "아핀", 한 직선 위의 점을 한 직선 위로 옮기는 관계를 뜻하는 "공선성" 등의 개념 및 용어를 도입하였다. 뫼비우스의 인식에 따르자면 합동과 닮음은 본질적으로 다르지 않다. 이러한 문제 제기는 이른바 EP의 주요군 (Haupt Gruppe, principal group) 의 특성에 해당한다. 합동과 닮음을 포괄하는 더욱 일반적인 것은 아핀으로 동형 (주요) 군에 해당한다. 나아가서 공선성의 유사관계는 더욱 일반적이다. 몰론 뫼비우스가 '군' 이라는 용어나 군이론적 사고방식을 전개하지는 않았다 [23]. 1858년에 이르러 노년의 뫼비우스는 공선성보다 더욱 일반적인 "기본 동류관계" 로 나아간다. 이러한 고찰 방식은 바로 오늘날의 토폴로지로 간주할 수 있다.

그리고 하나의 동류 관계에서 변하지 않고 남아있는 표현이나 변수가 무엇인지를 알아냄으로써 이를 토대로 한 직선 위의 네 점의 복비에 관한 상세한 이론을 수립하였다. 거리 측정을 전혀 하지 않고도 서로 관계를 맺는 평면 위에서 대응하는 네 개의 점 (공간에서는 다섯개의 점) 끼리 연결하는 직선만으로 공선성이라는 개념을 만들어내는 데 성공하였는데 이는 뫼비우스망 'Möbius net' 이라 일컬어진다.

이러한 기하학적 변환의 분류는 이미 군이론적 요소를 지니고 있으며 기하학의 분류로 나아가는 징검다리 역할을 하게 된다.

하지만 뫼비우스에게는 대수적 불변이론의 방법을 차용할 수 있는 기반이 마련되어 있지 않았다. 이 분야의 이론은 19세기를 거치면서 부울, 케일리, 실베스타(J. J. Sylvester, 1814–1897) 등에 의해 상당한 수준으로 발전하게 된다. 특히 케일리는 기하학 전체에서 사영기하학이 차지하는 위치를 해명하는 데 일조하기도 했다.

케일리는 부울의 직접적 영향하에 1854년 불변이론 연구에 착수하여 10편에 이르는 유명한 논문 "유리동차함수에 관한 연구 Memoirs upon Quantics"를 발표하였다. 케일리의 생각에 따르자면 기하학적 변환에서 불변인 기하학적 도형의 성질은 해석적 불변식에서도 역시 반영된다. 그는 사영기하학과 계량기하학의 관계를 한마디로 압축하였다 [3].

> "계량기하학은 사영기하학의 일부분이며 사영기하학은 기하학 전체이다."

하지만 아직 비유클리드기하학의 분류에는 이르지 못했다. 이를 위해서는 새로운 대수적 방법론인 군이론적 개념이 요구되었다. 이처럼 기하학적 사고에 대수학적 개념이 개입하면서 EP의 결정적 뿌리를 형성하게 된다. 1870년에 이르러 군이론은 치환군 정도의 수준에서는 상당 정도 체계를 갖춘 상태였다. 이 발전 방향은 거슬러 올라가면 대수 방정식의 해법과 궤를 같이 한다. 타르탈리아(N. Tartaglia, 1500?–1557), 카르다노(G. Cardano, 1501–1576), 페라리(L. Ferrari, 1522–1565) 등이 구했던 3, 4차 방정식의 해법이 바로 그것이다. 그 후 라그랑주(Lagrange), 가우스(Gauss), 루피니(P. Ruffini, 1765–1822), 아벨(N. H. Abel, 1802–1829) 등이 오차 이상의 일반해는 근호로 구할 수 없음을 군이론에 근거해서 증명했다.

갈루아(E. Galois, 1811–1832)는 대수방정식의 풀이 과정에서 더욱 깊은 통찰력을 보여주었다. 갈루아는 "군"을 수학 전문 용어로 도입하였으며 방정식을 치환군에 대응시켰다. 그러나 간명하고 추상적인 표현방식으로 전개된 갈루아 이론은 당시 수용되기 어려웠다.

그러다가 1950년대 들어서야 비로소 베티(E. Betti, 1823–1892), 세레(J. A. Serret, 1819–1885) 조르당(C. Jordan, 1838–1922) 등을 거치면서 비로소 제 모습을 갖춘 이론으로 서게 되었다. 1870년에 조르당은 〈치환과 대수 방정식론 Traité des substitutions et des équations algébriques〉이란 저서를 통해 갈루아의 방정식 이론을 체계적으로 정리하였다. 조르당은 치환군을 상세하게 표현함으로써 대수방정식을 다룰 수 있게 하였다.

바로 그 해에 클라인은 리와 더불어 파리에 머물면서 학술적 토론을 끊임없이 해나가면서 조르당으로부터 엄청난 영감을 얻게 됐음을 토로했다.

> "우리 [클라인, 리]는 이웃한 방에 지내면서 개인적 교류를 해 나가면서 특히 젊은 학자들로부터 학문적 자극을 받기를 원했다. 내게 큰 영감을 준 이는 카

> 밀 조르당이었는데 그는 막 치환과 대수방정식 이론에 관한 저서를 낸 상태였다." [14, p. 51]

이 저서로 인해 사실상 클라인은 EP를 작성할 수 있는 결정적인 대수적 도구를 확보하게 된 셈이었다.

클라인은 원래 1869년 말에서 1870년 초에 걸쳐 불변이론의 기초 위에서 기하학의 분류작업에 착수하였지만 기하학에 관한 해박한 지식을 가지고 있지 못하였다. 그는 1871년 초에서 1872년 9월말까지 리와 엄청난 양의 서신교환, 클렙쉬, 슈톨즈와 매일 벌어진 토론을 통해서 로바체프스키, 보야이 등의 비유클리드 기하학과 폰 슈타우트의 이론을 이해할 수 있게 되었다.

이렇게 생각이 무르익어 가면서 파리에 머물던 이래 추구해왔던 "기하학에 대한 전일적인 이해"가 가능해졌다고 보인다. 그러고 나서 그가 목표로 삼았던 기하학의 분류를 군이론에 바탕을 두고 착수하게 된 것이었다.

1870년에서 1872년 사이에 클라인이 발표한 논문을 보면 그가 군이론을 가지고 기하학을 정돈하는 길로 차츰 접어들고 있음을 확인할 수 있다.

1870년 6월 클라인이 리와 함께 쓴 논문 "특정 곡선과 곡면족에 관한 두 가지 해석 Deux notes sur une certaine familie de courbes et de surfaces"에서는 아직 군개념을 차용하지 않았지만 불변이론의 주요 개념에 기대어 선형 변환 아래서 불변인 곡선, 평면 등을 다루고 있다 [14, p. 415–423].

다시 1871년에 리와 함께 쓴 논문 "무한 교환 가능한 선형변환 체계에서 자신으로 변환되는 평면 곡선에 관하여 Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen"는 제목에서부터 군이론을 차용했다는 것을 알 수 있는데, 실제로 그 안에서 "닫힌 체계", "변환"등 군이론의 개념어를 사용하고 있다.

> "한 체계에서 임의의 두 변환을 적용하면 순서와 상관없이 동일한 변환이 생겨난다. 이 새로운 변환은 다시 이 체계의 변환에 속한다. 위 첫 번째 특성을 고려하면 이 변환은 가환이며 두 번째 특성을 고려하면 닫힌 체계라 할 수 있다. … '변환의 닫힌 체계' 라는 표현은 치환이론의 치환군에 상응한다." [14, p. 430]

그 후 1871, 1872년, 두 차례에 걸쳐 클라인은 "비유클리드기하학에 관하여 Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie"라는 같은 제목의 논문을 발표하였다 [12]. 그는 때로 나중 발표한 위 논문을 EP의 첫 편집판이라고 일컫기도 했다. 이 사이 1871년 10월에 발표한 "선 기하학과 계량기하학에 관하여 Ueber Liniengeometrie und metrische

Geometrie"라는 논문을 포함하여 줄곧 변환군에 관하여 언급하고 있지만 내용상 불변이론에서 기하학의 군이론적 분류로 넘어가는 과정이라 볼 수 있다.

5 결론: 구성, 수용과 평가

클라인은 연구계획서인 EP를 각 분야의 기하학과 연결된 연속 변환군을 확인하는 것으로 시작한다. 즉 누구에게나 익숙한 강체 운동의 유클리드군("합동")을 "주군 Hauptgruppe (principal group)"이라 칭하면서 시작한다. '공간' 과 '다양체' 를 명확하게 구분할 뿐만 아니라 '감각적 형상' 과 '추상적 형태' 를 분명하게 구별하기도 했다. 그런데 기이하게도 아핀군과 아핀기하학은 제대로 다루지 못했다.[5] 주군과 공선변환 사이의 차별성을 두지도 않았다. 이는 훗날 클라인 자신이 회고하듯이 "일면적 전통의 결과"로서 당시 "뫼비우스와 그라스만의 논문을 제대로 평가하지 못하였기" 때문이라고 볼 수도 있다 [14, p. 320]. 실제로 그는1895–1896년에 걸친 정수론 강의에서 비로소 아핀군에 관한 개념을 선형 치환의 총체로서 정면으로 다루었다.[6] EP의 기본 문제는 클라인의 표현을 그대로 빌리면 다음과 같다.

> "다양체와 그 위의 변환군이 주어져 있을 때, 군 위에서 관련되는 불변이론을 전개하라." [14, p. 464]

클라인은 대수적인 이론인 군론이야말로 기하학적 지식을 종합해 낼 수 있는 적절한 토대라는 것과, 각 유형의 기하학에 대응하는 군 개념이 존재한다는 것을 주장했다. 당시 기하학의 중심이 유클리드 기하학을 모델로 삼아 공리로부터 정리들을 증명해내는 일이 주된 전통을 이루어온 상황에서, 클라인은 위 두 가지 점에서 혁신적인 제안을 한 셈이었다.

많은 이들이 EP를 무엇보다도 기하학의 기초에 관한 공로라고 여기지만 정작 클라인 자신은 그리 여기지 않았다. 1872년 당시 연속군의 개념은 아직 다듬어지지 않은 새로운 것이었고 불변이론 역시 새로운 연구 주제였다.

EP는 1870년대 당시 이미 비교적 광범하게 인정을 받은 것으로 보인다. 작성되자마자 영어는 물론이거니와 이태리어, 러시아어, 프랑스어 등 여러 나라 언어로 번역되기도 했다. 후에 EP에 대한 수용이나 평가 여부에 대해서는 입장을 달리하는 연구도 있긴 하지만 대체로 클라인이 '군' 이라는 대수적 개념을 융합시켜 기하학 연구를 발전시킨 촉매제 역할을 했다는 데 이의를 다는 학자들은 그리 많지 않다 [9].

EP가 목표했던 기하학의 분류는 헬름홀츠와 리만이 선도했던 기하학의 공리적 방법에 부응하는 것으로 평가된다. 클라인 자신은 실제로 집합론에 기초한 공리주의적 수학에 대

5) 클라인은 1908년 Elementarma thematik vom Hoheren Standpunkt aus 첫 장에서 이를 다시 취급한다.
6) '아핀' 이라는 용어는 1748년에 오일러가 처음으로 사용했으며, 1827년에 뫼비우스가 다시 차용한 것을 확인할 수 있다 .

해 기여한 바도 없을 뿐만 아니라, 그 자신은 회의적인 입장이었음에도 불구하고 기하학의 엄밀성을 추구한 학자로 각인되고 있다. 공리주의 혹은 형식주의적 입장에 서서 새로운 기하학을 주창한 학자는 파쉬(Moritz Pasch, 1843–1930) 였으며, 주도적으로 정립한 이는 힐베르트(David Hilbert, 1862–1943) 였다 [16].

EP 이후의 연구를 보자면 EP에 포괄되지 않은 기하학[7])의 발전도 눈에 띈다. 그래서 카탄(E. Cartan, 1869–1961), 슈텐(J. A. Schouten, 1883–), 베블렌(O. Veblen, 1880–1960) 등의 연구에 따라 점집합과 변환군으로 이루어진 공간에 관한 불변이론을 다른 공간과 구별하여 클라인 기하학이라 칭하기도 한다 [20, 21].

EP는 걸출하다고 평가되는 모든 학문적 업적에서와 마찬가지로 선행하는 많은 연구 성과를 기반으로 한다. 그러면서도 고유하게 평가해야할 점이 몇 가지 있다.

무엇보다도 19세기까지 고립되어 개별적으로 발전하던 것으로 보이는 기하학의 개념적 통일을 시도했다는 점이다. 또한 당시 독자성이 구축되었던 사영기하학과 새로이 성립한 비유클리드 기하학 등을 현대대수학의 근본적 기초를 이루는 군 이론과 접목시켰다는 점이다 [8]. 이는 기하학의 영역을 뛰어넘어 시대적 발전 경향을 새로운 관점으로 통합해낸 획기적인 업적이라 할 수 있다.

참고 문헌

1. B. Bernardo, “H. von Helmholtz and metageometry(Italian)”, *Riv. Stor. Sci. (2)* 4(2) (1996), 55–97.
2. G. Birkhoff, & M. K. Bennett, “Felix Klein and His “Erlanger Programm” ”, *History and philosophy of modern mathematics*, Minnesota Stud. Philos. Sci. XI (Minneapolis, MN, 1988), 145–176.
3. A. Cayley, *The Collected Mathematical Papers*, vol. 2, Cambridge(1889), Cambridge Univ. Press, 2009.
4. M. Chasles, *Aperçu historique sur l’ origine et le développement des methodes géométrie*, Bruxelles, 1837.
5. J. L. Coolidge, *A History of Geometrical Methods*, Oxford University Press, 1940.
6. R. Courant, “Felix Klein”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung* 34(1925), 197–213.
7. Han Kyeong Hye, “Zur Geschichte der Geometrie der Lage”, Dissertation zur Erlangung des Grades “Doktor der Naturwissenschaften” am Fachbereich der Johannes Gutenberg-Universitaet, Mainz, 2000.
8. Han Kyeong Hye, “The Establishment and Foundation of Projective Geometry”, *The Korean Journal for History of Mathematics*, 15(1) (2002), 1–14. 한경혜, “사영기하학의 성립과 그 기초”, 한국수학사학회지 15(1) (2002), 1–14.

7) Riemann 기하학의 예를 들 수 있다.

9. T. Hawkins, "The Erlanger Programm of Felix Klein: reflections on its place in the history of mathematics", *Historia Mathematica* 11(4) (1984), 442–470.
10. H. von Helmholtz, "Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome", in *Populäre Vorträge*, Heft 3, Braunschweig: Vieweg, 1876.
11. F. Klein, *Vorlesungen ueber die Entwicklungen der Mathematik im 19 Jahrhundert*, AMS Chelsea Publishing, 1967. 「19세기 수학의 발전에 대한 강의」, 한경혜 역, 나남, 2012.
12. Felix Klein, "Ueber die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie", *Mathematische Annalen* 4(1871), 573–625.
13. Felix Klein, Vergleichende Bertrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen, 1872. Reprinted with additional footnotes in *Mathematische Annalen* 43(1893), 63–100 and in GMA, vol. 1, 460–97.
14. F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen* Bd.1. Ed. R. Fricke und A. Ostrowski. Berlin, 1921.
15. F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Goettingen, 1893.
16. H. Mehrtens, *Moderne Sprache Mathematik*, Suhrkamp, 1990.
17. A. F. Möbius, *Gesammelte Werke*, Bd.1, Leipzig, 1885.
18. Julius Plücker and Felix Klien, *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Leipzig, 1968–1969.
19. D. E. Rowe, "Felix Klein's Erlanger Antrittsrede; A Transcription with English Translation and Commentary", *Historia Mathematica* 12(1985) 123–141.
20. J. A. Schouten, "Erlanger Programm and Uebertra gungslehre", *Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo* 50(1926), 142–169.
21. Oswald Veblen; J. W. Young, *Projective Geometry*, vol. 1–2, Ginn & Co., 1938.
22. K. Chr. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Erlangen, Nuernberg, 1847.
23. H. Wussing, *Bedeutende Gelehrte*, vol. II, Ed. G. Harrig, Leipzig, 1965, 1–12.