대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 2, 237 ~ 252. May 2013

Bachelard 과학철학의 수학교육학적 의미 탐색
- 변증법적 발달을 중심으로

정 연 준*

수학교육학 내의 논의에서 Bachelard의 과학철학은 인식론적 장애 개념을 중심으로 소개되어 있다. 그의 과학철학에서 인식론적 장애는 과학의 변증법적 발달과 연결되어 있다. 과학은 기존에 명백한 것으로 인식된 것을 부정하여 얻은 개념의 재구성과 일반화를 통해서 발달한다. 이 과정에서 기존의 인식에 대한 단절이 필요하다. 인식론적 장애는 재구성이 필요한 시점에서 기존의 것과 단절하지 못하고 고수함으로써 나타나내는 발달의 지연이며, 지식의 형성 혹은 학습 과정에 내재적인 어려움이 존재한다는 것을 의미한다. 이상과 같은 Bachelard 관점을 수학교육학에서 널리 적용되고 있는, ’내면화-압축화-대상화‘의 단계적인 반영적 추상화 도식과 비교하고 논의하였다.

I. 서 론

수와 연산은 초등학교부터 고등학교까지 지속적으로 지도되는 주제이며, 학년이 올라가면서 새로운 유형의 수가 도입되고 확장된 수에 대한 계산법이 지도된다. 학교수학에서는 하나의 주제가 상당한 시간에 걸쳐서 지도된다. 이러한 전개 과정에서 미묘한 변화가 일어나고, 기존 학습 내용이 새 내용의 학습에 장애를 일으킬 수 있다. 예를 들어, 중학교에서 음수가 도입되면 빼는 수가 음수인 뺄셈에서는 뺄셈의 결과로서 더 큰 수가 나오는데, 이러한 결과는 기존 양의 유리수 범위에서의 뺄셈과 충돌을 일으키고 정수의 뺄셈 이해에 영향을 줄 수 있다. 인식론적 장애는 이러한 상황을 나타내는 용어로서 많이 사용되고 있다.

인식론적 장애는 프랑스의 과학철학자 Gaston Bachelard(1884~1962)가 고안하였다. 학습자가 특정한 개념을 제한된 맥락이나 상황과 관련하여 국소적으로 사용하면서 개념이 특수화되고 제한되는 한편 제한된 영역에서 성공을 거두면서 이후 일반화 혹은 확장이 어렵게 되는 상황을 분석하기 위한 수단으로 Brousseau가 도입하면서 수학교육학에 인식론적 장애 개념이 등장하였다(Brousseau, 1997, p.77). 몇몇 연구자들이 특정 수학적 개념의 인식론적 장애에 대한 분석을 시도하였다. Sierpinska(1987, 1990, 1992)는 무한, 수열의 극한, 함수를 대상으로 하여 인식론적 장애를 분석하였고, 허학도(2006)는 직사각형 넓이의 인식론적 장애를 분석한 바 있다.

20세기 전반기에 급격히 발달하는 과학의 발달에 비하여, 이를 설명할 과학철학의 발달이

* 충남대학교(yjjoung@cnu.ac.kr)

지체된 상황 속에서 Bachelard는 과학의 발달을 설명할 수 있는 관점을 확립하고자 하였다(김윤재・박치완, 2010). 특히 그가 주목한 점은 과학의 발달을 통해서 시간과 공간이 서로 독립되어 있고, 공간은 물질과 독립되어 있으며, 물체의 운동과 형태는 서로 구분될 수 있다는 등과 같은 기존의 상식에 볼 때에는 명백한 것으로 간주된 것들이 전복되었다는 점이다. 그가 보기에 이러한 결과물은 과학이 누적적이고 연속적으로 발달하는 것이 아니라 전복적이며 불연속적으로 발달하기에 나타나는 것이다. Bachelard는 과학의 불연속적인 발달을 설명할 수 있는 논의 구조로 과학의 변증법적 발달 도식을 제시하였다. 인식론적 장애는 과학의 변증법적 발달이 지연되는 지체 현상을 가리킨다. 따라서 인식론적 장애의 의미는 과학의 변증법적 발달 도식의 의미를 명확하게 파악할 때 보다 분명하게 될 것이다.

본 논문에서는 Bachelard 과학철학의 핵심을 이루는 과학의 변증법적 발달 도식을 고찰하고 이러한 도식의 일반화 가능성을 탐색하고, 과학의 변증법적 발달에 비추어 최근 수학교육 연구자들에 의하여 제시되고 있는 반영적 추상화의 단계적인 도식을 음미하고자 한다. 이를 통해서 수학 학습에 내재하는 어려움의 특성을 설명하고자 한다. 이를 통해서 Bachelard 과학철학이 지닌 수학교육학적 적용 가능성을 부분적이나마 제시하고자 한다.

II. Bachelard의 과학철학

1. 과학의 변증법적 발달

20세기 전반기에 진행된, 역학과 입자 물리학, 광학, 화학 등 과학의 각 분야의 발전을 목격한 Bachelard는 새로운 이론들이 변증법적 과정을 거쳐서 확립된 것으로, 과학이 변증법적으로 발달하는 것으로 설명하였다. Bachelard는 직접 변증법적 발달 도식 자체를 명시하지 않았다. 그는 과학의 여러 분야에서 확인되는 발전의 특정한 양상을 '변증법적'이라고 언급하였는데, 특히 19세기 후반기에 확립된 비-유클리드 기하학을 과학의 변증법적 발달의 대표적인 사례로 간주하였다.[1] 이 절에서는 비-유클리드 기하학의 성립 과정을 살펴보고, Bachelard의 과학철학에 대한 국내 연구 결과를 참고하여 과학의 변증법적 발달의 의미를 구체화하겠다.

기하학은 고대 이집트인들의 경험적인 측량 활동에서 곧 경험적인 과학으로서 시작하였으나, 고대 그리스인들에 의해 연역적인 지식으로 확립되었다(Nagel, 2001; Reidenbach, 2003). 이후 오랜 동안 연역적으로 논증이 된 유클리드 기하학의 정리들은 확실한 지식으로 확립되고, 논증의 출발점이 되는 공리들은 의심할 수 없이 자명한 것으로 간주되었다. 예를 들어, Leibniz는 "기하학적 진리는 타고난 것으로, 사실상 우리의 내부에 있으며 그리하여 경험이나 다른 전통을 통해 알게 된 어떠한 진리도 사용치 않고, 다만 우리가 이미 정신 속에 지니고 있는 바를 주의 깊고 질서 있게 살핀다면 바로 그곳에서 찾아낼 수 있다(Nagel, 2001, p.374)"고 하였다. 그런데 유클리드 기하학의 마지막 공리, 평행선 공리에 대해서는 고대 그리스 시대부터 공리로서의 지위에 대하여 문제가 제기되었다.[2] 예를 들어, Ptolemy는 평행선 공리를 정리로서 간주하여 다른 공리들로부터 유도하여

1) Bachelard(1994)의 과학의 변증법적 발달의 최초 분석 사례가 바로 비-유클리드 기하학의 성립이다. 그는 변증법적 발달의 결과물을 '비-유클리드적'이라는 용어로 나타내기도 하였다. "과학과 철학에서 거의 동시에 이러한 변증법적 경향, 즉 비-유클리드적 사고들이 나타남에 충격을 받지 않을 수 없다(Bachelard, 1994, pp.24-25)."

증명하려고 하였고, 후대의 기하학자 Proclus는 이에 대하여 다음과 같이 논평하였다. “이것은 다른 나머지 공리들에 의해서 그 해결이 궁리되어졌음에 틀림없다. 왜냐하면 어떤 책에서 Ptolemy가 그것을 해결하려고 헌신적으로 노력했던 것처럼 그것은 많은 어려움을 안고 있는 정리이기 때문이다. 두 직선이 계속해서 연장되어감에 따라 점점 더 가까워지게 되면 그것들은 언젠가는 만나게 될 것이라는 문장은 그럴 듯 하지만 … 우리는 이 정리의 증명을 찾아야 하고, 이것이 공리의 특별한 성격과도 다르다는 것이 이로부터 명백하다(Greenberg(1991, p.114)에서 재인용).″ 많은 수학자들이 평행선 공리를 증명하기 위해 시도하였으나, 그러한 증명들은 항상 평행선 공리와 동치에 해당하는 사항을 전제하고 있는 것으로 드러났다. 한편 Saccheri와 Lambert에 의해서 평행선 공리를 부정할 경우 모순이 일어난다는 것을 다른 공리들로부터 유도할 수 있다는 것을 보이려는 귀류법을 이용한 시도가 제시되었다. 그러나 이들은 모순을 명확하게 제시하는데 실패하였다.

19세기 전반기 Gauss, Bolyai, Lobachevsky 등에 의해 유클리드 기하학의 평행선 공리를 다른 공리로 대체한 비-유클리드 기하학이 독립적으로 제시되었다(Greenberg, 1991; Nagel, 2001; Reidenbach, 2003). 다른 공리들을 이용하여 평행선 공리를 증명하려던 시도들의 실패는 평행선 공리가 정리처럼 보이지만 실제로는 다른 공리들로부터 독립되어 있다는 것을 시사한다. 평행선 공리는 다른 공리들로 대체될 수 없으며, 따라서 명백성은 불충분하지만 공리로서 필요한 것이다. 그런데 이들은 평행선 공리를 공리로 수용하는데 머무르지 않고, 대담하게 다른 형태의 명제, 예를 들어 “한 직선 위에 있지 않은 점을 지나서 주어진 직선과 평한 직선이 적어도 두 개 존재하는 어떤 직선과 어떤 점이 존재한다(Greenberg, 1991, p.145)” 등과 같은 것을 평행선 공리를 대신하는 공리로서 사용하였다. 많은 수학자들이 이들이 제시한 공리들에서 서로 모순인 정리들이 유도된다고 생각하였다. 19세기 초 유클리드 기하학은 물리적 공간의 구조를 설명하는 학문으로 간주되었다. 물리적 공간은 유일하며 따라서 기하학에도 유클리드 기하학이 유일하여, 유클리드 기하학의 공리를 부정한 명제를 공리로 채택할 경우 서로 모순인 명제가 유도된다고 생각한 것이다. 그러나 19세기 후반에 이르러서는 이들의 제시한 기하학이 유클리드 기하학과 동일하게 논리적으로 일관된다는 점이 확립되었다.

비-유클리드 기하학의 등장은 기하학의 공리가 더 이상 자명한 진리가 아니라 임의적인 가정 혹은 전제와 같은 것으로 변환되도록 하였고, 이는 기하학적 개념들에 대한 이해의 변화로 이어진다. 유클리드 기하학만이 존재하였을 때 직선은 유클리드 기하학의 체계에서 주어지는 것밖에 없었으며, Bachelard에 의하면, 그렇기 때문에 직선은 단일한 표상을 지니고 확실하게 주어진 것으로 인식되었다(김태훈, 2001, p.18). 새로운 기하학이 등장하면서 “고전적인 평행선 개념은 그 절대성을 상실하게 되고, 결과적으로 공준들의 특이한 체계로 남게 된다. 평행선이라는 단어는 이제 그 존재(기존의 의미)를 상실하게 된다. 이제 이 단어는 한 특이한 언어적 체계가 될 뿐이다. 평행선 개념은 이제 조건적인 구조가 된다. 이 개념은 다른 조건에서는 다른 구조로 변한다(Bachelard,

2) 평행선 공리는 다음과 같이 상당히 복잡한 형태로 진술되어 있다. ′두 직선을 가로지르는 한 직선이 같은 쪽에서 두 직각보다 작은 내각을 만든다면, 그 두 직선이 무한히 연장될 때 그것들은 두 직각보다 작은 내각의 그 쪽에서 만나게 된다.′ 이러한 진술 구조는 평행선 공리를 정리로 간주하고 증명을 시도하도록 수학자들을 자극하였을 가능성이 크다(Nagel, 2001, p.374).

1994, p.144).” 비-유클리드 기하학의 등장과 함께 직선의 평행성과 직선 개념은 명백하고 단순한 것이 아니라 조건적이고 복잡한 것, 기하학의 공리 체계에 따라서 다른 의미를 지니는 것으로 변하였고, 두 점 사이의 최단 경로를 뜻하는, ‘측지선’으로 보다 일반화되었다. 곧 비-유클리드 기하학은 유클리드 기하학의 평행선 공리를 부정하며 출발하였고 이를 통해 기하학적 개념의 일반화가 이루어진 것이다. 이에 대해 Bachelard는 명백한 것을 부정함으로써 다양한 개념들이 출현하고 이를 통해 “개념의 수정, 확대 및 적용이 이루어짐으로써 비-유클리드 기하학이 성립(Bachelard 1994, p.26)”하였다고 평가한다. 비-유클리드 기하학의 출발은 유클리드 기하학의 부정이었지만, 유클리드 기하학이 범-기하학[3]에 흡수되는 것을 허용하고, “범-기하학은 […] 유클리드 기하학을 다른 모든 기하학 중의 특정한 하나의 경우로 취급한다(Bachelard, 2002, 31).”[4] 유클리드 기하학은 공리의 부정에 의해 넓은 이론에 융해되어 일반화된 것이다.

비-유클리드 기하학은 유클리드 기하학에서 자명하고 당연한 것으로 간주한 평행선 공리를 부정하고, 이러한 부정에 의해서 보다 개방적이고 일반적인 개념화가 가능하게 되었다. 이러한 모습을 Bachelard는 과학의 변증법적 발달의 기본적인 특성으로 간주하였다. 즉, 과학의 변증법적 발달은 기존의 개념 체계와 이론들에서 자명하거나 당연한 것으로 간주되는 것을 부정하고, 이를 통해 보다 일반화된 개념을 구성하고 이들을 바탕으로 하는 이론 체계를 생성하는 과정이다.[5] Bachelard(1994, 1996)에 의하면 당시 과학의 각 분야에서는 이러한 양상이 동시다발적으로 진행되며 새로운 이론들이 등장하였다. 소립자 물리학 분야에서는 이전에 당연시 되었던 형태와 운동의 구분이 부정되었고, Einstein의 상대성 이론은 동시성 개념의 명백성을 부정하여 시간과 공간의 절대적인 구분을 폐지하였고, 공간이 물질과 독립하여 존재하는 점도 부정하였다. 당시의 과학 발달은 상식적이고 명백한 것으로 간주되었던 기존의 상식적 인식을 공격하여 그것들이 명백한 것이 아님을 보이고, 그럼으로써 보다 일반화된 개념을 구축하였다.

2. 단절과 인식론적 장애

변증법적 발달의 결과는 재구성을 통한 기존 개념과 이론의 일반화이다. 변증법적 발달을 통해서 보다 넓게 조망할 수 있지만, 이전에는 생각하지 못한 낯선 관점을 지니게 된다.[6] 기존의 이론과 학설로 설명할 수 없는 현상들과 오차들이 증가하면서 새로운 이론을 구성함으로써 위기를 극복하려는 시도가 요청된다. 변

3) Bachelard는 유클리드 기하학과 비-유클리드 기하학을 포괄한 기하학을 범-기하학이라고 하였다.

4) Bachelard가 Houël에게 쓴 편지에서도 이러한 인식이 잘 표현되어 있다. “유클리드 학파들은 우리가 그들의 이론을 일반화하는 동안에 우리가 그들의 기하학을 부인하고 있다고 믿었다. 즉, 로바체프스키 이론과 유클리드 이론은 매우 잘 병존할 수 있다. 일반화된 기하학이란 .... 한 해석학자가 미분 방정식에 관한 문제를 풀 때, 일반적인 적분을 발견하고, 문제에 주어진 상황에 따른 상수를 결정하기 전에 이 적분을 먼저 구하고자 하는 것과 비슷한 방법을 취한다. 왜냐하면 이러한 행위는 임의적 상수가 특정한 가치를 지닌 것들을 결국 받아들여야 한다는 것을 결코 부정하지 않기 때문이다. 그러므로 유클리드 후계자들에 대해서 말하자면, 그들은 공주군들을 논증하려는 사람들로서, 나는 그들을 미분방정식 자체 내에서 적분 상수를 결정하고자 하는 사람들과 비교하고 싶다(Bachelard, 1994, pp.30-31).”

5) “바슐라르에게 변증법화 한다는 것은 개념과 공리의 부정을 통해 그것을 일반화한다는 것이다(박기순, 1995 p.48).”

6) 변증법적 발달의 결과로 “우리의 직접적인 경험과 관계가 없는 개념들로부터 출발”하여 “점진적으로 정화되어 체계화되어 […] 직관적으로 농축되었던 개념들과는 매우 동떨어진 개념이 된다[. …] 개념들을

증법적 발달은 과학의 위기를 극복하는 과정이다(임태훈, 2001). 위기 상황에 대한 돌파구로서 재구성에 의한 일반화가 나타나는데, 이것은 자연스럽게 드러나는 것이 아니라 익숙한 기존의 것에 대한 적극적인 거리두기, 곧 단절을 통해서 찾을 수 있게 된다. 다시 말하면, 변증법적 발달은 자명하게 보이는 것을 의도적으로 거부하고 전혀 다른 접근법을 추구하려는 시도의 결과라 할 수 있다.

Descartes가 보기에 기하학은 가장 직접적이고 명백한 공리에서 출발하여 여러 복잡한 증명으로 나아간다. Descartes는 모든 과학적 지식이 기하학적 절차를 따라서 전개되어야 한다고 생각하였고, 따라서 모든 과학적 지식은 인간의 정신에 명석, 판명하게 인식되는, 가장 확실한 지식에서 출발해야 한다고 생각했다. Bachelard는 Descartes의 이러한 환원주의적 관점이 과학적 사고를 왜곡한다고 강하게 비판하였다(박기순, 1995, pp.7-9; Bachleard, 1994, p.137). Descartes의 환원주의적 관점을 따른다면, 과학적 지식의 확실성은 우리 정신에 명석하고 판명하게 보이는 것, 가장 기본적인 단위 요소들에 의해서 확보된다. 아무리 복잡한 것이라도 가장 기본적인 단위 요소로 나누어 들어갈 수 있고, 이때 그 진리성이 직관에 명석, 판명하게 인식될 수 있다는 것이다. Bachelard가 목격한 바에 의하면, 현대 과학의 대상들은 감각적 대상들과 같이 우리가 주의를 기울이기만 하면 발견할 수 있는 것이 아니라, 이론과 실험의 조작을 통해서 접근할 수 있는 것 곧 구성된 것이다(박기순 1995, p.32). 주어진 문제 상황을 해결하기 위하여 이러한 대상들에 다다르기 위해서는, 명백한 것처럼 주어지는 상식적인 인식과 단절을 해야 한다. 그럼으로써 새로운 지식과 개념, 이론에 도달할 수 있다. 대개 "단순한 것은 늘 단순화된 것"뿐이며, "과학은 즉각적으로 단순(화)한 것에 만족해서는 안 되며, 오히려 그 속에서 '복잡한 것'을 찾아내야 한다(Bachelard, 1994, p.143)." 과학적 사고에서 단순한 것에 대한 비판은 즉각적인 것에 대한 비판이다. 상식은 즉각적 명백성을 특징으로 하는 반면, 과학적 인식은 복잡한 관계를 찾아서 우회하는 것을 특징으로 하기에, 둘은 서로 단절되어 있다(이지훈, 1998 p.131). 과학적 대상은 우리에게 즉각적으로 주어진 것이 아니라, 즉각적인 것을 부인하고 새로운 것을 구성하려는 노력의 결과물로서 나타난다.

비-유클리드 기하학이 수학적으로 확립되었지만 여전히 유클리드 기하학의 공리는 우리에게 자명하게 보인다. 예를 들어 20세기 초반 한 기하학자는 '두 직선이 오직 한 점에서만 만난다'는 명제를 상상을 통하여 확인할 수 있다고 주장한 바 있다.[7] 일상적인 공간 경험에서는 공간 구조가 유클리드적으로 상상되는데, 이는 행성 범위에서는 유클리드 기하학과 비-유클리드 기하학이 거의 동일하기 때문이다(Nagel, 2001). Gauss가 지표 위의 세 지점으로 이루어진 삼각형의 넓이를 계산하여 비유클리

확대함에 있어서 단지 눈에 보이는 속성들에 의해 개념들을 이해하려는 면을 약화할 때에만, 더욱 완결되고 더욱 진보된 이론에 접근하게 된다(Bachelard, 1994, pp.32-33)."

7) "왜냐하면 우선 우리가 어떤 점으로부터 시작해 어느 방향으로 무한정 뻗어 나가는 직선을 표상할 수 있는 것은 오직 상상을 통해서일 뿐이기 때문이다. 둘째, 우리는 어느 주어진 직선과 회전하는 다른 직선이 이루는 무한한 수의 여러 기울기, 즉 각을 우리의 지각 중에는 표상할 수 없다. 그러나 우리는 그저 눈을 한번 빠르게 돌리는 것만으로도 어떤 선이 그것이 도는 한 방향으로 360도 완전히 도는 모습을 표상해 볼 수 있다. 이렇게 상상적인 표상 가운데 무한한 수의 값을 포괄하는 전영역의 변화가 완전히 다 시각화될 수 있는데, 그렇게 눈을 한 번 돌릴 때라도 연속성이 개재되기 때문이다. 우리가 그 공리를 두고 보편성의 관점에서 그것이야말로 자명한 진리라고 말할 수 있는 것은 바로 이와 같은 상상의 과정이 가능하기 때문이다(Nagel, 2001, p.383)."

드 기하학의 타당성을 검증하려고 하였는데, 오차로 인하여 검증할 수 없었다. 비-유클리드 기하학을 검증하기 위해서는 천문학적 영역의 삼각형이 필요하다. 천문학적 영역에서는 공간이 비-유클리드적이라는 점이 간접적으로 확인될 수 있다. 비-유클리드 기하학의 직선은 우리가 감각적으로 경험한 것이 아니다. 오직 비-유클리드 기하학의 체계를 통하여 접근 가능한 것이다. 유클리드 기하학의 직선 역시 우리에게 본질적으로 단순한 것이 아니라 단순화된 것, 유클리드 기하학의 전체 논의 속에서 경험된 것이다. 유클리드 기하학과 단절하려고 할 때, 평행선 공리를 부정하여 형식적인 추론을 통하여 비-유클리드 기하학에 다다를 수 있게 된 것이다.

단절은 인식론에 능동성을 부여한다(김윤재・박치완 2010, pp.110-111; 이지훈 1998, pp. 136-137). 단절은 인간이 대상을 인식함에 있어서도 끊임없이 익숙한 심리적 관성으로부터 벗어나야 한다는 것을 드러낸다. 단절은 단순화된 것으로 인한 수동성에 대항하여, '주어가는 과정'의 출발점이며, 자기 부정을 통한 극복의 과정이다. 과학은 사실들의 묶음이 아니라 재구성이다(임태훈, 2001, p.39). 기존 인식과의 단절을 통하여 새로운 재구성이 가능하고, 과학적 사고는 역동적이며 열린 발전의 가능성을 지니게 된다. 우리가 알려지지 않은 미지의 것에 대하여 연구를 하게 될 때, 무엇보다 새로운 경험으로 나아가기 위해 과거의 경험에 대한 부정 혹은 거리두기가 필요한 것이다.

기존의 방법이 더 이상 생산적이지 못하여 생산성을 유지하기 위하여 새로운 방법을 과학에 도입해야 하는 시기가 도래한다(Bachelard, 1994, p.135) 이때 과거의 습관에 따라서는 안 된다. 단절은 제한 혹은 주어진 것을 극복하여 새로운 지식을 열기 위한 적극적 행동이다. 그러나 단절이 이루어지지 못할 경우 기존의 이해에 기반한 반대 혹은 저항이 불가피하며, 이 결과 인식론적 장애가 나타난다. 인식론적 장애는 기존 인식과의 단절을 바탕을 통하여 진행되는 과학의 변증법적 발달에 대한 저항 혹은 기존의 이해에 대한 고수로 인하여 나타나는 발달의 지체이다.[8] 인식론적 장애는 과학의 역동적인 발전의 흐름을 거역하는 퇴행적 사고이며, 과학적 사고에 대한 사고의 저항을 드러낸다.

비유클리드 기하학이 확립된 이후 Poincare는 여러 다양한 기하학들의 논리적 동등성을 수용하였지만, 여러 기하학들이 공간 구조를 동일하게 기술할 수 있는 가운데 유클리드 기하학이 항상 가장 편리한 기하학의 지위를 차지하고 있을 것이라고 생각하였다(Nagel, 2001; Reidenbach, 2003). 그는 물리적 실험을 통하여 유클리드 기하학이 반증될 가능성을 부정하였다. 만약 별들을 꼭짓점으로 가지고 별들 사이를 지나는 광선의 경로를 세 변으로 하는 삼각형의 내각의 합이 180도와 오차 범위를 넘는 차이를 보인다면, 그것은 광선이 유클리드적 의미에서 직선이 아니기 때문이라고 주장하였다. 이러한 Poincare의 태도는 유클리드 기하학을 옹호하기 위하여 기하학이 물리적으로 적용된 응용 기하학 혹은 물리 기하학의 가치와 논의를 원천적으로 부정하는 것이다. Einstein의 상대성 이론을 통해서 중력이 광선을 휘게 한

8) "과학적 진보가 이루어지는 심리적 조건을 연구하려 할 때, 우리는 즉시 과학 지식의 문제가 장애의 용어로 제기되어야만 한다는 것을 확신하게 된다. 이는 현상의 복잡성이나 순간성 같은 외부적 장애의 문제도 아니요 지각이나 인간정신의 유약함에 기인하는 문제도 아니다. 일종의 기능적 필요성에 의해서, 지체와 혼란이 발생하는 곳은 인식하는 행동 자체 내에서이다. 정체와 퇴행의 원인을 보여주어야 할 곳은 인식의 행동에 있다. 또한 이를 통해 우리는 인식론적 장애라 부르게 될 타성의 원인을 밝혀내야 한다(Bachelard, 2002, p.24)."

다는 것이 드러났을 때, 중력이 공간에 작용하여 공간을 휘어지게 할 수 있다는 것을 받아들인 다른 과학자들의 입장과 대비된다고 할 수 있다. Bachelard는 이러한 Poincare의 입장을 다음과 같이 평가한다.

> Poincare와 같은 사고는 우리에게 지적인 명백성에 대한 미래에 대한 전망을 정지시킨다. 즉 가장 간단한 명료한 사고는 사고적 측면에서 항상 으뜸가는 것이며, 다른 모든 연구들도 이러한 원초적인 명백성의 측면에서부터 출발하여 정돈되어야 한다고 그는 주장한다. [⋯] 이러한 정신은 변화에서 오는 지식을 거부하면서, 경직되고 기본적인 형식 하에서만 현상을 다루도록 훈련할 것이다. 결국 우리는 진정으로 현실적인 습관이라는데 머무르게 될 것이다. 그러므로 모든 유클리드적 구조는 제한된 듯한, 그리고 사고의 자연적인 견고성이라는 경험에 예속된 정신을 구성한다. (Bachelard, 1994, pp.40-41)

인식론적 장애의 징후이다.

III. 논의

앞 장에서 Bachelard의 과학철학을 변증법적 발달을 중심으로 살펴보았다. 기존 이론으로 설명할 수 없는 새로운 현상이나 오차에 직면하였을 때 새로운 이론이 기존 이론에서 그리고 상식에서 명백한 것으로 간주된 것을 부정하여 얻은 재구성을 통한 일반화로서 나타나면서 과학은 변증법적으로 발달한다. 새로운 이론과 개념은 새로운 현상에 직면하였을 때 자연스럽게 나타나는 것이 아니라, 적극적으로 기존 인식과 단절하고 이전의 관점에서는 생각하기 힘든 개념화를 착안함으로써 가능하게 된다. Bachelard에 의하면 변증법적 발달 과정은 과학적 사고를 역동적이고 개방적이게 만든다. 새로운 현상은 새로운 가능성 혹은 개념화로 가는 문이 되는데, 기존의 것과 단절하지 못하고 집착할 때 사고가 고착된다. 이것이 인식론적 장애이다. 이 장에서는 이와 같은 Bachelard의 논의가 지닌 수학교육학적 의미를 탐색하고자 한다.

우선 변증법적 발달 도식이 수학의 역사적 발달 과정에 일반적으로 적용될 수 있는지를 검토할 필요가 있다. Bachelard는 비-유클리드 기하학의 발생을 사례로 제시하였는데, 비-유클리드 기하학의 발생이 수학의 역사적 발달 과정의 대표적 사례라 하기는 어렵다. 기존의 공리를 부정한다는 극적인 사건에 비견되는 대목을 지니고 있는 수학적 주제들이 많지는 않을 것이다. 그러나 일반적으로 수학적 개념은 오랜 시간에 걸쳐서 발달하며, 이러한 발달 과정에서 상이한 시대에 나타난 아이디어나 관점들 사이의 관계는 변증법적 발달 개념이 작동될 수 있는 여지가 큰 것으로 보인다. 함수 개념의 역사적 발달을 예로서 살펴보자.

함수 개념은 운동 현상에 수반된 변화하는 양들 사이의 관계를 탐색하는 과정에서 본격적으로 발달한 것으로 인정된다(박교식, 1992; 정영옥, 1997; Kline, 1990; Kleiner, 1989). 17세기 후반 멱급수를 이용하여 변량들 사이의 관계를 일반적으로 다루는 대수적 방법이 발달하면서 함수의 정의가 명시적으로 제시되었다. 최초의 정의는 대수적인 조작 자체로 함수를 정의하는 것이었다. Johann Bernoulli는 1718년 “어떠한 방식으로든 주어진 변수와 상수들로 이루어진 양을 그 변수에 대한 함수(Kleiner, 1989, p.284)”라고 정의하였다. Bernoulli는 ‘어떠한 방식으로든 이루어진’의 의미를 분명하게 설명하지 않았으나, 멱급수 전개 가능한 함수를 염두에 두었다(Medvedev, 1991). 함수가, 유한하거나 무한한, 하나의 해석적 식 곧 멱급수에 의해

주어진다는 생각이 18세기를 지배하였다. 18세기 중반 이후에 변량들 사이의 종속 관계를 명시한 정의가 나타난다. Euler는 다음과 같이 함수를 정의하였다.

> 만약, 한 양이 다른 양에 의존하여 다른 양이 변하면 처음 양도 변할 경우, 처음의 양을 다른 양의 함수라고 한다. 이것은 매우 포괄적인 개념이며 한 양이 다른 양에 의해 결정될 수 있는 모든 방식을 포함하고 있다. 따라서 만약 x가 변량을 나타낸다면, x에 의존하는 모든 양들은 어떠한 방식으로 결정되든 x에 대한 함수라고 한다. (Kleiner(1989, p.288)에서 재인용) [9]

종속 관계로 함수 관계를 설명하지만, 일반적인 함수 관계를 설명하는 수단은 멱급수 전개이다. Euler 역시 함수를 해석적 식으로 정의하기도 하였다. 그러나 18세기 후반이후 모든 함수가 멱급수 전개 가능하지 않다는 것이 점차 강하게 인식되었다. 이때 함수값의 계산 방법이 특정하게 확정될 필요가 없다는 점이 함수 정의에서 고려되기 시작한다. Lagrange와 비슷한 시기에 활동한 Lacroix는 함수를 다음과 같이 정의하였다. "하나 이상의 다른 양에 그 값을 의존하는 양을 후자에 대한 함수라고 하며, 후자에서 전자에 이르기 위해 필요한 연산이 무엇인지 꼭 알아야 할 필요는 없다 (Siu(1995, p.109)에서 재인용)."

Dirichlet는 19세기 초반 다음과 같이 함수를 정의하였는데, 이 정의는 임의적 대응에 기반한 함수 개념의 출발점으로 간주된다.

> "두 고정된 값 a, b와 두 값 사이의 모든 값을 점차적으로 취할 수 있는 변수 x에 대해서 생각해보자. 이제 각각의 x에 대해서 유한한 값 y가 하나씩 대응하는데, x가 구간 a, b 사이를 **연속적**으로 지나갈 때 y=f(x)도 점진적으로 변할 때 y를 이 구간에서 x에 대한 연속 함수라고 하자. y가 구간 전체에서 동일한 법칙에 따라 x에 종속될 필요는 없다. 사실 종속성이 수학적 조작으로 표현될 수 있다고 생각할 필요조차 없다.(Siu(1995, p.113)에서 재인용, 강조는 저자에 의한 것임)"

Dirichlet 정의의 핵심적인 가치는 정의를 적용하여 유명한 Dirichlet 함수를 고안한 것에 있다(Medevedev, 1991). Euler, Fourier, Cauchy 등 많은 수학자들이 '임의의' 함수에 대하여 논의하고 있다고 주장하였지만 사실 그들이 생각하고 있었던 것은 해석적 식 혹은 곡선이었다. Dirichlet가 1829년의 논문에서 제시한 'Dirichlet 함수'는 해석적 식이나 자유롭게 그린 곡선으로 의해 제시되지 않은 최초의 함수이었고, 모든 점에서 불연속인 최초의 함수이다. 이러한 특징으로 인해서 Dirichlet의 정의가 함수 관계를 대응으로서 설명한 최초의 사례가 되는 것이다. 그러나 Dirichlet의 정의는 오늘날의 정의와는 매우 다른 요소가 담겨 있다. 독립변수의 행동이 점차적으로, 즉 연속적으로 변하는 것으로 간주되고 있다. 19세기 중반에 제시된 다른 수학자들의 함수 정의에서도 독립변수가 점차적 즉 연속적으로 변하는 것으로 간주되고 있다.[10] 오늘날과 같은 방식의 정의는 20세기

---

9) 1813년 Lagrange의 함수 정의도 이와 비슷하다. "일반적으로, 변량 앞에 위치한 문자 f, F에 의해, 우리는 이 변량의 모든 함수를 나타낼 것이다. 즉 이 변량에 종속되고 주어진 법칙에 따라 변하는 모든 양을 나타낼 것이다((Ferraro, 2001, p.547)에서 재인용)."

10) 예를 들어, Riemann은 1855년 다음과 같이 함수를 정의하였다. "z를 모든 가능한 실수 값을 점차적으로 취할 수 있는 변량이라고 가정하자. 그리고 z의 각 값에 대해 결정되지 않은 양 w의 유일한 값이 대응할 때 w를 z에 대한 함수라고 하자. 만약 z가 구 고정된 값 사이를 연속적으로 통과할 때 w 역시 연속적으로 변한다면 w를 주어진 구간에서 연속 함수라고 하자. ... 분명히 이러한 정의는 함수의 값들 사이의 법칙을 전체적으로 확립하지 않기 때문에 이 함수가 특정 구간 위에서 정의되었더라도 이외의 구

이후 확인된다. 1933년 Kuratowski는 함수를 다음과 같이 정의하였다.

> X와 Y를 주어진 두 집합이라고 하자. 독립 변수가 집합 X (정의역) 위에서 움직이고 값이 집합 Y(치역)에 속하는 함수는 카테션 곱 X×Y의 부분집합으로 다음의 성질을 만족한다. 모든 $x \in X$에 대해서 $(x, y) \in f$를 성립하게 하는 오직 하나의 y가 존재한다. 이러한 함수 전체 집합을 YX라고 나타낸다. 보통 $(x, y) \in f$ 대신에 $y=f(x)$라고 나타낸다(Siu(1995, p.113)에서 재인용)

종속-기반의 함수 인식이 대응-기반 인식으로 전환하는 과정은 대략 한 세기 넘게 걸렸다. 해석적 식으로 함수 관계 전체를 일반적으로 제시하는 것이 불가능하다는 점이 인식되면서 대응 개념을 통하여 함수를 설명하게 된 것으로 보인다. 그러나 대응 개념으로 함수 관계를 설명하면서도 상당 기간 동안 독립변수의 행동은 점차적 혹은 연속적으로 변하는 것으로 간주되었다. 독립변수의 행동에서 연속성이 배제되고 값의 선택이 완전히 임의적이게 된 것은 20세기 이후에 가능하였다. 이러한 변환 과정에서 종속 기반의 함수 인식을 부정하려는 의식적 시도가 있었던 것으로 보이지 않는다. 그렇지만 이 완만한 전환 자체는 Bachelard의 변증법적 발달 도식에 대응될 여지가 상당한 것으로 보인다.

역사적으로 대응 관점이 나타나기 시작하고 나서 한 세기가 지나서 현재와 같은 임의적 대응 기반의 정의가 나타났다는 것은 변량들의 동적인 관계 맥락에서 벗어나 함수 관계에서 형식적인 값의 결정 관계에만 주목한다는 것이 쉽지 않다는 것을 시사한다. 하나의 해석적 식으로 표현되기 어렵거나, 모든 점에서 연속이지만 미분불가능한 함수와 같이 이전에는 상상하지 못한 함수들을 다루게 되면서 비교적 쉽게 대응 기반 함수 개념이 제시된 것이라 하기 어렵다. 함수 관계는 자연에서 나타나는 변화 상황의 모델 역할을 하였고, 따라서 19세기 수학자들에게도 독립변수의 행동이 연속적이라고 간주하는 것은 어떠한 의미에서 명백하였던 것으로 생각된다. 이러한 점을 고려하면, 임의적 대응 기반 함수 개념화는 종속 관계 기반 개념화에서 쉽게 착안할 수 있는 것이 아니며, 동적인 맥락을 함수 개념에서 의도적으로 배제하고자 할 때 포착할 수 있는 것이라 할 수 있다. 비-유클리드 기하학의 발생에서처럼 적극적이고 명시적인 기존 인식에 대한 부정이 확인되지는 않지만, 임의적 대응 기반의 함수 개념의 확립에는 사고의 전환 혹은 단절이 필요하였던 것으로 보이고, 그렇기 때문에 오랜 시간이 걸렸던 것으로 판단된다. 동적인 맥락에 대한 배제의 필요성이 부각된 이후에 임의적 대응으로 함수 관계를 정의하게 된 것이라 할 수 있다.

수학의 많은 주제들이 오랜 시간에 걸쳐서 발달하였다. 발달 과정 속에서 접근 방식 혹은 기본이 되는 아이디어가 미묘하게 변화한다. 오랜 시간에 걸쳐서 직관적인 방식으로 수학적 개념을 파악하고 사용한 이후에야 형식화가 진전되는 경우가 대부분이다. 형식화 과정이 오랜 시간에 걸쳐서 진행된다는 것은, 함수 개념에서처럼, 형식화 혹은 새로운 개념화가 쉽게 다다를 수 있는 것이 아니라는 것을 뜻한다. 수학적 개념이 발생한 맥락에 기반을 둔 개념화에 대한 단절의 필요성이 인식된 이후에 형식화가 마무리될 수 있는 것이라 할 수 있다. 즉 형식화는 직관적 이해의 형식적 기술로 쉽게 성취되지 않는다. 이러한 지적이 타당하다면, Bachelard의 변증법적 발달 도식은 수학적

간에서 연장하는 방식은 완전히 임의적이다(Siu(1995, pp.113-114)에서 재인용, 강조는 저자에 의한 것)"

개념의 형성 과정에 폭넓게 적용된다고 할 수 있다.

지금까지 수학적 개념의 역사적 형성에 대한 Bachelard의 논의의 적용 가능성에 대하여 논의하였다. 학습자의 이해가 역사적 발달 과정과 동일하게 발달한다고 할 수 없다는 점을 고려하면, Bachelard의 논의가 학습 과정에도 일반적으로 적용될 수 있는가에 대해서는 별도로 살펴볼 필요가 있다. 이 물음에 대한 답을 찾기 위해서 수학적 개념의 형성에 대한 수학교육학계의 논의의 중심을 이루는 반영적 추상화에 대해서 살펴보자.

수학적 개념의 형성 과정에 대한 수학교육학계의 최근 논의는 Piaget의 반영적 추상화를 토대로 한다. Dubinsky(1991), Sfard(1991), Tall(2001) 등은 반영적 추상화 아이디어를 중학교 이상에서 다루는 수학적 주제에 적용하였다. 이들의 논의에서 공통적으로 확인되는 도식에 의하면 수학적 개념 형성은 수학적 절차 혹은 과정이 내면화·대상화되면서 완성된다. 친숙해진 수학적 절차 혹은 과정이 직접 수행하지 않고도 결과를 다룰 수 있고 상황에 맞추어 유연하게 과정을 적용할 수 있을 때 내면화되었다고 하며, 내면화된 수학적 절차 혹은 과정이 더욱 숙달되면서 하나의 대상처럼 친숙하게 인지되고 다른 수학적 절차 혹은 과정의 조작의 대상으로 사용할 수 있게 될 때 대상화되었다고 한다. 그리고 이렇게 형성된 수학적 개념들에 대한 조작들을 다시 내면화·추상화하면서 보다 더 추상적인 수학적 개념이 형성된다. 이러한 단계적 도식은 수학적 절차나 과정을 주의 깊게 수행하는 것을 반복하면 내면화되고, 내면화된 과정이 압축되어 대상화가 완성되는 것처럼 생각하게 한다. 곧 대상화, 수학적 개념의 형성은 자연스럽게 달성될 수 있는 것처럼 보인다. 그러나 일반적인 실제 학습 상황에서도 그리고 보다 조건이 잘 구분된 실험적인 상황에서도 반영적 추상화의 단계적 과정은 쉽게 완성되지 않는 것으로 보인다.

Dubinsky는 자신의 아이디어를 구현할 수 있도록 환경을 조성하고 미적분 강좌[11]를 개설하고 그 강의에 참여한 학생들의 이해를 여러 주제를 대상으로 하여 조사하였다(Cottrill과 Dubinsky, 1996; Cottrill과 Dubinsky, Schwingendorff, 1997; Thomas, 1995). 전반적으로 학생들의 수업 부담과 참여도가 높았다. 기존의 미적분 강의를 듣는 학생들보다 이해도가 더 높다는 결과가 제시되었지만, 보다 이상적인 환경에서 수업을 듣는 학생들의 상당수가 해당 주제에 대한 이해를 완성하지 못하였으며, 매우 복잡한 방식으로 내용들을 이해하였다. 미적분의 기본정리에 대한 Dubinsky의 접근 방식과 조사 결과를 예로서 살펴보자.

Dubinsky(1992)에 의하면, 미분과 적분에 대한 인지적 구조가 연결되는 과정이 미적분의 기본정리에 대한 이해가 형성되는 과정이다. 미분 과정이 내면화되고 대상화되면 미분은 주어진 함수 f를 f'로 변환시키는 것으로, 곧 함수가 미분 조작의 대상으로 인식되고 미분은 함수의 집합이 정의역과 치역인 함수로 인식된다. 적분 과정은 역시 내면화, 압축되면서 위끝에 따라서 달라지는 정적분의 값들을 하나의 함수로, 즉 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$를 일반적인 함수처럼 인식하고 다룰 수 있게 된다. 이를 통해 적분도 정의역과 치역이 함수의 집합인 함수로 인식된다. 미적분의 기본정리에 대한 이해는

11) 수학적 개념의 기반이 되는 수학적 조작이나 과정들을 내면화하고, 이 과정들을 다양한 수학적 상황과 연결시킬 것을 요구하는 과제를 해결함으로써 대상화를 촉진하도록 미적분 수업이 진행되었다(Dubinsky & Schiwingendorf, 1991; Schiwingerdorf & Dubinsky, 1992).

이와 같이 형성된 미분과 적분에 대한 이해가 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$의 미분을 통해 연결되어 형성된다. 학생들을 조사한 Thomas(1995)에 의하면, 학생들의 이해는 이러한 논의보다 훨씬 복잡한 양상을 보였다. Dubinsky는 정적분에 대한 도식이 형성되면 특별한 어려움 없이 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 미분 과정을 적용할 수 있다고 생각하였다. 그러나 함수와 정적분에 대한 이해가 충분히 발달한 것으로 평가되는 학생들 중에서 상당수가 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 미분을 적용하지 못하였다. $F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 미분 과정을 적용하는 것과 관련된 것으로 간주된 '미분과 적분의 관계 인식'과 '그 관계의 정적분 적용'에 대한 이해는 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 이해와 상당히 독립되어 있다. 상식적으로는 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$에 대한 이해가 발달할수록 미분과 적분의 관계를 보다 잘 인식하고, 그 관계를 잘 적용할 수 있을 것처럼 보인다. 그러나 어떤 학생은 $\int_a^x f(t)dt$에 대한 이해가 대상 수준에 도달하여도 미적분의 기본정리의 인식과 적용 측면에 대한 이해가 완성되지 않았고, 다른 학생은 미적분의 기본정리의 인식과 적용 측면에 대한 이해가 $\int_a^x f(t)dt$에 대한 이해보다 높은 수준에 있었다. 이러한 조사 결과를 두고, Thomas(1995)는 이유를 특별히 설명하지 않고 두 요소에 대한 이해가 독립되어 있다는 결론을 내렸다. 한편 Thomas가 면담 조사를 한 6명의 학생들의 미적분의 기본정리에 대한 전체적인 이해도는 2명이 최고 수준에 도달하고, 2명은 중간 수준, 2명은 매우 부족한 것으로 평가되었다.

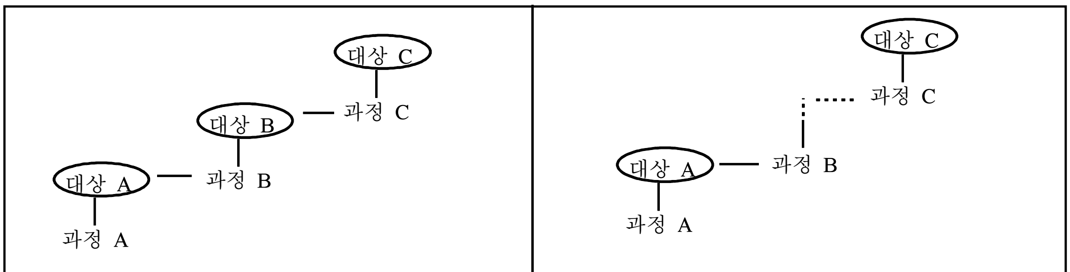
Dubinsky가 구성한 수업 환경은 미분의 정의와 정적분의 정의를 이루는 수학적 과정을 충분히 숙달하도록 구성되었다. 상당수의 학생들이 그러한 수업에서 열심히 참여를 하였지만, 반영적 추상화가 성공적으로 완성된 경우는 상대적으로 적었다. 이러한 결과가 나타나게 된 원인을 정확하게 분석하는 것은 매우 어려운 일이다. 그러나, 추상적·형식적인 수학적 과정에 숙달된다고 해도 그것이 바로 수학적 개념 형성을 보장하지 않는다는 것은 분명하다. 앞에서 살펴본 바에 의하면 추상적이고 형식적인 수학적 과정이, 익숙해졌다고 해도, 그것이 적용되는 맥락과 상황을 대표하는 것으로 인식하기 위해서는 맥락적·상황적 인식에 대한 단절이 필요하다. 학생들의 모습은 단절이 적절히 수행되지 못하면서 형식적인 수학적 과정에 숙달되었지만 적용에 어려움을 겪는 것으로 해석될 수 있다. 이러한 언급이 상당히 피상적인 논의로 끝날 수 있는데, 반영적 추상화에 대한 Sfard(1991)의 독특한 주장을 눈여겨 볼 필요가 있다.

다른 연구자들과 다르게, Sfard(1991)는 대상화가 본질적으로 달성하기 어렵다는 점을 강조한다. Sfard에 의하면, 대상화가 되는 과정-개념이 조작의 대상이 되는 수학적 과정 곧 상위 수준의 과정이 내면화되는 단계에서 대상화가 이루어진다. 대상화가 완료되어 새로운 개념이 형성되고 이 개념에 대한 새로운 수학적 조작이 행해지는 것이 아니라, 내면화가 압축된 정도의 수준에서 머무르는 개념에 대한 상위 수준의 과정이 등장하고, 상위 수준의 과정이 숙달되어 내면화될 때, 하위 수준의 과정에 대한 대상화가 완성되는 것이다. 이때 사물을 보는

방식에 변화가 일어난다.[12] Linchevsky와 Sfard(1991), Sfard와 Linchevsky(1994)는 대상화의 어려움으로 인하여 학생들에게 의사-구조적 개념화가 진행될 가능성이 높다고 지적한다. 곧 학생들이 추상적인 기호를 (상위 수준의) 수학적 조작에 사용하지만, 기호가 (하위 수준의) 수학적 조작이 대상화된 결과를 나타내지 못한 채 사용된다는 것이다. 다시 말하면 학생에게는 기호 자체가 대상이 되며 이때 기호 조작은 기계적인 조작에 머무르게 된다.

Sfard(1991)의 지적이 타당하다면, 수학적 개념 형성은 매우 복잡할 수밖에 없다. 한 개념의 형성은 하위 수준의 조작과 상위 수준의 조작과 연결되면서 발달한다. 이상하게로 보일 수 있는 주장이지만, 실제 수학의 역사적 발달 과정에 부합되는 측면이 많다. 앞서 살펴본 함수 개념의 경우, 변량들 사이의 대수적 조작, 함수에 대한 조작이 먼저 발달한 이후에, 이들의 영향을 받아서 함수 개념이 조정된 측면이 강하다. 곧 상위 수준의 과정이 함수 개념의 형성에 영향을 준 것이다. 음수가 수학적으로 확립된 것은 19세기 후반의 일이다. 그러나 음수를 포함하는 대수적 조작은 17세기부터 발달하였으며, 대수적 조작에 법칙적 구조를, 예를 들어 이차 방정식에 대한 단일한 일반적인 풀이법의 존재성 등을 보장하기 위해서 음수의 존재성이 요구되었다(Arcavi, 1985). 음수의 존재를 전제하는 상위 수준의 수학적 과정이 인해서 음수의 존재성이 수학적으로 필요하게 된 것이다.

Sfard의 관점에 비추어 보면, 수학적 개념의 형성은 어려운 과제일 수밖에 없다. 하위 수준의 과정은 숙달되었지만, 그것이 완성되지 않은 상태에서 상위 수준의 과정에 익숙해져야 하위 수준의 과정이 대상화될 수 있다. 이러한 시기는 학습자에게 어려움을 크게 줄 수밖에 없을 것이다. 이러한 어려움을 견딘 이후에야 시간을 두고 실행되는 과정으로 인식되었던 것이 대상화될 수 있는데, 여기에서 기존의 인식에 대한 단절이 어느 정도 필요할 것으로 보인다. 상위 수준의 과정이 하위 수준의 과정에 영향을 줄 때, 그 영향을 받아들이려면 자신이 익숙했던 것과 거리를 두어야 할 것이다. Sfard의 관점과 Bachelard의 관점을 연결시킨다면, 상위 수준의 과정이 단절을 촉구하는 역할을 하면 따라서 변증법적 발달의 한 동력이 된다



a. 건전한 발달 고리

b. 깨진 발달 고리; 과정 B는 구체화되지 못하였고 그래서 B와 C 사에 연결이 없다.

[그림 Ⅲ-1] 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로의 변환의 계열로서 수학적 개념의 발달[13]

---

12) Dubinsky는 이에 대하여 특별한 언급이 없다. Dubinsky는 내면화가 진전되어 다른 조작의 대상으로 사용될 때 대상화가 완성된 것으로 판단한다. 대상화가 된 이후에 다른 조작의 대상이 될 수 있는지 아니면 다른 조작의 대상이 되면서 대상화가 이루어지는 것인지의 여부가 다소 불분명하다.

13) Linchevsky와 Sfard(1991)에서 인용

고 할 수 있을 것이다. 이상의 논의는 Dubinsky의 미적분 학생들이 보인 어려움이 어느 정도 설명할 수 있을 것으로 보인다.

반영적 추상화가 Piaget의 이론을 기반으로 하고 있다는 점을 기억한다면, 이상의 논의는 수학적 개념의 형성에 인지 구조의, 동화가 아닌, 조절이 필요하다는 것으로 결론내려도 무리가 없을 것이다. '내면화－압축화－대상화'의 단계적 도식은 개념 형성에 특별한 어려움이 없어 보이게 하는데, 이는 수학적 개념의 이해가 동화로 보일 소지가 크다. Sfard의 관점은 수학적 개념의 형성이 조절에 해당하는 것일 수 있음을 보여준다. 한편, Bachelard의 논의는 기존의 지식에 대한 단절이 새로운 지식의 형성 혹은 조절에 필요할 수 있다는 것을 보여준다.

Ⅳ. 결론

Bachelard가 목격한 19세기 후반과 20세기 전반기에 걸친 과학의 발달은 기존의 이론과 상식을 뒤엎는 결과물을 내놓았다. 기존의 이론과 상식에서 명백하고 당연한 것으로 간주하였던 것들이 부정되고 조건화됨으로써 더욱 일반화된 개념과 이론들이 형성되었다. 비-유클리드 기하학이 성립되면서 직선은 더 이상 자명한 것이 아니고 공리 체계에 따라서 다른 것이 직선으로 간주될 수 있다는 점이 드러났고, 측지선 개념이보다 일반화된 직선 개념으로 등장하였다. 이러한 변화와 발달을 이해하기 위하여 Bachelard는 변증법적 발달 개념을 제시하였다. 그에 의하면, 새로운 지식의 발달하려면 기존의 지식과의 거리 두기 곧 단절이 필요하다.

수학사적으로 그리고 학교수학에서 하나의 주제는 시간을 두고 전개되며 시간의 경과에 따라서 변화한다. 기존의 지식이 새로운 지식의 밑돌이 되지만 때로는 방해를 하기도 한다. 자신에게 익숙한 기존의 지식과 거리를 둘 수 있을 때, 새로운 지식으로 나아갈 수 있다. 형식화 과정에서는 개념 형성의 출발점이 되었던 맥락과의 단절이 필요할 수 있다. 인식론적 장애는 그러한 간격이 필요한 시점에서 거리를 두는데 실패한 것에서 비롯된다. 이는 지식의 형성 과정에 실패의 위험이 내재한다는 것을 뜻한다. 수학교육학 논의에서 널리 받아들여지고 있는 '내면화-압축화-대상화'의 단계적인 반영적 추상화 도식에는, 주의 깊게 형식적인 수학적 조작을 반복하면 새로운 지식의 형성이 가능하다는 것으로 받아들여져, 이러한 위험성이 과소평가될 여지가 높다. 대상화 과정에 존재하는 어려움에 대한 Sfard의 지적은 그러한 위험을 잘 드러내고 있다. 수학 학습은 때로는 인지 구조의 조절을 요구하며, 형식화된 내용의 학습에 그러한 과정이 필요할 수 있다.

Bachelard의 논의는 학습이 어려운 과정이라는 드러낸다. 이는 역설적으로 학습자가 더욱 주체성을 가지고 학습에 나서야 한다는 것을 의미한다. 교과서에 잘 정리되어 있는 형식적인 수학적 과정을 갈무리하는 것만으로는 수학적 지식의 형성이 완성되지 못한다. 그러한 내용이 가지고 있는 기존 지식과의 차이를 통찰하고, 둘 사이의 간격을 조절할 수 있을 때 학습이 완성된다고 할 수 있다. 이 과정에서 학습자는 더욱 적극적으로 학습 과정에 개입해야 할 것이다. 따라서 어려움의 지점을 파악하고 학습자가 스스로 고착되어 있는 점을 깨닫고 벗어날 수 있게 도와주는 것이 수학교사의 중요한 자질 중 하나라고 할 수 있을 것이다.

본 논문에서는 변증법적 발달 개념을 중심으로 Bachelard의 과학철학이 지닌 수학교육학적 의미를 논의하였다. 수학교육학 내에서 후속 연구가 더욱 활성화되고 이를 통해서 수학교육

학과 수학교육이 더욱 다양한 관점에서 논의되고 실천될 수 있기를 희망한다. 구성주의가 전개되는 과정에서 상대주의적 주장이 부각되면서 제한된 측면의 논의만 이루어진 것으로 보인다. Bachelard 이외의 과학 및 수리철학의 최근 성과들의 수학교육학적 의미를 구체적으로 탐색하는 연구가 이어지기를 기대한다.

참고 문헌

김윤재, 박치완(2010). 바슐라르의 '단절' 개념에 대한 세 물음과 그 해명. **철학연구** 27, 83-117

김태훈(2001). **바슐라르(G. Bachelard)의 과학철학 연구 : 쿤(T. S. Kuhn)과의 비교**. 중앙대학교 석사학위 논문

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근**. 서울대학교 박사학위 논문

박기순(1995) **가스통 바슐라르의 '새로운 과학정신'의 철학**. 서울대학교 석사학위 논문

이경화 · 신보미(2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해, **수학교육학연구** 15(15), 39-56

이지훈(1998) 바슐라르의 단절 개념. 고려대학교 철학연구소. **철학연구** 21(1), 129-151

정영옥(1997). **Freudental의 수학화 교수-학습론 연구**. 서울대학교 박사학위 논문

허학도(2006). **직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애**. 서울대학교 석사학위 논문

Arcavi, A.(1985). *History of Mathematics as a Component of Mathematics Teachers Background*. Weismann Institute of Science. Unpublished doctoral dissertation.

Bachelard, G. (1994). **새로운 과학정신**. 김용선 옮김. 서울: 인간사랑. (불어 원작은 1934년 출판).

Bachelard, G. (1996). **부정의 철학**. 김용선 옮김. 서울: 인간사랑. (불어 원작은 1940년 출판).

Bachelard, G. (2002). *The Formation of the scientific mind : a contribution to a psychanalysis of objective knowledge*. (tr. by Mary McAllester Jones). Manchester: Clinamen. (불어 원작은 1938년 출판).

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics (Didactique des mathématiques, 1970-1990)* (Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V. Eds. and Trans.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Ducbinsky, E.(1996). Understanding the Limit Concept : Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior* 15, 167-192

Cottrill, J., Ducbinsky, E., Schwingendorf, K.(1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior* 16(4) 399-431

Dubinsky, E.(1991). Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. in Steffe. L.(Ed.). *Epistemological foundations of mathematical experiences*. 160-202

Dubinsky, E.(1992). A Learning Theory Approach to Calculus, in Kairan, Z. A.(Ed.). *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*. MAA Notes No. 24, 43-55

Dubinsky, E., Schwingendorf, K.(1991). Constructing Calculus Concepts : Cooperation in a Computer Laboratory. in Leinbach, L.(Ed.). *The Laboratory approach to teaching calculus*, 47-70

Ferrao, G. (2001). Analytical Symbols and Geometrical Figures in Eighteenth-Century Calculus. *Studies in History and Philosophy of Science* 32(3), 535-555.

Greenberg, M. J.(1991). *Euclidean and non-Euclidean geometries: development and history*. 이우영 옮김. 유클리드 기하학과 비유클리드 기하학. 서울: 경문사

Kleiner, I.(1989) Evolution of the Function Concept : A Brief History., T*he College Mathematics Journal* 20(4), 282-300

Kline, M.(1990), *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York

Lecourt, D.(2012). *Marxism and epitemology*. 박기순 옮김. 맑스주의와 인식론. 서울: 중원문화

Linchevski, L., Sfard, A.(1991). Rules without reasons as processes without objects. *Proceedings of PME conference* 15(2), 317-324

Medvedev, F. A.(1991), *Scenes from the History of Real Functions*, Basel: Birkhäuser Verlag

Nagel, E.(2001). *The structure of science : problems in the logic of scientific explanation*. 전영삼 옮김. 과학의 구조:과학적 설명 논리의 문제들 1. 서울: 아카넷

Reichenbach, H.(2003). *The rise of scientific philosophy*. 전두하 옮김. 과학철학의 형성. 서울: 선학사

Schwingendorf, K., Dubinsky, E.(1991). Calculus, Concepts and Computers : Innovations in Learning in Tucker, T.(Ed.). *Priming the Calculus Pump : Prepared by the CUPM Subcommittee on Innovations and Resources*, 175-98

Sfard, A.(1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36

Sfard, A., Linchevsky, L.(1994). Between Arithmetic and Algebra : In the Search of a Missing Link - The Case of Equations and Inequalities. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino* 52(3), WALT 1, 279-307

Sierpinska, A.(1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits, *Educational Studies in Mathematics* 18, 371-397

Sierpinska, A.(1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics, *For the Learning of Mathematics* 10(3) 24-36

Sierpinska, A.(1992). On understanding the notion of the function, in Dubinsky, E. & Harel, G.(Eds.). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*, 25-58

Siu, Man-Keung(1995). Concept of function - Its history and teaching. in Katz, V.(Ed). *Learn from the masters*. 105-122

Tall, D.(2001). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Teacher Education* 1, 81-104

Thomas, K.(1995). *Fundamental Theorem of Calculus : An Investigation into Students' Constructions*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University

A mathematics-educational investigation on the philosophy of science of Bachelard
— focused on the Dialectical Developments of Science

Joung, Youn Joon(Chungnam Univ.)

The philosophy of science of Bachelard is introduced mainly with epistemological obstacles in the discussions within mathematics education. In his philosophy, epistemological obstacles are connected with the dialectical developments of science. Science progresses through generalization of concepts and theories by negating things which were recognized as obvious. These processes start with ruptures against the existing knowledge. Epistemological obstacles are failure in keeping distance with the existing knowledge when reorganization is needed. This concept means that there are the inherent difficulties in the processes of concept formation. Finally I compare the view of Bachelard on the developments of science and the 'interiorization-condensation-objectification' scheme of reflexive abstraction in mathematics education and discuss the inherent difficulties in the learning mathematics..

* key Words : Bachelard(바슐라르), epistemological obstacles(인식론적 장애), dialectical developments (변증법적 발달) reflexive abstraction(반영적 추상화)

논문접수 : 2013. 3. 30
논문수정 : 2013. 4. 26
심사완료 : 2013. 5. 21