대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 2, 153 ~ 171. May 2013

수학적 사고 스타일에 따른 함수의 문제해결과정의 특징 분석1)

최 상 호* · 김 동 중** · 신 재 홍***

본 연구의 목적은 학생들의 수학적 사고 스타일에 따른 문제해결과정에서 나타나는 특징을 발견함으로써 교사가 학생에게 다양한 표상을 제공하는 방법론에 대한 시사점을 주는 것이다. 이러한 특징들을 분석하기 위해서 대학교 1학년 학생 202명에게 지필검사를 실시한 후 수학적 사고 스타일을 고려한 4 개 그룹으로 분류하여 그룹별로 두 명씩 총 8명에 대해 인터뷰를 실시하였다. 그 결과, 수학적 사고 스타일은 수학적 개념 정의방법, 표상에 대한 문제해결, 표상 간의 번역능력과 관계가 있다고 결론지을 수 있었다. 이러한 결과를 토대로 Dienes의 지각적 다양성의 원리를 구체화하여 향후 교수학습에서 다양한 표상을 제시하는 방법론에 대한 시사점을 줄 것으로 기대할 수 있다.

Ⅰ. 서　론

수학적 사고는 고등적 사고로써, 언어와 기호 같은 도구를 매개로 하여 사고를 하는 활동으로 볼 수 있다 (Vygotsky, 1986; Rogoff, 1990). 이러한 사고를 바탕으로 하는 수학학습은 도구를 통해 교사와 학생이 의사소통을 함으로써 이루어진다. 이 때 의사소통에서 사용되는 도구는 언어와 시각적인 매개체라고 할 수 있는데 특히, 시각적인 매개체에는 표상과 이미지가 포함된다. 따라서 표상은 시각적 사고를 하는데 필요한 매개체의 한 부분으로써 교사와 학생의 의사소통에서 중요한 역할을 한다.

이러한 표상이 때로는 수학적 의사소통을 방해하는 원인이 될 수 있다. 그 중에 하나가 교사와 학생의 표상에 대한 서로 다른 인식차이라고 할 수 있다. 교사가 수학적 개념을 설명하기 위해서 제시하는 표상을 학생이 이해하지 못하면 의사소통에 제한이 있을 수 있기 때문에 수학학습은 어려움에 직면할 수 있다.

따라서 이러한 문제들을 해결하기 위해 표상에 대한 연구가 많이 이루어지고 있다. 지금까지의 표상에 대한 연구는 다양한 표상활동과 표상 간의 번역활동으로 요약할 수 있다(김인희, 2009; 성홍순, 2008). 즉, 다양한 표상활동과 표상 간의 번역활동을 통하여 수학적 사고의 틀이 획득되면 수학적 개념에 대한 깊이 있는 이해가 가능하고, 개념들 간의 연계성을 알 수 있으므로 문제해결능력을 향상시킬 수 있는 것이다.

하지만 이러한 강조점에도 불구하고 수학학습에 어려움을 겪는 학생들의 처방에는 개인적인 차이로 인해 제한점이 있을 수 있다. 따라서 개인의 특성을 고려하여 표상활동에 대한 좀 더 깊이 있는 연구를 바탕으로 새로운 시사점을 도

* 고려대학교 대학원, shchoi83@hanmail.net (제 1 저자)
** 고려대학교, dongjoongkim@korea.ac.kr (교신 저자)
*** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr
1) 이 연구는 2012학년도 고려대학교 사범대학 특별연구비 지원을 받아 수행되었음

출한다면 학생들에게 좀 더 유의미한 도움이 될 것이다. 이를 위해 개인의 특성을 분류한 후 분류된 집단의 특징을 고려하여 연구를 진행하고자 한다. 특히, 개인의 특성 중에서 수학적 사고 스타일을 시각적 사고 스타일(시각적 사고 스타일 관련 문항의 점수가 전체 평균보다 높은 그룹)과 대수적 사고 스타일(대수적 사고 스타일 관련 문항의 점수가 전체 평균보다 높은 그룹)로 분류하였다. 그 이유는 시각적 사고 스타일인 학생에게 대수적 표상(대수식)만을 제공한다든지 대수적 사고 스타일인 학생에게 시각적 표상(표, 그래프)만을 제공하게 되면, 표상에 대해 학생 각자의 내면화 과정이 달라서 서로 다른 의미로 받아들일 수 있고 표상 간의 번역이 제한될 수 있으므로 다양한 표상의 활용에 어려움을 가질 수 있기 때문에 2개의 스타일로 분류하여 시사점을 도출하고자 한다.

따라서 이 논문에서 중요한 이슈는 "학생의 사고의 다양성과 표상의 관계는 무엇인가?"라고 할 수 있다. 특히, 다양한 표상들을 교사가 학생의 사고 특성에 따라 어떻게 활용해야 하는지가 학생과의 의사소통에서 핵심이라고 할 수 있다. 그러므로 이 논문의 주요한 논점은 다양한 표상의 활동에 있어서 학생들의 사고 스타일에 따른 특징들은 그들이 겪고 있는 수학적인 어려움과 관련이 있고 이러한 학습의 어려움을 해결하기 위한 방법론에 중요한 통찰력을 줄 수 있다는 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 표상의 본질

가. 표상의 단일성

일반적으로 표상은 학생들이 자신이 가지고 있는 수학적 개념을 표현 할 때 표, 그래프, 식 등과 같이 밖으로 표현하는 외적인 표상과 이미지로 존재하는 내적인 표상으로 생각해 볼 수 있다. 용어를 내적 · 외적으로 구분하다보니 두 가지가 다른 개념처럼 취급되어 왔지만 NCTM(2000)에서는 이들의 통합을 강조하였다. 또한 Saussure(1996), 이찬주와 박범석(2005)이 제시한 기호학적 측면에서는 "기호의 의미를 '의미화 하는 것'으로서의 기표(signifier)와 '의미화 되는 것'으로서의 기의(signified)의 결합에 기초한다."고 하면서 기표는 외적인 표상이고, 기의는 기표를 통해 전달하고자 내적인 표상을 가리키는데 이러한 두 측면의 통합을 강조하였다. 따라서 본 연구에서 내적 · 외적표상을 구분하지 않고 하나로 통합하여 생각할 것이다.

나. 다양한 표상의 장점과 단점

표상에는 상황 · 언어적 표현, 표, 그래프, 대수식 등이 있는데 이들은 수학적 개념의 다양한 측면을 보여줄 수 있으므로 교사는 표상들의 장점과 단점을 잘 알고 이를 적재적소에 제시해야 효과적인 수학학습이 가능하다.

첫째, 언어적 표현은 학생들의 일상적인 의사소통 형식이기 때문에 다른 표현 양식보다 친숙할 수 있다. 따라서 현상들을 이해하고 설명하는데 유용하다. 하지만 언어만을 사용하면 개인적인 생각이 많이 반영되기 때문에 수학적 의사소통에 장애가 될 수 있다. 둘째, 그래프는 증감과 변화를 파악하기 용이하기 때문에 제시된 정보들을 통합적으로 표현할 수 있고 경향 예측도 가능하다. 그렇지만 그래프 표현은 표현하는 사람에 따라 형태나 모양이 달라질 수 있기 때문에 대수식이나 표에 비해 정확성이 뒤떨어질 수 있다. 셋째, 대수적 표현은 간결하고 일반적이며 효율적이다. 그러나 대수적 기호만 사용하게 되

면 구체적으로 의미 있는 수학 학습을 방해할 수 있다. 넷째, 표는 해당하는 값을 직접 정확하게 읽을 수 있고 함수의 특정 값을 비교하는 데 유용하다. 그러나 표는 변화의 형태를 관찰하기에 적합하지 않으며 하나의 대상으로 그 관계들을 보기가 어렵다는 단점이 있다(송정화, 권오남, 2002; 이종희, 김부미, 2004; Friedlander, Tabach, 2001; Janvier, 1987). 위와 같은 표상의 장점과 단점을 고려하여 교사는 학생들이 다양한 표상을 경험할 수 있도록 도와주어야 한다.

다. 표상 연계성의 번역능력

다양한 표상들의 장점과 단점을 바탕으로 표상들을 연결시키고 번역하는 활동을 통해 수학적 개념 간의 구조와 관계성을 보여줄 수 있으므로 더 깊이 있는 개념적 이해가 가능하여 문제해결능력을 향상시킬 수 있다.

Janvier(1987)는 수학을 표현하는 양식으로 상황 · 언어적 표현, 표, 그래프, 공식 등으로 구분하여 <표 Ⅱ-1>과 같이 함수의 번역 과정을 설명하였다. 위의 표에서 측정하기는 상황 · 언어적 설명을 표로 번역하는 것이다. 예를 들면 "한 시간에 60km씩 달리는 자동차의 시간에 따른 거리의 변화"라는 언어적 설명을 1시간이 지나면 60km, 2시간이 지나면 120km, 3시간이 지나면 180km, ... 처럼 독립변수를 시간, 종속변수를 거리로 나타내어 표로 번역하는 것이 측정하기이다. 이처럼 여러 가지 표상들 사이의 번역활동은 수학적 개념의 여러 측면을 경험하게 되어 수학적 사고의 틀을 획득할 수 있으므로 더 깊은 개념적 이해가 가능하게 된다.

라. 표상의 번역능력과 수학적 사고 스타일

인지심리학자들의 의견에 따르면 학습의 성공과 실패는 학생들의 학습능력만이 아니라 사고스타일 일 수 있다고 한다. 사고 스타일이란 "오랜 시간을 통해 형성되어 사고, 학습, 교수와 같은 영역에서 나타나는 습관적인 패턴 또는 선호하는 방법"이라고 할 수 있다(Sternberg, 2001). 이러한 관점에서 수학 학습의 목표는 수학적 사고의 습관(habits) 또는 방식(ways)을 형성하는 것이다. 이러한 습관과 방식은 오랜 시간과 경험을 통해 형성되는 것으로써 자신만의 습관적인 패턴이나 선호하는 방법으로 자리를 잡을 수 있는데 이것이 바로 수학적 사고 스타일이다. 따라서 다양한 표상 간의 번역활동을 통해 수학적 사고의 틀이 획득되는데 이 틀이 수학적 사고 스타일과 밀접한 관련이 있다고 할 수 있다.

이 때 수학적 개념은 내면화(구체적인 대상을 조작하는 방법으로써의 과정)와 대상화(구체적인 대상들의 구조적 방법)가 상호작용하면서 형성된다. 특히 이러한 과정을 통해 형성된 수학적 사고 스타일은 수학적 사고를 할 수 있게 하는 담론을 결정하는 중요한 요인이 될 수 있다

<표 Ⅱ-1> 함수 번역 과정(Janvier, 1987)

~ 에서 \ ~ 로	상황 · 언어적 표현	표	그래프	공식
상황 · 언어적 표현		측정하기	그래프 개형그리기	모델링
표	읽기		점 찍기	공식알아내기
그래프	해석하기	좌표 읽기		곡선 알아내기
공식	변수 인식하기	계산하기	그래프 개형그리기	

(Sfard, 1991). 즉, 학생들의 표상양식에 대한 수학적 사고 스타일은 똑같이 제시된 표상을 내면화와 대상화하는 과정에서 수학적 사고의 틀을 형성하는데 차이를 불러일으킬 수 있으므로 사고 스타일을 고려하여 교수학습을 진행해야 좀 더 효과적인 학습이 가능할 수 있다.

사고 스타일을 고려하여 교수학습을 진행하면 수업의 성취도 측면, 문화적 측면의 다양성과 학습에 대한 개인적인 다양성을 고려할 수 있게 되어 교수학습에 많은 도움을 받을 수 있다 (Zhang & Sternberg, 2001). 따라서 교사는 학생들의 사고 스타일이 각자 다르기 때문에 스타일을 고려한 교수학습을 진행해야 하고 또한 학생들이 다양한 사고 스타일을 형성할 수 있도록 도와야 한다(Ferri & Kaiser, 2003). 이렇게 다양한 표상 간의 번역활동을 통해 획득된 수학적 사고의 틀은 수학적 사고 스타일과 밀접한 관련이 있으므로 이를 통합하는 것이 이 논문의 목적이다.

2. 개념적 틀

본 연구에서 사고 스타일을 시각적 사고 스타일과 대수적 사고 스타일로 나누고 표상활동을 위한 문항개발에서 언어적 요소를 따로 고려하지 않았다. 사고 스타일을 시각적 사고 스타일과 대수적 사고 스타일로 나눈 이유는 Bruner(1960), Ferri와 Kaiser(2003)의 연구에서 그 정당성을 찾을 수 있다. Bruner(1960)는 EIS이론을 주장하면서 표상을 작동적, 영상적, 상징적 표상으로 분류하였는데 특히, 수학학습에서 상대적으로 많이 사용되는 영상적, 상징적 표상을 중심으로 생각해보면 그래프와 표를 중심으로 한 영상적 표상과 대수식을 강조한 상징적 표상으로 분류할 수 있다. 또한 Ferri와 Kaiser(2003)는 수학적 문제해결과정 분석을 통해 수학적 사고 스타일을 해석적 사고 스타일, 시각적 사고 스타일과 개념적 사고 스타일로 구분하였다. 여기서 해석적 사고 스타일은 문제해결 과정에서 대수식을 주로 활용하는 것이라 할 수 있고 시각적 사고 스타일은 그래프와 그림 같은 것을 주로 활용한다고 할 수 있다. Bruner(1960), Ferri와 Kaiser(2003)의 틀을 토대로 표상을 중심으로 시각적 사고 스타일과 대수적 사고 스타일로 분류하였다.

표상에서 언어적 요소를 포함시키지 않은 이유는 수학학습에서 의사소통의 도구를 언어와 시각적인 매개체로 분류한 것에 기인한다. 그리고 언어는 학습과정에서 연속적인 구성요소로 사용되는 반면 표, 그래프, 대수식은 부분적인 구성요소로 사용될 수 있다는 점에서 차이가 있으므로 언어적 요소를 표상의 일부분으로 포함시키지 않았다.

위와 같이 수학적 사고 스타일에 대한 연구의 필요성을 강조하는 표상의 본질, 특수성을 고려한 선행연구의 부족, 사고의 특수성과 사고에서 언어의 중요성을 강조하는 개념적 틀을 토대로 표상과 수학적 사고 스타일을 통합하여 사고 스타일에 따른 문제해결 과정의 특징을 발견하고자 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 방법

가. 연구 대상

연구대상은 전북에 소재한 국립 J대학교 1학년 중 인문과학대학, 사회과학대학, 자연과학대학, 공과대학 각각 60명씩 240명에게 설문 조사를 실시하였다. 그 중에서 무응답 또는 수거되지 않은 검사지를 제외하고 총 202명을 연구대상으로 하였다.

<표 Ⅲ-2> 표상에 대한 문제해결 검사지의 문항구성 및 정당성

문항번호 (단원 전개 순서)	문항내용	문항에 대한 정당성(NCTM, 2000 표상규준)
1	수학적 개념에 대한 의미와 예를 제시	"수학적 아이디어를 조직 · 기록 · 의사소통을 위한 표현과 활용"
2	언어적 설명 제시	"문제 해결을 위한 수학적 표현의 선정, 적용, 변환"
3	표 제시	"물리적 · 사회적 · 수학적 현상의 모델링과 해석을 위한 표현 활용"
4	그래프 제시	
5	대수식 제시	

나. 검사도구 개발과 예비연구

1) 검사도구 개발

검사도구는 <표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>와 <표상에 대한 문제해결 검사지>로 구성된다. <표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>는 김영국 외 7인(2001)의 수학 기피요인의 설정 및 기피성향의 분석 도구 개발, 김영국(2007)의 수학 기피유형의 분류 및 수학 성취 수준과의 상관성 연구, 김영국(2008)의 수학적 표현의 교수학적 의의에서 학생들의 수학 기피 요인들을 유형에 따라 분류한 연구에서 수학적 표현과 관련된 기피요인들을 인용하여 연구자가 연구의 목적에 맞게 재구성하여 문항을 제작하였다. 기피요인을 바탕으로 문항을 구성한 이유는 학생들의 수학에 대한 성향은 수학을 기피하는 이유와 관련이 있을 수 있기 때문이다(김영국, 2008). 그러므로 이러한 성향에 따라 자신의

<표 Ⅲ-1> 표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지의 문항구성

구분	문항 내용	평균 산출
시각적 사고 스타일	1. 수학적 개념을 기억할 때 머릿속에 그림 형태로 그려 놓은 것이 더 쉽다. 2. 수학적 개념이 표, 그래프, 그림으로 쓰여진 것이 더 이해하기 쉽다. 3. 문장을 표, 그래프, 그림으로 바꾸는 것이 더 쉽다. 4. 벤다이어그램, 표, 그래프 등의 용어가 더 익숙하다. 5. 생각한 것을 표, 그래프 그림을 사용해서 나타내는 것이 더 쉽다. 6. 함수를 생각하면 표나 그래프가 가장 먼저 떠오른다. 7. 함수의 표나 그래프를 그리고 활용하는 것이 더 쉽다. 8. 방정식, 부등식을 함수의 표나 그래프에 연결시키는게 더 쉽다. 9. 여러 종류의 함수들을 표나 그래프를 이용해서 표현하는 것이 더 쉽다.	매우 그렇다(2) 그렇다(1) 그저 그렇다(0) 그렇지 않다 (-1) 전혀 그렇지 않다 (-2)
대수적 사고 스타일	10. 수학적 개념을 기억할 때 머릿속에 수식 형태로 놓은 것이 더 쉽다. 11. 수학적 개념이 기호, 문자, 수식으로 쓰여진 것이 더 이해하기 쉽다. 12. 문장을 수식으로 바꾸는 것이 더 쉽다. 13. 미지수, 문자, 등호, 부등호 등의 용어가 더 익숙하다. 14. 생각한 것을 수식을 사용해서 나타내는 것이 더 쉽다. 15. 함수를 생각하면 함수식이 가장 먼저 떠오른다. 16. 함수에서 함수식을 세우고 활용하는 것이 더 쉽다. 17. 방정식, 부등식을 함수식과 연결시키는게 더 쉽다. 18. 여러 종류의 함수들을 함수식을 이용해서 표현하는 것이 더 쉽다.	

사고 스타일을 형성할 수 있다고 할 수 있다. 검사지의 문항구성은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

위의 검사지가 검사 도구로써 신뢰할 수 있는지를 파악하기 위해 문항내적 일관성 신뢰도를 확인한 결과 시각적 사고 스타일 관련 문항의 Cronbach의 알파가 0.872이고 대수적 사고 스타일 관련 문항의 Cronbach의 알파가 0.866으로 신뢰도가 높다고 할 수 있었다(전평국, 박성선, 2009).

그리고 <표상에 대한 문제해결 검사지>는 김인희(2009), 성홍순(2008), 박천수(2010) 등이 고등학생에게 함수번역능력을 조사하기 위한 목적으로 개발한 문항을 인용하여 연구의 목적에 맞게 연구자가 재구성한 것이다. 검사지는 총 5문항으로 구성되어 있는데 검사지의 문항구성 및 각 문항에 대한 정당성은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

각 문항은 연구의 가설과 목적에 맞게 표상의 다양성과 연계성 및 NCTM(2000)의 표상 규준 3가지를 기초로 하여 문항을 구성하였다.

2) 예비연구

개발한 검사 도구의 타당도를 높이고 연구의 위험요인을 최소화 하고자 2번의 예비 연구를 실시하였다. 1차 예비 검사를 통하여 <표상에 대한 수학적 사고 스타일> 검사지 문항을 수정하였다. 최초의 검사지는 수학 교육과정 상에 있는 전반적인 내용이었는데 연구의 목적에 맞게 함수와 관련된 것으로 국한시켰다. 또한 <표상에 대한 문제 해결 검사지>의 3번 문항에 "학생 B는 움직이지 않고 가만히 서있습니다."라는 문구를 추가하여 학생들의 이해를 도와주었다.

그 후 2차 예비검사를 통하여 <표상에 대한 문제 해결 검사지>에서 1번과 5번 문항을 수정하였다. 1번은 함수의 정의 방식이 스타일에 따라 어떻게 다른지를 알고 싶은 문항이었는데 "예를 들어보세요"라는 문장 때문에 학생들이 예를 제시하려는 경향이 강해서 이 문장을 삭제하였다. 그리고 5번 문항은 일차함수 상황으로 제시하여 직관적으로 바로 알 수 있는 내용이므로 학생의 사고 특성 파악에 어려움이 생겨서 이차함수 상황으로 문항을 변경하였다. 그 후 수학교육 전문가 2인의 문항검토를 통하여 문항의 내용과 진술방식을 보완하였다.

2. 자료의 수집과 분석

가. 자료의 수집

자료의 수집은 지필검사를 실시한 후 인터뷰 자료를 수집하였다. 지필검사에 대한 자료 수집은 2012년 9월 3일부터 14일까지 실시하였다. 검사는 각 단과대학(인문대학-55명, 사회대학-46명, 자연대학-50명, 공과대학-51명)회장들의 감독 하에 학생들의 수업이 끝난 후 설문을 실시하고 수거한 것을 연구자가 종합하였다. 그 후 인터뷰를 위해 시각적 사고 스타일 관련 문항(<표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>의 1번에서 9번문항)의 평균 점수(5.21점)와 대수적 사고 스타일 관련 문항(<표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>의 10번에서 18번문항)의 평균 점수(2.99점)를 기준으로 4개의 그룹으로 분류하여 그룹별로 2명씩 무작위로 선택하여 학과 학생회실 또는 강의실에서 약 14분에서 26분 간 실시하였다. 모든 인터뷰 내용을 전사하였는데 학생은 1A와 1B(시각-상, 대수-상), 2A와 2B(시각-상, 대수-하), 3A와 3B(시각-하, 대수-상), 4A와 4B(시각-하, 대수-하), 연구자는 R로 표현하였다. 인터뷰 시 연구자의 개입을 최소화하고 같은 조건과 상황에서 실시될 수 있도록 하기 위해 동일한 전문을 만들었다

나. 자료의 분석

1) 수학적 사고 스타일의 특징 분석

<표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>를 분석하여 시각적 사고 스타일 관련 문항(1-9번)의 전체 평균 점수와 대수적 사고 스타일 관련 문항(10-18번)의 전체 평균 점수를 기준으로 분류된 4개의 그룹에 대해서 시각적 사고 스타일과 대수적 사고 스타일로 구분하기 위하여 SPSS 12.0의 분산분석을 통해 동일집단을 확인하였다. 확인 결과 시각적 사고 스타일 관련 문항인 1-9번까지는 시각(상)-대수(상)과 시각(상)-대수(하)('시각(상)'), 시각(하)-대수(상)과 시각(하)-대수(하)('시각(하)')가 각각 동일 집단이었다. 그리고 대수적 사고 스타일 관련 문항인 10-18번까지는 시각(상)-대수(상)과 시각(하)-대수(상)('대수(상)'), 시각(상)-대수(하)와 시각(하)-대수(하)('대수(하)')가 각각 동일 집단이었다. 확인 후에 수학적 사고 스타일에 대한 특징을 파악하기 위해 1-9번까지의 문항에서 각각의 문항별로 동질집단 간에 평균을 비교하고 10-18번까지의 문항에서도 마찬가지로 각각의 문항별로 동질집단 간에 평균을 비교하는 독립표본 t-검정을 유의 수준 $p < 0.01$에서 실시하였다.

2) 수학적 사고 스타일과 문제해결과정의 특징 분석

수학적 사고 스타일에 따른 문제해결과정의 특징을 분석하기 위하여 검사지에서 반응 수가 많은 것들을 기준으로 우선순위를 정하여 각 문항별 특징에 맞게 틀을 만들어서 분류한 후 SPSS 12.0의 교차분석을 실시하였다. 양적 연구를 실시한 후 분류된 4개의 그룹에서 그룹별로 2명씩 무작위로 선정하여 총 8명에 대해 인터뷰를 실시하여 질문지에서 관찰된 특징을 더 깊이 조사하였다.

Ⅳ. 연구결과 및 분석

1. 수학적 사고 스타일의 특징

가. 시각적 사고 스타일의 특징

시각적 사고 스타일은 <표상에 대한 수학적

<표 Ⅳ-1> 시각적 사고 스타일의 평균과 유의도

분 류		내용	그룹	평균	p
시각적	수학적 개념과 용어	1. 수학적 개념을 기억할 때 머릿 속에 그림 형태로 그려 놓은 것이 더 쉽다.	상	1.09	.000
			하	0.32	
		2. 수학적 개념이 표, 그래프, 그림으로 쓰여진 것이 더 이해하기 쉽다.	상	1.31	.000
			하	0.30	
		4. 벤다이어그램, 표, 그래프 등의 용어가 더 익숙하다.	상	1.02	.000
			하	0.08	
사고	수학적 사고의 변환	3. 문장을 표, 그래프, 그림으로 바꾸는 것이 더 쉽다.	상	1.07	.000
			하	0.12	
		5. 생각한 것을 표, 그래프 그림을 사용해서 나타내는 것이 더 쉽다.	상	1.08	.000
			하	0.15	
스타일	함수	6. 함수를 생각하면 표나 그래프가 가장 먼저 떠오른다.	상	1.05	.000
			하	-0.03	
		7. 함수의 표나 그래프를 그리고 활용하는 것이 더 쉽다.	상	1.12	.000
			하	0.01	
		8. 방정식, 부등식을 함수의 표나 그래프에 연결시키는게 더 쉽다.	상	0.91	.000
			하	-0.38	
		9. 여러 종류의 함수들을 표나 그래프를 이용해서 표현하는 것이 더 쉽다.	상	0.95	.000
			하	-0.22	

사고 스타일 검사지>에서 시각적 사고 스타일 점수가 평균(5.21점)보다 높은 그룹이다. 이들의 특징을 파악하기 위하여 시각적 사고 스타일 관련 문항인 1-9번까지의 각각 문항별로 평균을 비교하여 분석 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

따라서 모든 유의확률이 0.000으로 유의미한 차이가 있었기 때문에 시각적 사고 스타일의 특징으로 할 수 있었다. 즉, 시각적 사고 스타일인 학생들은 수학적 개념을 기억하거나 이해할 때 표, 그래프, 그림으로 쓰여진 것이 더 이해하기 쉽다고 하였고 수학적 용어 중에서 벤다이어그램, 표, 그래프 등의 용어가 익숙하다고 하였다. 그리고 문장이나 생각한 것을 표, 그래프, 그림을 사용해서 나타내는 것이 쉽다고 하였다. 또한 함수를 생각하거나 활용할 때 표나 그래프가 가장 먼저 떠올랐고 방정식, 부등식, 여러 종류의 함수들을 표, 그래프를 이용해서 표현하는 것이 쉽다고 하였다.

나. 대수적 사고 스타일의 특징

대수적 사고 스타일은 <표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>에서 대수적 사고 스타일 점수가 평균(2.99점)보다 높은 그룹이다. 이들의 특징을 파악하기 위하여 대수적 사고 스타일 관련 문항인 10-18번까지의 각각 문항별로 평균을 비교하여 분석 결과는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

따라서 모든 유의확률이 0.000으로 유의미한 차이가 있었기 때문에 대수적 사고 스타일의 특징으로 할 수 있었다. 즉, 대수적 사고 스타일인 학생들은 수학적 개념을 기억하거나 이해할 때 대수식으로 쓰여진 것이 더 이해하기 쉽다고 하였고 수학적 용어 중에서 기호, 문자, 수식 등의 용어가 익숙하다고 하였다. 그리고 문장이나 생각한 것을 대수식을 사용해서 나타내는 것이 쉽다고 하였다. 또한 함수를 생각하거나 활용할 때 함수식이 가장 먼저 떠올랐고 방정식, 부등식,

<표 Ⅳ-2> 대수적 사고 스타일의 평균과 유의도

분류		내용	그룹	평균	p
대수적 사고 스타일	수학적 개념과 용어	10. 수학적 개념을 기억할 때 머릿 속에 수식 형태로 놓은 것이 더 쉽다.	상	0.85	0.000
			하	-0.16	
		11. 수학적 개념이 기호, 문자, 수식으로 쓰여진 것이 더 이해하기 쉽다.	상	0.96	0.000
			하	-0.04	
		13. 미지수, 문자, 등호, 부등호 등의 용어가 더 익숙하다.	상	0.90	0.000
			하	0.02	
	수학적 사고의 변환	12. 문장을 수식으로 바꾸는 것이 더 쉽다.	상	0.97	0.000
			하	-0.10	
		14. 생각한 것을 수식을 사용해서 나타내는 것이 더 쉽다.	상	0.77	0.000
			하	-0.21	
	함수	15. 함수를 생각하면 함수식이 가장 먼저 떠오른다.	상	0.72	0.000
			하	-0.30	
		16. 함수에서 함수식을 세우고 활용하는 것이 더 쉽다.	상	0.81	0.000
			하	-0.25	
		17. 방정식, 부등식을 함수식과 연결시키는게 더 쉽다.	상	0.63	0.000
			하	-0.34	
		18. 여러 종류의 함수들을 함수식을 이용해서 표현하는 것이 더 쉽다.	상	0.70	0.000
			하	-0.40	

여러 종류의 함수들을 함수식을 이용해서 표현하는 것이 쉽다고 하였다.

2. 수학적 사고 스타일에 따른 문제해결 과정의 특징

가. 수학적 사고 스타일과 수학적 개념 정의 방법

수학적 사고 스타일에 따라 함수의 개념 정의 방법을 알아보기 위해 1번 문항을 분석하였다. 함수의 개념을 정의하는 방법을 Slavit(1997)의 분류에 의해 대응적 관점과 공변적 관점으로 분류할 수 있는데 이러한 예는 [그림 Ⅳ-1]과 같다.

구 분	대표적인 예
대응적 관점	미지수간에 관계를 나타낸식
공변적 관점	두 변수 x,y 에서 x가 변함에 따라 y값이 변하는 것

[그림 Ⅳ-1] 1번 문항 분류 기준의 예

[그림 Ⅳ-1]을 기준으로 검사지를 분류한 결과 시각(상)인 그룹과 시각(하)인 그룹에서 <표 Ⅳ-3>과 같이 통계적으로 유의미한 차이가 발생하였다.

<표 Ⅳ-3>의 결과를 보면 χ^2의 값은 9.121이고 유의 확률은 0.003이므로 수학적 사고 스타일에 따라 함수 개념 정의의 방법에는 유의미한 차이가 있었다. 즉, 시각(상)인 그룹의 학생들이 시각(하)인 그룹의 학생들보다 함수를 공변적 관점으로 정의하는 경향이 있었고, 시각(하)인 그룹의 학생들은 시각(상)인 그룹의 학생들보다 함수를 대응적 관점으로 정의하려는 경향이 있었다. 이러한 결과에 대해 좀 더 깊이 있는 분석을 하기 위해 인터뷰에서 나타난 특징을 살펴본 결과는 다음과 같다.

<u>발췌문 1 : 시각(상) - 공변적 관점과 대응적 관점의 공존 가능성</u>

1 1B : 어차피 x가 변하면 y가 거기에 따라 계속적으로 변하니까 그걸 함수라고...

2 1A : ...정의역이 정해진 x의 값에 따라서 y값들이 변하게 된다 를 규칙화 한 게...

3 1A : 어.. x의 값 하나에 y 값이 2개가 대응되면 안 되는 조건들...

4 1B : ...y=f(x)이런 식으로... 아니면 다른 변수로 해서 둘이 연결된 y랑 x가 있으면 둘 사이에 t에 관한 그게 있는데 그게 t로써 연결이 된다든지...

시각(상)인 그룹의 학생들은 조사연구의 결과처럼 함수를 공변적 관점으로 정의(1열과 2열)하였지만 함수가 되기 위한 조건으로 대응 조건(3열)을 알고 있는 것으로 볼 때 함수 개념의 공변적 관점과 대응적 관점을 함께 가지고 있을 수도 있다.

<표 Ⅳ-3> 1번 문항 분석 결과

분 류 / 사고 스타일	대응적 관점	공변적 관점	χ^2-검정 자유도	검정값	유의확률
시각(상) (101명)	41.3%	29.4%	1	9.121	0.003^{**}
시각(하) (101명)	61.3%	14.0%			

$^{**}p < 0.01$

<표 Ⅳ-4> 2번과 5번 문항 분석 결과

문항 구분	사고 스타일 \ 접근 방법	산술적 접근	대수적 접근	χ^2-검정		
				자유도	검정값	유의확률
2 번 문항	대수(상) (106명)	38.7%	39.6%	1	9.218	0.003^{**}
	대수(하) (96명)	62.5%	24.0%			
5 번 문항	대수(상) (106명)	11.3%	73.6%	1	4.200	0.040^{*}
	대수(하) (96명)	13.5%	57.2%			

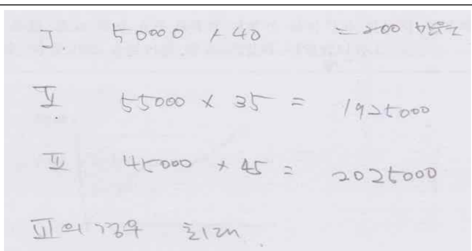
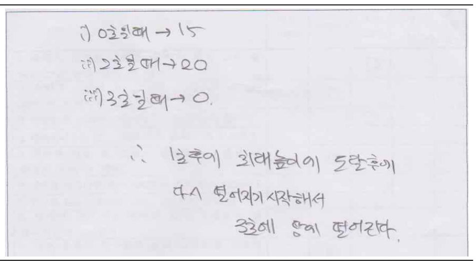
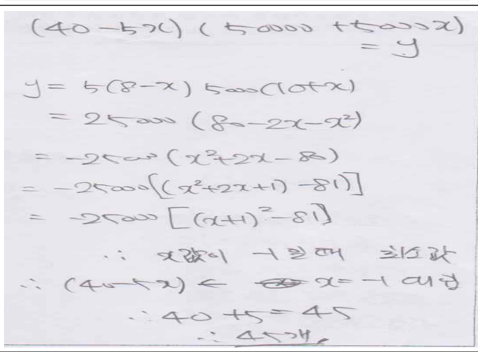
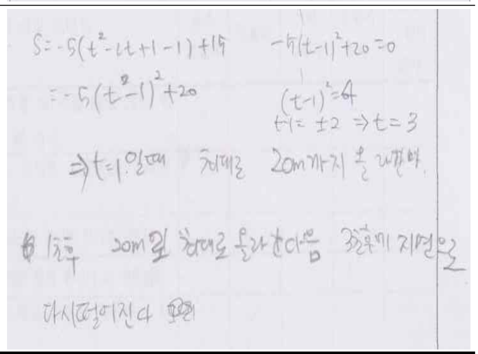
$^{*}p < 0.05$, $^{**}p < 0.01$

발췌문 2 : 시각(하) - 대응의 관점으로 정의

1 3B : 나는 함수가 어떠한 문제를 푼다는 것에 있어서 그 문제의 연관성을 찾아서 수식으로 나타내는 것이라고 했거든. f(x)=y, y=x 라고 이런 식으로...

2 3A : ...그림으로 x, y(다이어그램을 손으로 허공에 그린다.)이렇게.

시각(하)인 그룹의 학생들은 조사연구의 결과처럼 함수를 수식의 관계(1열)로 정의하였고 다이어그램을 통해 원소가 하나씩 대응되는 그림을 허공에 그린 것(2열)으로 볼 때 이들은 대응적 관점에서 함수를 정의하는 경향이 있다고 할 수 있다.

구 분	대표적인 예	
	2번 문항	5번문항
산술적 접근		
대수적 접근		

[그림 Ⅳ-2] 2번과 5번 문항 분류 기준의 예

나. 수학적 사고 스타일과 문제접근과정

수학적 사고 스타일에 따른 문제접근과정의 특징을 파악하기 위해 2번과 5번 문항을 분석하였다. 2번 문항은 CD가격과 판매개수의 관계가 3가지 조건으로 주어진 상태에서 하루의 판매이익을 최대로 하려면 몇 개를 팔아야 하는지를 구하는 문제이고, 5번 문항은 시간에 따른 공의 위치 변화가 대수적 표상인 대수식으로 주어진 문항이다. 이 문항의 풀이 과정을 분석한 결과 산술적 접근과 대수적 접근으로 구분할 수 있었다. 이러한 분류 기준은 [그림 Ⅳ-2]와 같다.

[그림 Ⅳ-2]을 기준으로 대수(상)인 그룹과 대수(하)인 그룹을 분류한 결과 <표 Ⅳ-4>와 같이 통계적으로 유의미한 차이가 발생하였다.

<표 Ⅳ-4>의 결과를 보면 두 문항 모두 유의확률이 0.003, 0.040이므로 수학적 사고 스타일에 따라 문제접근방법에는 유의미한 차이가 있다고 할 수 있다. 즉, 대수(상)인 그룹의 학생들이 대수(하)인 그룹의 학생들보다 문제를 대수적으로 접근하였다. 특히 2번 문항에서 대수(하)인 그룹의 학생들이 대수(상)인 그룹의 학생들보다 문제를 산술적으로 접근하는 경향이 있었고 5번 문항에서는 대부분의 학생이 대수적으로 문제를 접근하였다. 이러한 결과에 대해 좀 더 깊이 있는 분석을 하기 위해 인터뷰에서 나타난 특징을 살펴본 결과는 다음과 같다.<표 Ⅳ-4> 2번과 5번 문항 분석 결과

<u>발췌문 3 : 대수(상) - 미분(대수적)으로 접근(2번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 1B : 거기서 접선이 아니 기울기가 0인 점이 최대가 될 때 이런 판매이익이 최대가 될 테니까 인제 미분해가지고...

2 1A : ...미분 기울기 값이 0이 되는 값이 최소 아니면 최대일 텐데...

<u>발췌문 4 : 대수(상) - 미분(대수적)으로 접근 가능성(5번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 1B : 미분하면 될 거 같아가지고..

2 1A : ...최고 높이를 구하려고 했는데 그것 역시 2차함수의 미분...

2번과 5번 문항에서 대수(상)인 그룹의 학생들은 조사연구의 결과처럼 대수적으로 접근(발췌문 3, 4의 1, 2열)하였다. 하지만 그들이 두 문항 모두에서 미분을 이용하여 문제를 접근하는 것에서 볼 때 대수적인 방법 중에서도 발전된 해결방법으로 문제에 접근할 수도 있다.

<u>발췌문 5 : 대수(하) - 산술적 접근(2번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 4B : ... x, y이렇게 식을 놓고 풀고 싶었는데 잘 안 되는 거야.

2 4A : (고개를 끄덕인다.)

3 4B : 그래서 몇 번 해보면 되겠다 싶어서 그냥 식으로 해서

4 4A : (4B 상대방의 풀이를 보면서) 표로 만들어서

5 4B : 어. 표로..표로 너도 그랬지?

<u>발췌문 6 : 대수(하) - 산술적 접근, 대수적 접근(5번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 4A : 그니까 나는 t에다가 0부터

2 4B : 응(고개를 끄덕인다.)

3 4A : 대입을 했는데 그러면 높이가 0초일 때 15미터가 되고...

4 4B : ...그래서 그냥 -5로 묶어서. 그니까 최고 꼭짓점을 찾으려고 이렇게 했어. 왜냐면 최고 꼭짓점일 때 이(풀이 과정을 가리키며) 초일 때 최고 높은 위치가...

5 4B : ...왜 그랬냐면 이런 그림을 그리지 않고서는 문제가 이해가 되질 않았어요.

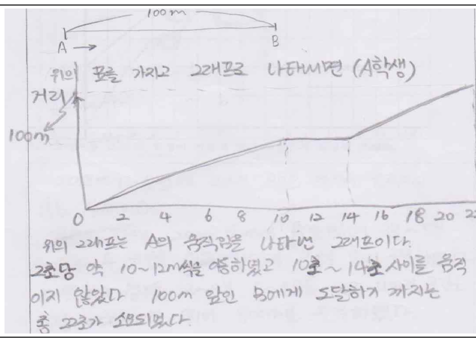
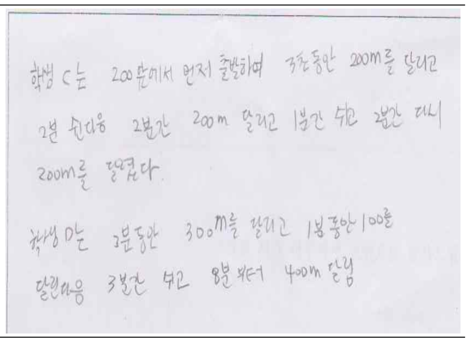
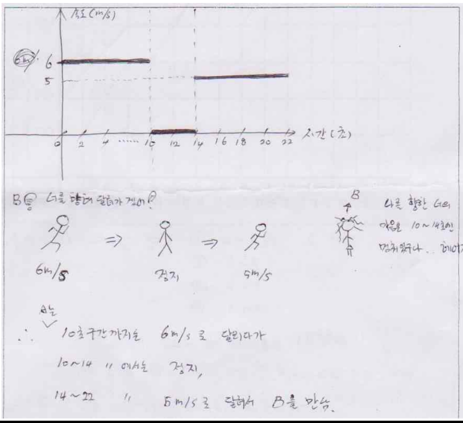
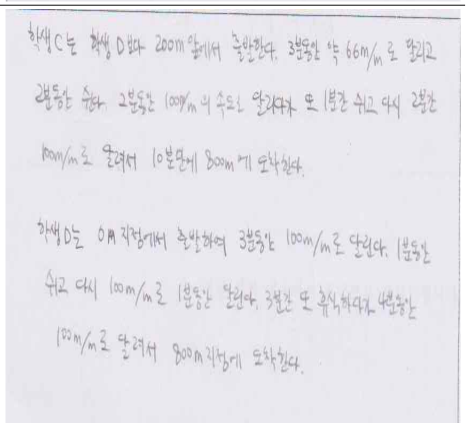
두 문항 모두 조사연구에서처럼 대부분 산술적(발췌문 5의 3-5열, 발췌문 6의 1-3열)으로 문제를 접근하였다. 따라서 그들은 대수적 접근 방법을 알지 못할 수도 있다.

다. 수학적 사고 스타일과 번역능력

수학적 사고 스타일에 따른 번역능력의 특징을 파악하기 위해 3번과 4번 문항을 분석하였다. 3번 문항은 학생 B가 가만히 서있고 B로부터 100미터 떨어진 곳에서 학생 A가 B에게 달려가는 상황으로 시간에 따른 거리의 변화를 시각적 표상인 표가 주어진 문제이고, 4번 문항은 학생 C와 D가 800미터 달리기 시합을 하는 상황으로 시간에 따른 거리의 변화를 시각적 표상인 그래프로 주어진 문제이다.

이 문항의 해석 과정을 분석한 결과 ‘시간에 따른 거리의 변화’의 관점과 ‘시간에 따른 속도의 변화’의 관점으로 나눌 수 있었다. ‘시간에 따른 거리의 변화’로 해석한 것은 어떤 한 점에 초점을 맞추어서 값을 도출하는 과정이므로 직설적 접근이라고 할 수 있고, ‘시간에 따른 속도의 변화’는 직설적 접근에서 사고가 한 단계 더 발전된 상태이므로 ‘파생적 접근’으로 볼 수 있다. 이러한 분류 기준을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 적용할 수 있었다.

[그림 Ⅳ-3]를 기준으로 시각(상)인 그룹과 시각(하)인 그룹을 분류한 결과 <표 Ⅳ-5>과 같이

구 분	대표적인 예	
	3번 문항	4번 문항
직설적 접근		
파생적 접근		

[그림 Ⅳ-3] 3번과 4번 문항 분류 기준의 예

통계적으로 유의미한 차이가 발생하였다.

<표 Ⅳ-5>의 결과를 보면 두 문항 모두 유의확률이 0.001, 0.002이므로 수학적 사고 스타일에 따라 '시간-거리 관계'로 제시된 문제를 파생적 접근으로 해석하는 것에서 유의미한 차이가 있었다. 즉, 대부분의 학생이 파생적 접근 방법으로 상황을 해석하였지만 시각(상)인 그룹의 학생들이 시각(하)인 그룹의 학생들보다 파생적 접근 방법으로 상황을 해석하였다. 이러한 경향에 대해 좀 더 깊이 있는 분석을 하기 위해 인터뷰에서 나타난 특징을 살펴본 결과는 다음과 같다.

<u>발췌문 7 : 시각(상) : 스스로 그래프를 그려서 상황 해석(3번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 2B : ...그래프로 그렸더니 이렇게 나왔어요. (자신이 그린 s-t그래프를 가리키며)...
2 2A : (고개를 끄덕인다.)
3 2B : 0초부터 시간이 y니까 0에서 10초까지는 6m/s로 달리고 10초부터 14초 동안은 60미터 거리에서 가만히 있다가 14초에서 22초 그니까 8초 동안은 5m/s로 달려서 B에 도착한다고 했어요...
4 2A : 그래서 그래프(v-t)를 그리면 이렇게 나오고요. 그래서 A는 어..10초까지는 6m/s로 달려가다가 10초부터 14초는 속력이 0이면 움직이지 않는다는 거니까...

<u>발췌문 8 : 시각 (상) - 파생적 접근 방법(4번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 2A : ...5분에서 7분의 기울기가 100이니까 100m/m으로 달리다가 또 7-8분 멈췄다가...
2 2B :...3분 동안 1분에 약 66m의 속도로 달리고 그리고 400미터 지점에서 2분 동안 쉬어요...

두 문항 모두 조사연구의 결과처럼 파생적 접근 방법(발췌문 7의 3열과 4열, 발췌문 8의 1열과 2열)으로 해석하였다. 특히, 3번 문항에서 상황을 설명할 때 스스로 그래프(발췌문 7의 4열)를 그려서 설명하는 것으로 볼 때 어떠한 제시어가 없어도 표를 그래프로 번역하여 해석할 수도 있다.

<u>발췌문 9 : 시각(하) : 파생적 접근 방법(3번 문항 인터뷰 내용)</u>

1 4B : ...예를 들어 C는 3초까지는 $\frac{200}{3}$ m/s의 속력으로 달렸고...
2 4A : 근데 나도 기울기를 속력으로 놓고 했는데...

<표 Ⅳ-5> 3번과 4번 문항 분석 결과

문항 구분	해석 방법 / 사고 스타일	직설적 접근	파생적 접근	χ^2-검정 자유도	검정값	유의확률
3 번 문항	시각(상) (101명)	12.8%	81.7%	1	10.220	0.001^{**}
	시각(하) (101명)	26.9%	52.7%			
4 번 문항	시각(상) (101명)	21.1%	70.6%	1	9.686	0.002^{*}
	시각(하) (101명)	32.3%	37.6%			

$^{**}p < 0.01$

발췌문 10 : 시각 (하) - 다양하지 않은 해석(4번 문항 인터뷰 내용)

1 3B : $\frac{200}{3}$ m/m 속도로 등속도로 달린 거고 그 다음에 3-5초 사이에서는 쉬었다가 다시 5-7초까지는...

2 3B : ...또 400-600미터를 갔는데 2분 동안 달렸으니까 200미터 아니.. 100m/m의 속도로 달려갔다가 600미터 지점에서 1분동안...

3 R : ...다른 표현 방법이나 해결 방법이 있나요?

4 3B : 딱히 생각 나진 않아요...

두 문항 모두 조사연구의 결과처럼 파생적 접근 방법(발췌문 9, 10의 1열과 2열)으로 해석을 하였다. 특히 4번 문항은 시각(상)인 학생들과 달리, 연구자가 다양한 표현 방법(발췌문 10의 3열)을 요구하는 질문에서 다른 표현 방법은 떠오르지 않는다고 답하였다(발췌문 10의 4열). 이러한 내용을 토대로 미루어 볼 때 시각(하)인 학생들은 그래프가 주어진 경우 다양한 표상을 활용하지 못 할 수도 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 시각적 사고 스타일과 대수적 사고 스타일의 특징을 파악하고, 이러한 스타일과 문제해결과정의 특징이 어떠한 차이가 있는지를 알아보는 것이었다. 본 연구를 통해서 얻은 결과는 다음과 같다.

첫째, <표상에 대한 수학적 사고 스타일 검사지>를 통해 시각적 사고 스타일과 대수적 사고 스타일로 구분하였는데 시각(상)-시각(하)와 대수(상)-대수(하)가 각각 모든 문항에서 유의미한 차이가 있었다. 따라서 그러한 문항들을 사고 스타일의 특징으로 제시할 수 있었다. 즉, 시각적 사고 스타일인 학생들은 수학적 개념을 기억하거나 사고를 변환할 때 대수식보다는 표나 그래프에 익숙하다고 답하였고, 이에 반해 대수적 사고 스타일인 학생들은 표나 그래프보다 대수식에 익숙하다고 답하였다.

둘째, <표상에 대한 문제해결 검사지>의 1번 문항에서 시각(상)과 시각(하)를 비교 했을 때 함수를 두 변수의 변화관계로 정의하는 것에서 유의미한 차이가 있었다. 따라서 시각적 사고 스타일인 학생들은 함수를 공변적 관점으로 정의하는 경향이 있었다.

셋째, <표상에 대한 문제해결 검사지>의 3번과 4번 문항에서 시각(상)과 시각(하)를 비교 했을 때 '시간-거리 관계'가 주어진 표와 그래프를 구간별 속도로 해석하는 방법에서 유의미한 차이가 있었다. 따라서 시각적 사고 스타일인 학생들은 시각적 표상으로 제시된 문제를 파생적 접근으로 변환하여 해석하는 경향이 있었다.

넷째, <표상에 대한 문제해결 검사지>의 2번과 5번 문항에서 대수(상)과 대수(하)를 비교 했을 때 문제를 대수적으로 접근하는 것에서 유의미한 차이가 있었다. 따라서 대수적 사고 스타일인 학생들은 언어적 표현이나 대수식이 주어진 경우 문제를 대수적으로 접근하는 경향이 있었다.

이러한 결론을 바탕으로 표상에 대한 수학적 사고 스타일의 중요성을 두 가지 측면에서 논의해 볼 수 있다. 첫째, 수학적 사고 스타일을 고려한 다양한 표상의 활용이 중요하다. Dienes는 학생의 개인차를 고려한 수학학습을 강조하면서 지각적 다양성의 원리와 수학적 다양성의 원리를 주장하였다(Dienes, 1960). 특히 지각적 다양성의 원리를 주장한 이유는 학생마다 개인차가 존재하기 때문에 어느 한 가지의 표상으로만 학생을 교육하는 것은 한계가 있을 수 있다는 것이다. 따라서 Dienes의 주장처럼 개인차를 존중하면서 다양한 표상을 제공하려면 수학적 사고

스타일을 고려해야 한다.

둘째, 수학적 사고 스타일을 고려한 표상 간의 번역활동이 제공되어야 한다. 지금까지의 연구는 번역활동을 하면 문제해결능력 향상에 도움을 받을 수 있으므로 표상 간의 번역활동만을 강조하였다. 그러나 학생들의 사고 스타일을 고려한 번역활동은 번역능력을 효과적으로 확장시킬 수 있고, 이렇게 향상된 번역능력은 학습에서 수학의 개념적 이해를 깊게 할 수 있기 때문에 수학적 사고 스타일에서도 특히,시각적 사고 스타일을 고려한 표상 간의 번역활동이 제공되어야 한다.

따라서 지금까지의 연구에서는 표상의 다양성과 번역능력이 강조되어 왔지만 본 연구의 여러 가지 결론들에서처럼 수학적 사고 스타일이 중요한 요소로서 고려되어져야 한다.

본 연구는 학습, 교수, 교육과정, 그리고 연구 측면에서 중요한 시사점들을 줄 수 있을 것이다. 첫째, 수학 학습에 있어 이전 연구에서 고려한 표상활동에 대한 보편적인 특징뿐만 아니라 본 연구에서 고려한 수학적 사고 스타일에 따른 개인적 특징을 바탕으로 학습과정에서 보편성과 특수성의 상호보완적 역할의 중요성에 대해서 의미를 부여할 수 있을 것이다. 둘째, 교수 측면에서 교사는 연구결과를 바탕으로 학습과정에서 개인의 특수성의 중요한 역할을 인식할 뿐 아니라 다양한 표상활동에서 어떻게 표상을 활용해야 하는지에 대한 교육학적 아이디어를 획득할 수 있을 것이다. 예를 들면 시각적 사고 스타일인 학생들에게는 시각적 표상에서 대수적 표상으로 학습을 할 수 있도록 하고 대수적 사고 스타일인 학생들에게는 대수적 표상에서 시각적 표상으로 학습을 할 수 있도록 하는 등 교과서의 내용 제시 순서를 다양화시킬 필요가 있다. 셋째, 교육과정 및 교육정책적인 측면에서 현재의 교육과정과 교육정책은 개인의 특성을 고려하지 못하여 교수학습에서 의사소통과정에 장애가 발생했을 때 해결방법이 제한될 수 있었다. 하지만 사고 스타일에 따른 그룹들의 특성을 바탕으로 하는 본 연구의 결과들은 교사용 지도서와 같은 교육과정 개발 및 교육정책 시행에 도움을 줄 수 있을 것이다. 마지막으로, 연구적 측면에서는 학습과 교수에 있어서 특수성들을 고려한 더 많은 연구의 필요성을 제시해 줄 수 있다.

참고문헌

김영국 · 박기양 · 박규홍 · 박혜숙 · 박윤범 · 유현주 · 권오한 · 이선아(2001). 수학 기피요인의 설정 및 기피성향의 분석도구 개발. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 40**(2), 217-239.

김영국(2007). 수학 기피유형의 분류 및 수학 성취 수준과의 상관성 연구. **대한수학교육학회지 수학교육연구, 17**(1), 33-50.

김영국(2008). 수학적 표현의 교수학적 의의. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 47**(2), 155-168.

김인희(2009). **고등학교 2학년 학생들의 함수적 상황 번역 능력.** 교육학 석사학위논문. 한국교원대학교.

박천수(2010). **고등학교 2학년 학생들의 함수적 상황과 그래프 사이의 번역능력 실태조사.** 교육학 석사학위논문. 한국교원대학교.

성홍순(2008). **함수의 표현에서의 번역활동에 대한 지도 방안.** 교육학 석사학위논문. 서강대학교.

송정화 · 권오남(2002). 6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안. **학교 수학, 4**(2), 161-192.

유희찬 외 13인(2010). **미적분과 통계 기본.** 서울 : ㈜ 미래엔.

이종희 · 김부미 · 김성준(2004). 일차함수 활용문

제의 해결을 위한 강의식, 모델링, 과제기반 표현변환 학습의 교수학적 효과 분석. **수학교육학연구, 14**(1), 39-69.

이찬주 · 박범석(2005). 교수-학습과정의 기호학적 탐구. **한국교육문제연구, 16**, 85～97.

전평국 · 박성선(2009). **수학교육연구방법 이론과 실제.** 서울: 교우사.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* New York: Vintage.

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*, London, UK: Hutchinson Educational Ltd. Ferri, R. B., & Kaiser, G. (2003). First results of a study of different mathematical thinking styles of schoolchildren. In L. Burton (Ed.), Which way social justice in mathematics education? (pp. 209-239). New York: Praeger.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio(Eds), *The roles of representation in school mathematics*: 2001 Yearbook(pp. 173-185), Reston, VA: NCTM.

Gerald, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio(Eds), *The roles of representation in school mathematics*: 2001 Yearbook(pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Meyer, M. R. (2001). Representation in realistic mathematics education. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio(Eds), *The roles of representation in school mathematics*: 2001 Yearbook(pp.238-250), Reston, VA: NCTM.

National Coucil of Teachers of Mathematics(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준** (류희찬 외 5인 공역). 서울 : 경문사.(영어 원작은 2000년 출판).

National Coucil of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking: *Cognitive development in social context.* New York: Oxford University Press.

Saussure(2007). **일반언어학 노트.** (김현균 · 최용호, 역). 고양: 인간사랑.(영어 원작은 1996년 출판).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conception: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22.* 1-36.

Slavit. D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics 33.* 259-281.

Sternberg, R. (2001). Preface. R. Sternberg & L. Zhang (Eds.), *Perspectives on thinking, learning and cognitive styles* (pp. ⅶ-ⅹ). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sternberg, R. & Grigorenko, E. (2001). A capsule history of theory and research on styles. In R. Sternberg & L. Zhang (Eds.), *Perspectives on thinking, learning and cognitive styles* (pp. 1-21). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language.* Cambridge, M. A. : MIT Press.

Zhang, L. & Sternberg, R. (2001). Thinking styles across cultures: Their relationships with students' learning. In R. Sternberg & L. Zhang(Eds.), *Perspectives on thinking, larning and cognitive styles* (pp. 197-226). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Analysis on Characteristics of University Students' Problem Solving Processes Based on Mathematical Thinking Styles

Choi, Sang Ho (Graduate School, Korea University)
Kim, Dong Joong (Korea University)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to investigate characteristics of students' problem solving processes based on their mathematical thinking styles and thus to provide implications for teachers regarding how to employ multiple representations. In order to analyze these characteristics, 202 university freshmen were recruited for a paper-and-pencil survey. The participants were divided into four groups on a mathematical-thinking-style basis. There were two students in each group with a total of eight students being interviewed. Results show that mathematical thinking styles are related to defining a mathematical concept, problem solving in relation to representation, and translating between mathematical representations. These results imply methods of utilizing multiple representations in learning and teaching mathematics by embodying Dienes' perceptual variability principle.

* key Words : mathematical thinking style(수학적 사고 스타일), visual thinking style(시각적 사고 스타일), algebraic thinking style(대수적 사고 스타일), representation(표상)

논문접수 : 2013. 3. 28
논문수정 : 2013. 4. 25
심사완료 : 2013. 5. 20

<부록 1> (표상에 대한 문제해결 검사지)

1. 함수는 무엇을 의미합니까?

2. 어느 게임 CD 판매업체에서는 새로 개발한 게임에 대한 시장조사를 실시하여 다음과 같은 결과를 얻었습니다(김인희, 2009).

Ⅰ. 가격을 5만원으로 하면 하루에 40개를 판매할 수 있다.
Ⅱ. 가격을 5천원 올릴 때마다 하루 판매량이 5개씩 줄어든다.
Ⅲ. 가격을 5천원 내릴 때마다 하루 판매량이 5개씩 늘어난다.

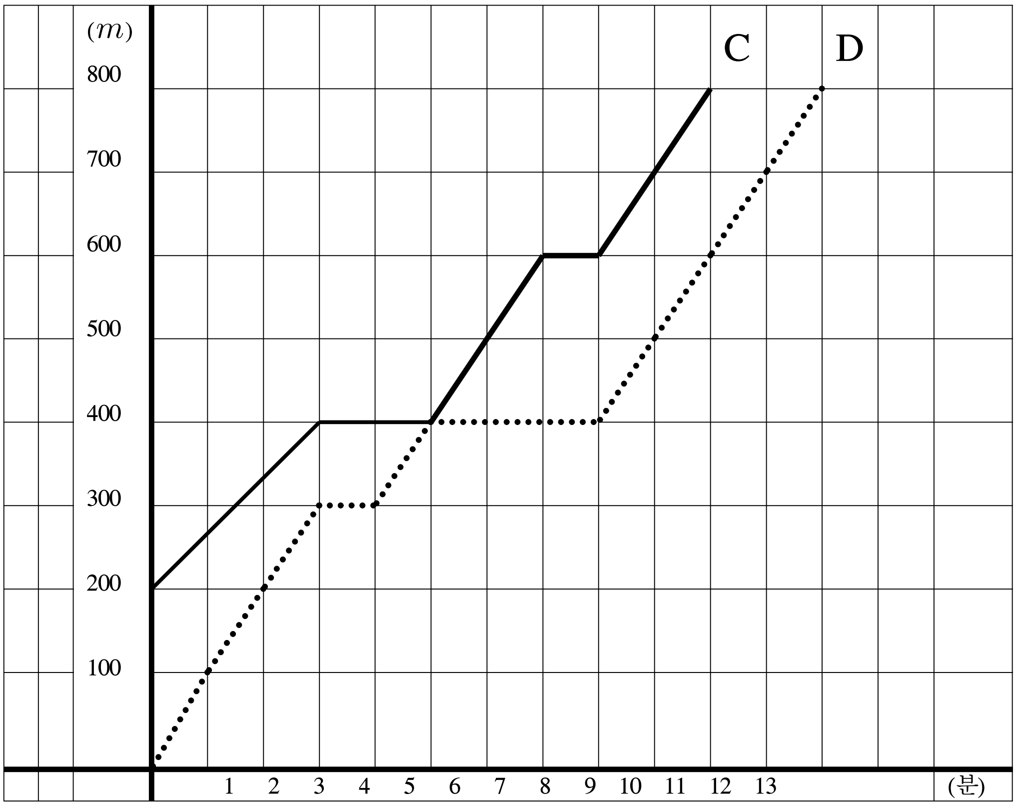
위의 상황을 보고 하루 판매 이익을 최대로 할 때의 판매개수를 구해 보세요.

3. 학생 A는 100m 앞에 있는 학생 B를 향해 달리려고 하는데 시간에 따라 학생 A와 B 사이의 거리를 표현해 보았더니 아래의 표와 같았습니다(성홍순, 2008).

시간 (초)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
거리 (m)	100	88	76	64	52	40	40	40	30	20	10	0

위의 표를 보고 학생 A가 B에게 어떻게 달려가고 있는지 설명해보세요.
(단, 학생 B는 움직이지 않고 가만히 서있습니다.).

4. 다음은 학생 C와 D가 800m 달리기 시합을 하는 그래프입니다. (박천수, 2010).



위의 그래프를 보고 두 학생이 어떻게 달리고 있는지 설명해 보세요.

5. 지상으로부터 15m의 높이에서 처음속도 10m/s의 속도로 똑바로 위로 던진 공의 t초 후의 높이를 s m라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$s = 15 + 10t - 5t^2$$

이 식을 보고 공이 어떻게 운동하고 있는지 설명하시오(유희찬 외 13인, 2010).