대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 23 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 23, No. 2, 95 ~ 116. May 2013

수학적 모델링 과정에서 수학화의 기호학적 분석

박 진 형[*] · 이 경 화[**]

수학적 모델링에 대한 정의와 관점은 단일하지 않다. 그러나 실세계 현상을 수학적으로 이해하여 표현하고, 모델을 세워 문제를 해결하며, 다시 실세계 현상에 대한 재해석을 통해 실세계 그리고 관련된 수학적 모델에 대한 심층적인 이해를 꾀하는 활동에 대한 강조는 수학적 모델링에 대한 여러 관점에서 공통적으로 추구하는 바이다. 이 연구는 수학적 모델링 활동에 대한 앞서 제시한 공통적인 특징을 준수할 때, 수학화가 어떻게 일어나는지, 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인하는 것에 목표를 둔다. 연구 결과, 학생들은 수학적 모델링 과정에서의 수학화 활동에서 다양한 표상체를 구축하고 이를 실세계 현상의 관계적인 측면과 맥락에 비추어 해석하면서 현상을 재조직한다는 점을 확인할 수 있었으며, 이는 학생들의 의사소통 과정에 드러난 표상체의 기능 변화를 통하여 확인할 수 있었다. 또한 표상체가 적절하지 않은 단서를 제공할 수 있다는 점은 수학화를 어렵게 하는 요인으로 드러났다.

Ⅰ. 들어가는 글

수학적 모델링 활동에 대한 정의나 관점은 단일하지 않으나, 실세계 현상을 수학적으로 이해하여 표현하고, 모델을 세워 문제를 해결하며, 다시 실세계 현상에 대한 재해석을 통해 실세계 그리고 관련된 수학적 모델에 대한 심층적인 이해를 꾀하는 활동에 대한 강조는 수학적 모델링에 대한 여러 관점에서 공통적으로 추구하는 바이다(Blum & Niss, 1991; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Kaiser & Sriraman, 2006; Lesh & Caylor, 2007).

이러한 수학적 모델링은 대안적인 수학 교수학습 방안으로 논의되고 있다(English & Sriraman, 2010; Gravemeijer & Stephan, 2002). 여러 선행연구들은 수학적 모델링 활동이 학생들에게 수학화(mathematizing) 경험을 제공한다는 점을 강조해왔다(English & Watters, 2004; Lesh & Doerr, 2003). 이에 수학적 모델링은 실세계 현상으로부터의 수학화를 통하여 학생들에게 수학적 사고, 수학적 탐구를 경험하게 할 수 있는 한 방안으로 논의되고 있다(Blum & Borromeo Ferri, 2009; Gravemeijer & Stephan 2002).

수학적 모델링 과정에서 수학화는 학생들에게 가장 어려운 과정임이 알려져 있다(Blomhøj & Jensen, 2007; Galbraith & Stillman, 2006). 여러 연구자들은 학생들의 수학적 모델링 활동을 모델화함으로써, 학생들의 수학적 모델링 활동을 심층적으로 이해하려고 시도하였으나, 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 왜 수학화는 학생들에게 어려운지에 대한 실증적인 논의는 부족한 실정이다(Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2006; Niss, 2010). 이에 본

* 서울대학교 대학원, demxas0@snu.ac.kr (제 1저자)
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr (교신저자)

연구에서는 학생들의 수학적 모델링 활동을 분석하여, 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인함으로써, 수학적 모델링을 수학 교수 학습에 접목시킬 방안을 모색하기 위한 연구의 토대를 마련하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

이 장의 목적은 크게 두 가지이다. 우선, 수학적 모델링 과정에 포함된 수학화의 의미에 대한 논의를 되짚어 봄으로써, 본 연구에서 논의하고자 하는 수학화의 의미를 분명히 하는 것이다.

또한, 이 장에서는 학생들의 수학화를 심층적으로 분석하기 위한 렌즈로서 지식 체계의 성장과 발달에 대한 Peirce의 기호학적 관점을 도입한다. 기호학적 관점은 학생들의 수학적 탐구를 심층적으로 분석하는 데 있어서 훌륭한 렌즈를 제공할 수 있다는 주장이 제기되어 왔다(Presmeg, 2005, 2006). 이에 본 연구에서는 수학적 모델링 활동에서 학생들은 어떻게 수학화를 이루어내는지를 Peirce의 기호학적 관점을 토대로 분석한다.

1. 수학적 모델링 과정에 포함된 수학화

Freudenthal(1991)에 의하면, 수학화는 "현실이 수학을 포함하는 다양한 영향을 받으며 변화하고, 확장되고, 깊어지는 한 계속되는 과정(p. 30)"이다. 그는 수학화라는 용어의 기원이 공리화, 형식화, 도식화와 같은 용어들임을 지적하며, 수학화라는 용어가 현상에 대한 수학자들의 조직화 활동 전체를 포함해야 한다는 점을 강조하였다(Freudenthal, 1991, p. 31).

수학적 모델링의 교육적인 시사점을 다룬 여러 연구들은 수학적 모델링의 과정이 수학화를 포함한다는 점을 지적하고 있다(Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Leiß, 2006; Galbraith & Stillman, 2006). 수학적 모델링은 실세계 현상을 수학적으로 이해하여 표현하고, 모델을 세워 문제를 해결하며, 다시 실세계 현상에 대한 재해석을 통해 실세계 그리고 관련된 수학적 모델에 대한 심층적인 이해를 꾀하는 과정을 포괄하는 바, 이는 실세계 현상을 조직화하는 수학화를 포함한다(Blum & Niss, 1991; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Leiß, 2007). 수학적 모델링에서 실세계 현상의 수학화는 단 한 번의 시도로 이루어진다기보다는, 실세계 현상에 대한 재해석을 통한 수정과 개선의 과정을 필요로 한다는 점이 알려져 있다(Blum & Borromeo Ferri, 2006; Maaß, 2006). 실세계 현상을 수학화하기 위해서는 실세계 현상에서 의미 있는 값들과 이들 사이의 관계를 단순화하고, 이를 기술하기에 적합한 수학적 표기(notation)를 선택하고 시각적으로 표현할 수 있어야 한다(Maaß, 2006). 뿐만 아니라, 학생들은 제시된 현상과 관련된 수학적 지식을 수학화에 적용할 수 있어야 한다(Niss, 2010).

선행 연구들에 의하면, 수학적 모델링 활동에서 수학화는 학생들에게 가장 도전적이고 많은 시간을 소모하며, 수학화에 포함된 수학적 내용 지식을 숙련하는 것만으로는 손쉽게 성공할 수 없음이 알려져 있다(Blomhøj & Jensen, 2007; Galbraith & Stillman, 2006). 수학적 모델링 과정에서 수학화는 학생들에게 수학적 탐구의 기회를 제공함과 동시에, 수학적 모델링 과정에서 가장 어려운 과정임이 알려져 있는 바, 수학적 모델링 과정의 수학화에 대한 실증적인 논의의 필요성이 제기된다(Blomhøj & Jensen, 2007; English & Watters, 2004; Galbraith & Stillman, 2006; Lesh & Doerr, 2003; Niss, 2010). 이에 본 연구에서는

수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인하는 것을 목적으로 한다.

2. 기호학적 분석

수학적 모델링 과정에서 수학화 활동은 제시된 문제 상황에 대하여 학생들이 구축한 표상의 변화와 진전을 통하여 확인할 수 있음이 보고된 바 있다(Chan, 2008). Chan(2008)에 따르면, 아동들은 다른 아동들과 의사소통하기 위하여 자신의 개념적인 표상을 시각화하고 이를 통하여 자신이 구축한 표상과 타자가 구축한 표상, 그리고 과제 사이의 관계를 파악할 수 있게 된다. 또한, 학생들은 수학적 모델링 활동에서 표, 그래프 등과 같은 수학적 표현을 통하여 실세계 현상에서 주요한 변수들을 확인하고 이들 사이의 관계를 기술하며, 수학적으로 해석할 수 있다(CCSSI, 2010).

수학적 모델링 활동을 기호학적인 이론을 통하여 분석하는 것은, 표상의 변화와 진전을 통하여 수학적 모델링 과정에서 드러나는 학생들의 수학화 활동을 확인할 수 있다는 점에서, 본 연구에서 학생들의 활동을 분석하기 위한 이론적인 렌즈가 될 수 있다. Presmeg(2005, 2006)은 학생들의 수학적 탐구를 심층적으로 분석하는 데 있어서 기호학적인 분석이 훌륭한 렌즈를 제공할 수 있다는 점을 지적한 바 있다. Chan(2008)의 연구에서 학생들의 표상의 변화를 확인한 것은 수학적 모델링 과정에서 학생들이 실세계 현상을 수학화할 수 있었음을 확인하는 데 그 목적이 있었던 반면, Presmeg(2005, 2006)이 제시하는 기호학적 분석은 학생들이 구축한 표상체가 어떠한 기능을 하는지, 그 기능은 어떻게 변화하는지를 확인함으로써, 수학적 탐구가 이루어지는 메커니즘을 규명하려는 데 그 목적이 있다.

Peirce는 기호를 표상체, 대상체, 해석체로 구성된 것으로 보았으며(Gorlee, 1994), 이때 표상체는 다른 무언가를 나타내는 모든 것, 대상체는 기호가 나타내는 모든 것, 그리고 해석체는 표상체가 대상체를 나타냄으로서 만들어내는 모든 것이다(Kockelman, 2007). Peirce는 표상체를 다시 도상(icon)과 지표(index), 상징(symbol)으로 범주화하였다.

> 우선, 유사성(likeness), 혹은 도상이 있다. 도상은 모방함(imitating)으로서 대상(the things)에 대한 관념(idea)을 전달한다. 두 번째로, 지시(indication), 혹은 지표가 있다. 지표는 물리적인 연결성으로 대상(things)을 어느 정도 드러낸다. 가야할 길을 지시해주는 이정표나, 나타내고자 하는 대상의 이름 바로 뒤에 위치하는 관계대명사는 지표이다. ... 세 번째로, 상징, 혹은 일반적인 기호가 있다. 상징은 관습(usage)에 의해 기호의 의미와 관련을 맺는다(Peirce, 1998, p. 5).

Presmeg(2005)에 의하면, 도상적인 표상체는 모방되는 대상체의 질적인 측면이나 구조를 드러내므로 한편으로 사진과 같은 극단적인 닮음일 수도 있고, 다른 한편으로 대수적인 식도 각 문자가 표상하는 대상들 사이의 관계를 드러낸다는 점에서 도상적인 측면을 가질 수 있다. 또한, 지표적인 표상체는 대상체와의 물리적인 연결성을 토대로 대상체를 표상하며, 상징적인 표상체는 상징이 사용됨으로서, 그 용법이나 규칙에 의하여 대상체와의 관계가 수립된다.

도상은 대상체에 내재한 관계를 포착한다는 점에서 대상체의 구조적인 측면과 관련되며, 지표는 대상체의 실제적인, 물리적인 측면을 드러낸다는 점에서 대상체의 맥락과 관련된다(Presmeg, 2005). 그렇지만, 전적으로 도상적인 표상체나 전적으로 지표적인 표상체는 존재하지 않으므로, 모든 표상체는 일정 부분 도상적이면

서 동시에 지표적이다(Otte, 2001).

Otte(2001)는 도상적 표상체와 지표적 표상체의 상호작용이 수학적 인식(cognition)을 이해하는데 가장 중요하다고 주장하였다. 본 연구에서는 Otte(2001)가 지적한 바와 같이, 표상체의 기능과 이들 간의 상호작용, 이로 인한 표상체의 기능 변화를 확인하는 것이 수학적 모델링 과정에서 일어나는 수학화를 이해하는 데 도움이 될 것으로 가정하였다. 학생들의 수학적 활동에 대한 기호학적 분석의 의의를 드러내는 이상의 논의들에 기반을 두고, 본 연구에서는 학생들이 구축한 표상체의 기능과 기능의 변화를 확인함으로써 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인한다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구의 목적은 학생들의 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그리고 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인하는 데 있다. 사례 연구 방법은 연구자가 이해하고자 하는 사례나 현상을 심층적으로 분석하여 최대한의 논점과 시사점을 도출하는 것을 목적으로 한다는 점에서, 본 연구의 목적에 부합하는 것으로 판단되었다(Stake, 1995). 이에 본 연구에서는 사례 연구 방법(Stake, 1995)을 사용하였다. 본 연구에서는 다음과 같은 절차로 연구 참여자를 선정하고, 사례에 대한 자료를 수집, 분석하였다.

1. 연구 참여자

김선희(2005)에 의하면, “모델링을 수학 수업에 적용하기 위해서는 교사가 수업 내용을 모델링 관점에서 재구조화해야 하며, 문제해결에 비교적 긴 시간을 필요로 한다(pp. 310-311).” 또한, 소그룹 활동을 통하여 학생들 사이의 활발한 의사소통을 촉진하는 것이 수학적 모델링 수업에서 효과적임이 알려져 있다(Maaß, 2006). Stake(1995)에 의하면, 사례 연구는 단일한 사례로부터 최대한의 통찰을 이끌어내는 데 그 목적이 있는 바, 긴 시간의 탐구적인 소그룹 활동에 익숙하고, 이 과정에서 의사소통에 적극적인 연구 참여자를 선정하는 것이 수학적 모델링 활동에 대한 심층적인 이해를 제공하는 사례 연구에 적합할 것으로 판단하였다.

본 연구에서는 학교 정규과정 이외에 별도의 탐구 중심 수업에 참여하고 있는 학생들을 대상으로 모델링 수업을 실시하였다. 연구 참여자는 서울시의 G고등학교 토요과학교실에서 3개월간 격주로 한 학급에서 수업을 받아온 고등학교 1학년 학생 15명으로, 중위권 정도의 수학적 성취를 보여주었으며 소그룹 활동에서 자신의 의견을 적극적으로 표현하는 데 익숙한 학생들이었다. 본 연구에서 학생들의 모델링 활동은 4명씩 네 개의 조(한 조는 3명)로 나뉘어 이루어졌다. 이 학생들은 본 수학적 모델링 수업에 2시간 동안 참여하였다.

이 수업에 참여한 학생들의 모델링 활동 가운데, 1조(4명)와 2조(4명) 학생 8명의 수학적 모델링 활동을 본 연구의 사례로 분석하였다. Maaß(2005)에 의하면, 수학적 모델링 활동은 학생들의 수학에 대한 태도, 그리고 모델링에 대한 태도와 밀접하게 관련된다. Maaß(2005)은 학생들을 모델링과 수학에 대한 태도가 모두 긍정적인 유형, 모델링에 대한 태도만 긍정적인 유형, 수학에 대한 태도만 긍정적인 유형, 그리고 모델링과 수학 모두에 부정적인 유형으로 범주화 하고, 모델링 그리고 수학에 대한 태도가 모두 긍정적인 학생들이 수학적 모델링 활동에 가장 적극적임을 확인하였다. 이에 본 연구에서는 수업을 진행한 교사와의 면담과 연구진의 수업 관찰을 통

하여, 수학적 모델링 수업에 참여한 학생들 가운데 모델링, 그리고 수학에 모두 긍정적인 태도를 가진 학생들로 확인된 1조와 2조의 학생 8명 (SM, HJ, JH, SJ, HC, SK, JY, MS)의 수학적 모델링 활동을 본 연구의 사례로 선정하는 것이, 수학적 모델링 과정에 포함된 수학화에 대한 이해를 도모하는 본 연구에 가장 적합할 것으로 판단하였다. 본 연구에서는 1조와 2조 학생들의 수학적 모델링 활동을 사례로, 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 이루어지는지, 그리고 그 어려움은 무엇인지에 대하여 확인하였다. 이 학생들은 중위권 수준의 수학적 성취를 보여주었으며, 평균적인 사회 경제적 배경을 가졌다. 연구 참여자들은 토요과학교실 수업을 받으면서 다양한 과학 및 수학 수업을 통해 새로운 내용의 수학수업에 거부감이 없었다. 또한 3개월 동안 격주로 한 학급에서 과학 실험과 수학 수업에 참여해왔으며, 조별 활동에서 자신의 의견을 자유롭게 표현하는 데 익숙한 학생들이었다. 이 학생들은 중학교에서 일차함수에 대해 충분히 학습하였으며, 고등학교 1학년 정규 수업에서 일차함수와 직선의 방정식에 대하여 심화된 학습을 하였음을 담당 수학교사, 그리고 학생들과의 사전 면담을 통하여 확인하였다.

2. 자료의 수집 및 분석

본 연구에서는 학생들의 수학적 모델링 활동을 분석하기 위하여 다음과 같은 절차로 사례 연구 방법(Stake, 1995)을 사용하였다. 우선 연구진과 수업을 진행하는 교사가 함께 수학적 모델링 과제를 설계하고, 이를 바탕으로 2012년 8월 25일에 2시간의 모델링 수업을 실시하였으며, 박사과정생인 5년 경력의 교사-연구자가 수업을 진행하였다. 연구진은 학생들의 수학적 모델링 활동에 개입하지 않고 탐구과정을 관찰하였다. 활동지에는 자신들의 생각을 최대한 자세히 표현하도록 하였으며, 생각을 수정할 필요가 있을 때는 이전의 기록한 내용을 지우지 않도록 볼펜을 제공하였다. 또한 Maaß(2006)에 의하면, 학생들을 몇 개의 소그룹으로 나누어 각 조별로 과제에 대하여 논의하도록 하고 각자 논의를 반영하여 개별적으로 과제를 수행하는 것이 수학적 모델링 수업에서 효과적임이 알려져 있으므로, 학생들의 모델링 활동은 4명이 1조를 이루어 토론하며 이루어졌으며 각 학생별로 활동지를 제공하여 모델링 활동을 기록하도록 하였다. 그리고 교사는 (최소의) 안내와 (최대의) 학생들의 독립적인 활동 사이의 균형을 잡기 위해 노력하였다(Blum & Borromeo Ferri, 2009). 또한, 과제의 맥락(당구)을 충분히 파악할 수 있도록 영상자료(당구경기 영상)를 함께 약 5분 간 시청하였다.

또한 본 연구에서는 학생들의 수학적 사고와 학생들의 대화, 그림, 식, 제스쳐 등의 다양한 표상체와의 밀접한 관련성을 가정하고, 연구진의 현장노트, 비디오 자료와 녹취록, 그리고 학생들의 활동지에 기록된 그림, 식 등을 분석하였다 (Radford, 2003; Sfard, 2008). 연구진은 이러한 다면적인 자료 수집이 본 연구의 내적인 타당도와 신뢰도를 높일 수 있을 것으로 판단하였다 (Creswell, 2009; Stake, 1995).

본 연구에서는 위와 같은 절차에 따라 수집한 자료들을 기호에 대한 Peirce의 관점을 토대로 분석하였다. 구체적으로, 본 연구에서는 수학화와 관련하여 학생들이 구축한 표상체의 기능(예. 도상적, 지표적, 상징적)과 그 변화를 확인하였다. 본 연구에서는 학생들의 대화, 그림, 식, 제스쳐 등의 다양한 표상체들을 확인하고, 이들을 범주화하는 과정을 거쳐 범주들 간의 관계로부터 각 장면에서 드러난 표상체의 기능과 그 변화를 확인하였다(Creswell, 2009; Stake, 1995).

또한 본 연구에서는 학생들이 구축한 표상체의

기능과 그 변화에 대한 연구자 해석의 내적 타당도와 신뢰도를 높이기 위하여 연구자 삼각측정(Stake, 1995)과 동료 점검(Creswell, 2009)을 활용하였다. 연구자 삼각측정은 학생들이 구축한 표상체의 기능과 변화에 대한 해석을 확증하고, 동시에 부가적인 해석을 얻기 위하여 여러 명의 연구자가 검토하는 방식으로 이루어졌으며, 동료 점검은 다른 연구자들에게 해석 결과에 대한 의견을 구하는 방식으로 이루어졌다(Creswell, 2009; Stake, 1995).

3. 과제

연구진이 개발한 수학적 모델링 과제는 당구공이 지나간 직선 경로의 일부를 일차함수식으로 표현하는 것이다(<부록 1>). 연구진은 고등학교 1학년인 연구 참여자들이 수학교과에서 학습한 사항들을 고려하여 수학적 모델링 활동에 적합한 소재로 당구공의 직선 경로를 택하였다. 연구진은 일차함수와 관련된 동적 현상의 수학적 모델링 과제가 한편으로 학생들에게 과도하게 복잡하지 않으면서도 동시에 진정성 있는(authentic) 실세계 맥락을 바탕으로 한 수학화 경험을 제공할 수 있을 것으로 보았다. 다른 한편으로, 우정호(1998)에 따르면 함수의 본질은 실제적인 물리적, 사회적 변화 현상을 기술하고 해석하는 데 있는 바, 연구진은 당구공의 움직임이라는 물리적 현상을 함수적 사고를 이끌어낼 수 있는 풍부한 맥락의 현상으로 보았다. 이러한 풍부한 맥락의 현상을 바탕으로 수학적 모델링 과제를 설계한 것은, 학생들로 하여금 함수적 사고라는 수학적 본질이 포함된 실세계 현상에 대한 수학적 모델을 수립하도록 함으로써, 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 활동인 수학화가 더욱 활발해지고, 표면화 될 것으로 기대하였기 때문이다.

이와 더불어 연구진은 학생들이 다양한 표상체를 활용하여 수학적 모델링 활동에 참여할 수 있도록, 실제 당구공의 움직임을 보여주는 영상을 함께 시청함과 동시에 활동지에 문제 상황을 기술하는 그림과 수치적인 표상체를 함께 제시하였다(<부록 1>).

Ⅳ. 연구 결과

연구 결과 학생들의 수학적 모델링 활동에서 수학화와 관련된 활동들을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 1조와 2조의 수학적 모델링 활동 가운데, 주어진 과제를 해석하기 위하여 실세계 현상에 대한 표상체를 구축하는 과정과, 이에 대한 수학적 모델을 수립하는 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그리고 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인할 수 있었다. 그리고 2조 학생들의 수학적 모델링 활동 가운데, 수학적 모델을 실세계 현상에 대한 반성을 통하여 수정하고 개선하는 과정에서도 수학화가 일어나는 부분적인 메커니즘을 면밀하게 확인할 수 있었다. 이에 이 장에서는 수학화가 이루어지는 과정과 그 어려움을 (1) 주어진 과제로부터 다양한 표상체를 구축하는 과정, (2) 이를 바탕으로 수학적 모델을 구축하는 과정에서 드러난 수학화와 이 과정에서 학생들이 겪은 어려움들, 그리고 (3) 자신들이 세운 수학적 모델을 실세계 맥락을 토대로 반성하면서 수학화를 개선하는 과정의 순으로 제시한다.

1. 표상체의 구축

이 장에서는 1조와 2조의 학생들이 수학적 모델링 과제를 해석하고 해결하기 위하여 다양한 표상체를 구축하게 되는 과정을 분석함으로써,

학생들이 구축한 표상체들은 어떠한 의미를 가지고 있었으며, 이들이 수학화에 어떠한 영향을 주었는지를 분석한다. 특히, Otte(2001)와 Presmeg(2005)이 지적한 바와 같이, 연구진은 표상체들이 상호작용하면서 그 기능이 변화하고 의미가 생성되는 장면에 주목하였다.

수학적 모델링 과제를 접한 학생들은 우선 주어진 과제를 해석(interpret)하기 위한 시도를 하였다(Borromeo Ferri, 2006; Blum & Leiß, 2006). 수학적 모델링 활동의 주요한 측면 가운데 하나는 주어진 과제와 과제의 목표, 가능한 해법 등을 학생들이 직접 도출하는 데 있는 바, 연구진은 과제에 '당구공이 지나간 경로를 식으로 나타내어라'와 같은 표현을 제시함으로써 학생들이 당구공의 움직임이라는 실세계 현상을 재조직하기 위한 방법을 적극적으로 탐색하기를 기대하였다(Lesh & Doerr, 2003). 이로 인하여, 학생들의 모델링 활동은 '경로를 식으로 나타내는 것'이 무엇인가에 대한 논의로부터 출발하였다(<표 Ⅳ-1>).

<표 Ⅳ-1> 과제에 대한 학생들의 해석 시도

그룹	Line	화자	전사
1	19	SM	[경로를 식으로 나타낸 것은] 길이에요?
...	...	...	...
2	35	SK	경로를 식으로 나타내라는데, 어떻게 경로를 식으로 나타내?

'경로'를 '식'으로 나타내라는 과제의 질문은 학생들에게 즉각적으로 해석되지 않았다(<표 Ⅳ-1>). 학생들은 과제에 제시된 맥락(당구공의 움직임)을 바탕으로 표상체를 구축하면서 과제 해석을 시도하였다. 학생들이 구축한 표상체의 유형과 각 유형의 표상체를 구축한 학생의 수는 다음의 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 학생들의 표상체 유형과 각 유형별 학생 수

표상체 유형	학생 수(명)
제스쳐 표상체	2
언어적(verbal) 표상체	3
그래픽 표상체	8

다음의 [그림 Ⅳ-1]은 제스쳐 표상체, <표 Ⅳ-3>은 언어적 표상체, 그리고 [그림 Ⅳ-2]는 그래픽 표상체의 예시다.

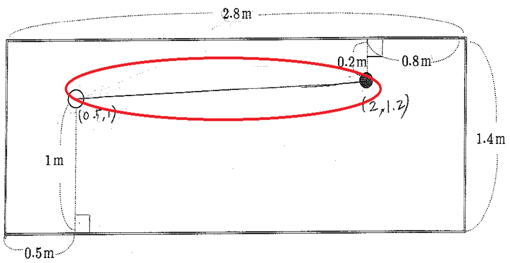
<표 Ⅳ-3> 과제에 대한 학생 HJ의 언어적 표상체

그룹	Line	화자	전사
1	23	HJ	이거 아니야 이거? 그냥, 식~(손으로 경로를 그리면서) 그리면 되는 것 아니야?

학생 HJ가 발화한 '식~'과 같은 의성어는 과제에 제시된 당구공이 움직이는 소리를 나타내

[그림 Ⅳ-1] 과제에 대한 학Ⅳ-생 HJ의 제스쳐 표상체

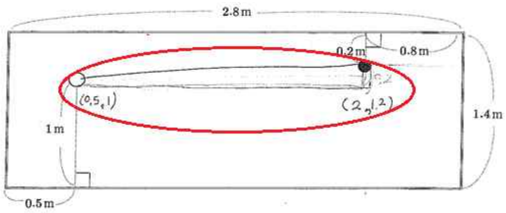
는 것이었으며, 이 학생의 언어적 표상체는 볼펜의 끝으로 공의 움직임을 따라하는 제스처를 수반하였다. [그림 Ⅳ-2]의 붉은 타원에 포함된 선분은 학생 SM이 당구공의 경로를 활동지에 그림으로 그린 것이다. 8명의 학생들 가운데, 제스처 표상체는 학생 HJ와 HC에게서, 언어적 표상체는 학생 HJ, HC, SK에게서 확인되었으며, 그래픽 표상체는 모든 학생들에게서 확인되었다(<표 Ⅳ-2>).



[그림 Ⅳ-2] 과제에 대한 학생 SM의 그래픽 표상체

이때, 학생 HJ의 언어적 표상체와 제스처 표상체는 제시된 과제의 맥락으로부터 도출된 것이며, 동시에 당구공의 움직임과의 물리적 연결성을 가지고 있다는 점에서 지표적인 표상체이다. 또한 학생 SM이 그린 그래픽 표상체 역시 당구공의 물리적인 움직임을 기술했다는 점에서 지표적이다.

[그림 Ⅳ-2]에서, 학생들이 최초로 구축한 표상체는 [그림 Ⅳ-2]의 붉은 타원의 내부에 있는 선분이었다. 이때 대부분의 학생들은, 두 당구공 사이의 선분을 그린 이후에 거의 자동적으로 다른 두 선분을 더 그어서 직각삼각형을 그렸다([그림 Ⅳ-3]). 그리고 이 삼각형에서 두 당구공을 이은 선분을 제외한 나머지 두 선분의 길이를 구하는 과정을 통하여 당구공과 여러 다른 구체물들 사이의 위치 관계를 종합한다. 학생들의 자동적인 삼각형 그리기와 각 변의 길이 구하기는 표상체의 기능 변화와 관련 깊다.



[그림 Ⅳ-3] 학생 YJ의 그래픽 표상체

두 조의 학생들이 최초로 구축한 표상체는 당구공의 동적인 움직임을 표현한 언어적 표상체, 그래픽 표상체, 제스처 표상체였으며, 이는 모두 지표적인 표상체였다. 그러나 [그림 Ⅳ-2], [그림 Ⅳ-3]과 같이 두 당구공 사이에 선분을 그은 순간, 학생 SM과 YJ에게 두 당구공은 이 선분으로 연결되었다. 이는 두 당구공과 선분이 고립된 것이 아니며, 서로 관계를 갖게 된 것을 의미한다. 이 시점부터 학생 SM과 YJ에게 당구공은 평면상의 점(point)이다. 즉, 두 당구공이 선분으로 연결된 순간, 실세계 현상은 일시적으로 맥락을 상실하는 대신, 상대적인 위치관계를 획득하였다.

이와 함께 이루어진 학생들의 삼각형 그리기와 두 변의 길이 구하기는 주어진 과제에 제시된 수치적인(numerical) 표상체들과, 이들이 제시된 방식의 영향을 받은 것이다. 직사각형의 형태로 제시된 당구대와, 이 당구대에서 각 당구공의 위치관계를 기술한 수치적인 표상체들로 인하여, 학생들은 과제에 제시된 규준(standard)에 적합한 위치관계 도출을 시도한다. 즉, 학생들은 당구공을 둘러싼 틀에 해당하는 당구대와 나란한 보조선을 긋고 그 길이를 구해서 두 당구공의 상대적인 위치관계를 도출한 것이다.

학생들의 수학적 모델링 활동을 기호학적인 관점에서 요약하면, ‘당구공의 경로’라는 대상체(Object 1)에 대하여 학생들은 제스처, 언어적, 그래픽 표상체(Representation 1)를 수립하였고, 이에 대한 해석체(Interpretation 1)는 과제에 제시

된 ‘당구공의 동적인 맥락’과 밀접하게 관련되었다. Presmeg(2006)이 강조한 바와 같이, 해석체는 대상체와 표상체의 관계를 규명하기 위한 시도의 결과물이며, 기호를 구성하는 세 요소들(Object 1, Representation 1, Interpretation 1)이 기호로부터 생성되는 새로운 대상체(Object 2)를 구성한다. 그리고 이 대상체(Object 2)에 대한 표상체(Representation 2)가 과제에 제시된 도상적 표상체들의 영향으로 두 당구공의 상대적인 위치관계와 관련되어 해석됨으로서(Interpretation 2), 학생들은 두 번째 대상체, 표상체, 해석체가 구성하는 대상체(Object 3)를 [그림 Ⅳ-3]과 같이 보조선과 좌표로 표현하였다(Representation 3). 이 때, 첫 번째 표상체와 두 번째 표상체는 외견상 동일하였지만, 첫 번째 표상체는 지표적이었던 반면에, 두 번째 표상체는 과제에 제시된 도상적인 표상체들의 영향으로 그 기능이 도상적으로 변화하였음을 확인하였다.

결론적으로, 두 조의 학생들이 구축한 그래픽 표상체는 당구공의 움직임이라는 동적인 맥락을 담은 지표적 표상체로서의 성격이 강하였지만([그림 Ⅳ-1], <표 Ⅳ-3>), 이후에 두 당구공의 상대적인 위치관계를 드러내는 도상적 표상체로서의 성격이 더욱 강하게 드러났다([그림 Ⅳ-3]). 학생들이 초기에 구축한 지표적 표상체들은 과제에 제시된 도상적 표상체에 포섭되면서, 그 기능이 동적인 맥락을 드러내는 것에서 관계를 조명하는 것으로 변화하였다. 이를 통하여, 당구공의 움직임이라는 실세계 현상이 과제에 제시된 여러 구체물들의 관계 속에 포섭되고 연결되었다. 연구진과 교사는 이 순간 학생들이 당구공의 움직임을 일차함수로 기술할 것으로 예상하였다. 그러나 동적인 맥락으로부터 정적인 관계로의 이행은 주어진 현상에 대한 적절한 수학적 모델의 수립으로 곧바로 이어지지 않았다.

2. 일시적인 탈맥락화와 수학화

지금까지 확인한 바와 같이, 두 조의 학생들이 구축한 표상체는 동적인 맥락을 드러내는 지표적인 표상체에서 관계를 드러내는 도상적 표상체로 그 기능이 변화하였다. 이 장에서는 위와 같은 표상체의 기능 변화가 수학적 모델의 수립, 그리고 수학화에 어떠한 영향을 주었는지, 그리

<표 Ⅳ-4> 피타고라스 정리를 활용한 모델링 시도

그룹	Line	화자	전사
2	62	JY	이렇게 해가지고 피타고라스 쓰는 것 아니야?
	63	MS	피타고라스 쓸까 했는데, 이렇게 하면
	64	JY	요기 이렇게 하면 되는데, 이거랑 이거도 여기 길이가 있을 것 아니야. 여기 0.2잖아. 여기 직각한 다음에 이렇게 피타고라스 하면 여기는 1미터고 여긴 0.2미터잖아, 근데 여긴 1.4미터잖아. 그럼 애랑 애랑 0.2미터 떨어져 있다는 거 아니야? 그럼 여기다가 피타고라스 쓰면 되는 거 아니야?
	65	MS	피타고라스 쓰면 여기를 구해야 되는데
	66	JY	그래 여기 길이 구하는 거잖아 이렇게 하면 안 되나 맞지? 그치? 이게 맞아?
	67	MS	한 번 말이라도
	68	JY	여기랑 여기 길이는 1.2미터잖아, 여기 0.2미터고 여기 1미터니까 더하면 여기 길이는 0.2미터가 나오잖아, 여기가 직선이잖아 직각이잖아 그러니까 피타고라스 정리 써서 여기 길이 구하면 되는거 아니야?

고 이 과정상의 어려움은 무엇인지 확인하는 데 목적을 둔다.

연구진과 교사는 학생들이 두 당구공의 상대적인 위치관계를 파악한 순간, 성공적인 탐구가 이어질 것으로 예상하였다. 그러나 학생들은 두 당구공 사이를 연결한 선분의 길이를 구하였다. 이는 학생들이 표상체에서 직각삼각형을 보고, 이를 사전에 학습한 피타고라스의 정리와 관련지었기 때문이었다(<표 Ⅳ-4>).

위의 <표 Ⅳ-4>에 드러난 바와 같이, 학생 JY는 주어진 도상적 표상체가 피타고라스의 정리를 적용할 수 있는 조건을 완벽하게 갖추었다는 사실을 조원들에게 강조하였다. 이와 같이, 두 조의 학생들은 과제에 제시된 실세계 현상의 맥락을 충분히 반성하지 않고, 표상체에서 자신들의 수학적 경험에 비추어 익숙한 부분에만 주목하고 이를 수학적으로 조직하여, 그 맥락이 당구공의 움직임이라는 실세계 현상과는 멀어지게 되었다.

그러나 두 조의 학생들은 당구공의 움직임이라는 실세계 현상에 대한 이러한 방식의 조직화가 적절한지에 대하여 스스로 의문을 제기하였다(<표 Ⅳ-5>).

학생들은 '경로의 길이를 구한 것'이 '경로의 식'에 적합하지 않음을 파악하였지만, 좀처럼 새로운 해석을 모색하는 활동으로 나아가지는 않았다. 오히려, 각자가 '길이'라는 것이 잘못되었다는 것을 안다는 사실만을 되풀이하여 언급하는 양상을 보이기에 이르렀다. 이에 교사는 다음과 같은 문제를 제기하여 길이에 대한 논의를 마무리하고, 대안적인 탐구로 옮겨갈 것을 촉구한다.

교사: ...여러분은 지금 길이를 말했어, 길이는 사실 뭐야, 3이다, 길이가 3인거는 맞잖아...

이와 더불어 교사는 지표적인 표상체를 제시함으로서 학생들에게 잊힌 과제의 동적인 맥락을 다시 제시한다([그림 Ⅳ-4]).

[그림 Ⅳ-4]에 제시된 바와 같이, 교사는 과제에 제시된 당구공의 경로와는 전혀 다른 경로(반원 형태의 경로)도 같은 길이를 가질 수 있다는 점을 지적하였으며, 이 과정에서 두 공의 물리적인 움직임을 제스쳐로 표현하였다. 길이가 당구공의 경로를 나타내는 식으로 적절하지 않다는 점을 드러내는 핵심적인 예시를 교사가 제시하자, 학생들의 담론에서 '길이'가 등장하는 빈도는 현저하게 떨어졌다. 길이에 대한 활발한 논의는 잠시 잦아들고, 학생들은 주어진 과제에 대한 새로운 해결 전략을 모색하기 시작하였다.

학생들의 수학적 모델링 활동을 기호학적인 관점에서 요약하면, 보조선과 좌표가 도입된 표

<표 Ⅳ-5> 길이로 표현된 모델에 대한 문제 제기

그룹	Line	화자	전사
1	35	SM	근데 이건 길이로 표현해 줘야해?
	36	HJ	길이로 표현해야 하냐고?
	37	HJ	경로를⋯
	38	HJ	경로를 식으로 나타내야 하네, 어떻게 하지?
	39	HJ	길이는 알겠는데, 그건 모르겠네,
	40	HJ	하아⋯경로⋯
...	...	...	...
2	76	HC	그러니까, 근데 길이 구하는 게 아니라 경로 식이 뭐야?

[그림 Ⅳ-4] 동적인 맥락을 담은 교사의 제스쳐

상체(Representation 3)에서 학생들은 직각삼각형에 주목하였고, 이는 사전에 학습하였던 피타고라스의 정리와 관련되면서 학생들은 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하게 되었다. 즉, 세 번째 대상체와 표상체에 대한 학생들의 해석체는 (Interpretation 3) 직각삼각형, 피타고라스의 정리와 밀접하게 관련되었다.

이로부터 표상체가 적절하지 않은 단서를 제공할 수 있다는 점이 수학화를 어렵게 하는 요인으로 확인되었다. [그림 Ⅳ-3]에 드러난 바와 같이, 학생들은 동적인 맥락으로부터 두 당구공의 위치를 좌표평면 위의 좌표로 표현하였음에도 불구하고, 좌표를 도출하는 과정에서 그린 보조선들로 이루어진 직각삼각형에 주목하였다 (<표 Ⅳ-4>). 이는 학생들이 사전에 학습하였던 피타고라스의 정리와 관련되면서, 수학적 모델 수립 과정이 피타고라스의 정리를 적용하는 활동으로 이어졌다.

다른 한편으로, 앞서 논의한 실세계 현상의 재조직 과정과 학생들이 구축한 표상체의 기능 변화와의 관련성을 확인할 수 있다. 학생들이 초기에 구축하였던 표상체들은 실세계 현상의 맥락과 관련 깊은 지표적인 측면이 강하였으나([그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2], <표 Ⅳ-3>), 이는 과제에 제시된 도상적인 표상체에 포섭되는 과정에서 도상적인 측면이 더욱 강화되었다([그림 Ⅳ-3]). 이러한 표상체의 기능 변화 과정은, 학생들의 활동에서 일시적으로 맥락을 소거하는 효과를 가져왔고, 이는 학생들이 과제에 제시된 맥락에 대하여 충분히 반성하지 않고, 자신들이 익숙한 개념이나 절차에 의존하여 수학적 모델을 수립하게 하였다. 학생들이 이와 같은 어려움을 겪는 과정에서, 교사는 학생들이 타당하게 제기한 문제에 대한 직관적인 예시와 함께, 과제의 동적인 맥락을 되새김으로써 당구공의 움직임이라는 현상이 더욱 성공적으로 수학화될 수 있는 토대를 제공하였다([그림 Ⅳ-4]).

3. 실세계 맥락에 대한 반성을 통한 수학화의 개선

실세계 현상을 수학화하기 위한 첫 시도에서 성공하지 못한 학생들은 주어진 과제와 당구공의 동적인 현상을 재해석하였다. 수학적 모델링 활동은 모델의 구축과, 구축한 모델을 다시 실세계 현상에 비추어 재해석 하는 과정이 여러 번 반복되면서 이루어졌다(Borromeo Ferri, 2006; Blum & Leiß, 2006). 그리고 이 과정에서 학생들이 실세계 현상을 다른 방식으로 재조직하기 위한 시도가 드러났다. 이 장에서는 2조의 학생들이 수학적 모델과 표상체를 실세계 맥락에 비추어 재해석하는 과정에서 발생한 수학화의 개선 과정을 확인한다.

피타고라스 정리를 응용하여 두 당구공을 이

<표 Ⅳ-6> 과제의 맥락에 대한 재해석 시도

그룹	Line	화자	전사
2	90	SK	경로를 식으로 구한다는 게 갑자기 그게 말이 되나?
	91	SK	경로라면 가는 길이잖아, 그러면 위치마다 엄청나게 수가 바뀌는데, 이 선에 점이 얼마나 많은데
	92	HC	경로~?
	93	SK	어,
	94	SK	경로를 식으로 나타내
	95	HC	경로~?
	96	SK	이 공의 위치마다 다 식이 달라지잖아,
	97	HC	그니까, 결국에 이거 결정 하는 게 이거 가로와 세로잖아, 가로 세로를 다 미지수로 두는데, 그러면 또, 이게 경로의 식이 아니라 길이를 구하는 식인데? 경로의 식이라는 게 대체로 뭐라는 거야?
	98	SK	경로면 이걸 점마다 다 구해야 되잖아. 이게 점점점점점점점

은 선분의 길이를 구하는 전략이 성공적이지 못하였다는 점을 확신하게 된 2조 학생들은 주어진 과제와 과제의 맥락을 다시 해석하기 위하여 노력하였다(<표 Ⅳ-6>).

<표 Ⅳ-6>에 제시된 바와 같이, 학생 SK는 주어진 과제의 동적인 맥락에 주목하여 수학화를 시도하였다. 예를 들어, '위치마다 엄청나게 수가 바뀌는데, 이 선에 점이 얼마나 많은데', '점점점점...' 과 같은 표현을 통하여, 학생 SK는 당구공의 움직임이라는 동적인 현상에 주목하여 표상체를 분석하고 있음을 확인할 수 있다.

이에 반하여 학생 HC는 자신들이 구축한 표상체의 도상적인 특성에 주목하여 수학화를 시도하였다. 예를 들어, '결국에 이거 결정 하는게, 이거 가로와 세로잖아, 가로 세로를 다 미지수로 두는데'와 같은 표현을 통하여, 학생 HC는 당구공의 상대적인 위치관계를 통하여 당구공의 자취를 식으로 나타내기 위하여 시도하고 있음이 드러난다.

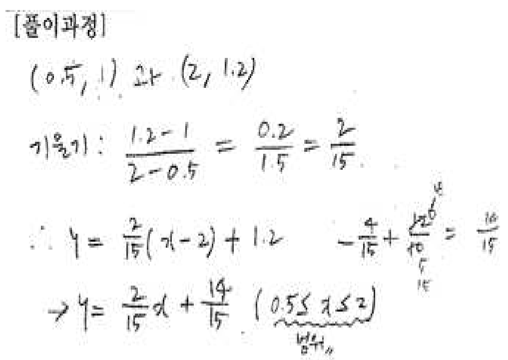
위의 두 학생은 자신들이 구축한 표상체를 함께 보면서, 한 학생은 표상체의 지표적 측면에, 다른 학생은 도상적인 측면에 주목하고 있음을 확인할 수 있다. 학생 SK와 HC의 대화에서 학생 SK는 표상체를 과제의 맥락에서 해석하는 것에 주목한 반면, 학생 HC는 표상체에 내재한 수학적 관계에 주목하였다. 학생 HC가 주목한 표상체의 도상적인 측면은 2조의 학생들로 하여금 실세계 현상에 내재한 여러 요소들 사이의 관계적인 측면에 주목하게 하였다. 그러나 이와 같이 표상체의 도상적인 측면에만 주목하는 경우에는 수학화 하고자 하는 실세계 현상과는 전혀 다른 맥락으로의 수학화가 일어날 수 있었다(<표 Ⅳ-4>). 이때, 학생 SK에 의하여 표상체의 지표적인 측면이 강조되자, 두 학생은 실세계 현상의 동적인 맥락을 통하여 표상체의 관계적인 측면을 조망하게 되었다. 이는 다음의 <표 Ⅳ-7>에서 확인할 수 있다.

<표 Ⅳ-7>에서, 학생 SK가 "경로를 계속 움직이잖아 이게, 움직이면 그 각 위치마다 식이 다 다르게 나올 텐데"라고 언급한 바를 통하여, 학생 SK도 동적인 현상을 관계적으로(각 '위치'마다 '식'이 다 '다르게') 조망하기 시작하였음을

<표 Ⅳ-7> 함수를 활용한 수학적 모델의 수립 과정

그룹	Line	화자	전사
2	99	HC	경로의 식이면 뭐 여기다가, 함수, 함수 그려?
	100	SK	경로를 계속 움직이잖아 이게, 움직이면 그 각 위치마다 식이 다 다르게 나올 텐데
	101	HC	우리 그럼 여기를 0 콤마 0으로 잡고 샤악~(펜으로 당구공의 움직임을 묘사하는 제스처를 취하면서) 이렇게 구하자 식을
	102	SK	어?
	103	HC	야 그러면 되겠다, 경로의 식 아니야?
	104	JY	오~~된대
	105	HC	여길 0 콤마 0으로 잡아,
	106	SK	그래 함수를 쓰자

확인할 수 있다. 또한, <표 Ⅳ-7>의 “우리 그럼 여기를 0 콤마 0으로 잡고 샤악~”에서, 학생 HC 역시 실세계 현상의 여러 요소들의 관계를(0 콤마 0) 맥락을 고려하며(샤악~) 재조직하기 시작했음을 확인할 수 있다. 이와 같은 의사소통 과정을 통하여, 학생 HC와 학생 SK는 동적인 맥락으로부터 함수적인 관점에서 주어진 현상을 조직하는 것에 성공한다(<표 Ⅳ-7>, “여길 0 콤마 0으로 잡아”, “그래 함수를 쓰자”). 두 학생은 일차함수를 통하여 당구공의 움직임이라는 실세계 현상의 수학적 모델을 수립하게 되었다(<표 Ⅳ-7>). 1조의 학생들 역시 유사한 과정을 통하여 일차함수 모델을 수립하였다([그림 Ⅳ-5]).



[그림 Ⅳ-5] 학생 SM의 일차함수 모델

학생들의 수학적 모델링 활동을 기호학적인 관점에서 요약하면, 학생 HC는 활동지에 작성한 표상체의 도상적인 측면과 상대적인 위치관계로서의 해석체(Interpretation 2)에 주목한 반면(<표 Ⅳ-6>, <표 Ⅳ-7>), 학생 SK는 표상체의 지표적인 측면과 동적인 맥락으로서의 해석체(Interpretation 1)에 주목하였다(<표 Ⅳ-6>, <표 Ⅳ-7>). 이 두 학생의 의사소통은 두 학생이 각자 구성한 의미의 망을 공유하고, 함수적인 관점과 관련된 해석체를 도출하는 것을 가능하게 하였다.

초기에 수립하였던 길이 모델을 수정하면서 당구공의 움직임을 재조직하는 과정에서 확인할 수 있는 점은 크게 두 가지이다. 첫째는, 학생들이 구축한 표상체의 도상적인 측면과 지표적인 측면 사이의 상호작용이 주어진 실세계 현상에 대한 재조직에 주요한 영향을 미쳤다는 점이다. 학생들에게 제시되었던 표상체의 도상적인 측면은 학생들로 하여금 실세계 현상에 내재한 여러 요소들 사이의 관계적인 측면에 주목하게 하였고([그림 Ⅳ-3]), 이는 실세계 현상을 수학적으로 기술하는 것을 가능하게 하였다(<표 Ⅳ-4>). 그러나 표상체의 도상적인 측면에만 주목하는 경우에는 수학화 하고자 하는 실세계 현상과는 전혀 다른 맥락으로의 수학화가 일어날 수 있었다(<표 Ⅳ-4>). 학생 SK에 의해서 표상체의 지표적

인 측면이 강조되고(<표 Ⅳ-6>, “경로면 이걸 점마다 다 구해야 되잖아. 이게 점점점점점점점”), 동시에 학생 HC에 의해서는 도상적인 측면이 강조되자(<표 Ⅳ-6>, “결국에 이거 결정 하는 게 이거 가로와 세로잖아, 가로 세로를 다 미지수로 두는데”), 이들은 각자가 구성한 의미의 망을 의사소통을 통해 공유하면서 학생 SK는 지표적 표상체의 도상적인 측면을, 학생 HC는 도상적인 표상체의 지표적 측면을 조망할 수 있게 되었다(<표 Ⅳ-7>, “그래 함수를 쓰자”, “우리 그럼 여기를 0 콤마 0으로 잡고 샤악~”). 표상체의 지표적 측면에 주목하던 학생 SK의 관점에서 보면, 표상체의 도상적인 측면이 확인되었기에, 실세계 현상의 여러 요소들의 관계를 확인하고 동시에 이를 재조직할 수 있는 수학적 개념을 탐색하는 것이 가능했다. 역으로, 표상체의 도상적 측면에 주목하던 학생 HC의 관점에서 보면, 도상적인 표상체에서 드러나지 않았던 지표적인 측면이 강조됨으로 인하여, 실세계 현상의 맥락을 반영하여 이전과는 전혀 다른 방식의 수학화가 가능했다. 다시 말해서, 이전(<표 Ⅳ-4>, 직각삼각형)과는 전혀 다른 맥락을 바탕으로 표상체를 조망함으로서, 표상체에서 이전에는 볼 수 없었던 관계, 즉, ‘해석기하학적인 평면’, ‘기준점(원점)’, 그리고 ‘평면상의 두 점들’ 사이의 관계를 포착할 수 있게 되었다(<표 Ⅳ-7>).

이처럼 표상체의 도상적 측면과 지표적인 측면은 서로 상호작용하면서, 실세계 현상을 재조직하고, 이를 현상과 본질적으로 닿아 있는 수학적 개념에 연결 짓는 것을 가능하게 하였다. 즉, 주어진 과제의 동적인 맥락에 주목하던 SK에게 HC가 강조한 표상체의 도상적 측면은 SK가 주어진 맥락을 함수를 통하여 재해석하는 과정을 지원하였고(도상적 표상체 ⇨ 지표적 표상체), 과제의 관계적인 측면에 주목하던 HC에게 SK가 강조한 표상체의 지표적 측면은 HC가 맥락을 고려하여 관계를 재조명하는 과정을(지표적 표상체 ⇨ 도상적 표상체) 지원하였다. 이때 비로소, 실세계 현상의 본질적인 측면을 조직화하는 성공적인 수학화가 이루어질 수 있었다.

또한, 이러한 표상체의 두 가지 측면이 두 학생의 의사소통 과정에서 모두 표면화되고 논의될 수 있었다는 점은 학생들의 의사소통이 각자 구축한 표상체와 이에 대한 해석체를 공유하는 것을 가능하게 하며, 이는 공유된 의미의 망, 기호의 망이 성장하는 데 주요한 영향을 주었음을 확인할 수 있었다.

다른 한편으로 실세계 현상으로부터 수학적 모델을 수립하는 과정은, 정적인 수학적 대상들을 물화(reify)되기 이전의 과정으로서 해석하는 것을 필요로 하였다. 즉, 위의 <표 Ⅳ-7>에서 두 당구공을 이은 표상체를 이루는 낱낱의 점에 주목한 학생 SK와 이를 관계적으로 조망하던 학생 HC의 관점이 종합되는 과정에서, 이 학생들은 주어진 선분을 삼각형의 빗변이라는 정적인 수학적 대상에서 당구공의 동적인 움직임을 기술하는 자취라는 함수적인 관점에서 조망할 수 있게 되었다. 수학적 모델링 활동에 포함된 수학화는 현상을 재조직하여 그 맥락과 관계를 함께 고려하면서 동적 현상을 기술하는 도구로서 일차함수를 재조명하는 것을 가능하게 하였다.

Ⅴ. 논의 및 결론

이 연구는 학생들의 수학적 모델링 활동을 분석하여, 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인하는 것을 목적으로 하였다. 연구 결과, 학생들은 수학적 모델링 활동에서 다양한 표상체를 구축하고 이를 실세계 현상의 관계적인 측면과 맥락에 비추어 해석하면서 현상을 재조직

한다는 점을 확인할 수 있었으며, 이는 학생들의 의사소통 과정에 드러난 표상체의 기능 변화를 통하여 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 학생들의 수학적 모델링 활동에서 수학화가 일어나는 부분적인 메커니즘을 확인함으로써 수학적 모델링 과정에 포함된 수학화를 활용한 수학 교수 학습에 대한 다음과 같은 논점들을 확인할 수 있었다.

첫째, 표상체의 도상적인 측면은 실세계 현상의 관계 체계를([그림 Ⅳ-3], <표 Ⅳ-4>), 표상체의 지표적인 측면은 실세계 현상의 동적인 맥락을([그림 Ⅳ-4], <표 Ⅳ-6>) 표면화하는 과정을 지원하였으며, 표상체의 이러한 두 측면 사이에 일어난 상호작용은 수학적 모델링 과정에서의 수학화에 핵심적인 역할을 수행하였다. 수학적 모델링 과정은 주어진 현상에 내재한 관계의 체계를 표면화하고, 이를 다시 실세계 현상에 비추어 해석하는 과정을 포함한다(Allison, Charnes, Cooper, & Sueyoshi, 1994; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Leiß, 2007). 이로 인하여 수학적 모델링 과정에서 이루어지는 수학화는 관계와 맥락을 동시에 고려하면서 이루어져야 했다. 그리고 이는 실세계 현상의 관계적인 측면을 드러내는 표상체의 도상적 측면과, 맥락을 드러내는 지표적 측면이 각각 현상에 내재한 관계 체계의 표면화와 이를 현상에 비추어 재해석하는 과정을 상호보완적으로 지원하면서 이루어졌다.

이러한 표상체의 두 가지 측면은 상호보완에서 더 나아가, 서로 상호작용하면서(Otte, 2001), 실세계 현상을 재조직하고, 이를 현상과 본질적으로 관련된 수학적 개념, 절차와 연결 짓는 것을 가능하게 하였다. 수학적 모델링 과정의 수학화 활동에서 도상적 표상체와 지표적 표상체의 상호작용이 일어난다는 것은 다음과 같이 요약할 수 있다. 우선, 도상적 표상체가 지표적 표상체에 작용하는 것은, 지표적인 표상체에서 도상적인 측면이 부각됨으로써, 주체가 현상에 내재한 요소들 간의 관계를 포착하여 실세계 현상의 맥락을 수학적으로 재해석하게 되는 과정이었다 (도상적 표상체 ⇨ 지표적 표상체). 역으로, 지표적 표상체가 도상적 표상체에 작용하는 것은, 도상적인 표상체에서 지표적인 측면이 부각되어, 주체가 실세계 현상에 내재한 요소들 간의 관계를 현상의 맥락을 고려하여 재조명함으로써, 이전과는 다른 수학적 개념, 절차 등으로 현상을 조직하게 되는 과정이었다(지표적 표상체 ⇨ 도상적 표상체). 이와 같은 과정을 통하여 주체가 실세계 현상의 관계적인, 그리고 맥락적인 측면을 충분히 반성하였을 때, 실세계 현상의 본질적인 측면을 재조직하는 수학화가 이루어질 수 있었다. 그러므로 수학적 모델링 과정에 포함된 수학화를 통한 수학 학습 지도를 꾀하는 경우에는 이와 같은 표상체의 도상적인 측면과 지표적인 측면의 상호작용을 고려하여 실세계 현상의 구조를 관계와 맥락의 차원에서 드러낼 수 있도록 지원하는 것이 중요하며, 이 과정에서 학생들의 의사소통은 표상체의 도상적인 측면과 지표적인 측면의 상호작용과 소그룹에서 공유된 의미의 망의 형성에 촉매제가 되므로(<표 Ⅳ-7>) 이를 강조할 필요가 있다.

둘째, 표상체가 적절하지 않은 단서를 제공할 수 있다는 점이 수학화를 어렵게 하는 요인으로 확인되었다. Fischbein(1987)에 의하면, 표상체는 한편으로 생산적인 탐구를 지원하지만, 다른 한편으로 잠재적인 오해의 가능성을 가지고 있다. 첫 번째 논의에서 확인된 바와 같이 표상체는 실세계 현상의 동적인 맥락과 관계적인 측면을 표면화하는 데 촉매제가 되었으나, 이 과정에서 표상체에 대한 학생들의 해석은 맥락과 관계, 직각삼각형과(<표 Ⅳ-4>) 좌표평면([그림 Ⅳ-3], <표 7>)을 오가고 있음이 확인되었다. 표상체에 대한 해석의 다양성과 그 변화는 한편으로 Peirce와

Fischbein이 지적한 바와 같이 의미의 생성과 확장을 지원하는 측면을 가지고 있었으나, 다른 한편으로 주체로 하여금 현상의 핵심적인 맥락이나 관계를 놓치게 할 수 있었다(<표 Ⅳ-4>). 그러므로 표상체와 이에 대한 해석체의 변화를 통한 의미의 생성과 확장을 꾀하는 경우에는, 이전 단계의 해석을 반성하고 이를 새로운 해석과 비교하도록 함으로써 대상체의 본질적인 측면을 포착할 수 있도록 지원해야 한다.

이는 또한, 학생들이 구축한 표상체([그림 Ⅳ-3])가 좌표평면으로서 상징적인 측면을 갖는다는 점과 관련된다. 상징의 핵심 가운데 하나는 사용에 의해 그 의미가 규정된다는 것이다. 이로 인하여, 상징을 언제, 어떠한 의미로 해석할 것인가의 문제는 간단하지 않다(Presmeg, 2005). 이러한 측면에서 본 연구에 참여한 학생들의 수학화를 어렵게 한 요인 가운데 하나는 상징으로서의 좌표평면이 갖는 의미의 다양함과 관련된다. <표 Ⅳ-4>와 <표 Ⅳ-5>에 드러난 학생들의 활동에서는 학생들이 구축한 좌표평면이 위치관계를 종합하는 정적인 의미로 해석되고 있는 반면, <표 Ⅳ-7>에서는 당구공의 움직임을 기술할 수 있는 동적인 의미로 해석되고 있음이 드러난다. 이러한 측면에서, 수학적 모델링 과정에서 구축된 상징이 맥락에 따라 다양한 의미로 해석될 수 있다는 점 또한 수학화의 어려움으로 확인되었다(Presmeg, 2005). 그러므로 교수자는 표상체의 상징적인 측면에서 드러나는 미묘한 맥락을 포착하고 이를 학생들이 의식할 수 있도록 지원해야 할 필요성이 제기된다(Presmeg, 2005).

셋째, 본 연구의 수학적 모델링 활동에서, 학생들이 구축한 표상체에서 실세계 현상의 동적인 맥락이 놀라울 정도로 빠르게 소거되는 장면([그림 Ⅳ-3])을 확인할 수 있었다. 이를 통하여, 수학적 모델링 활동에서 교사는 학생들이 실세계 현상의 관계적인 측면과 맥락적인 측면을, 표상체의 도상적인 측면과 지표적인 측면을 동시에 고려한 수학화에 참여할 수 있도록 지원해야 한다는 점을 확인할 수 있다. 가능한 한 가지 방안으로는, 본 연구에 참여한 교사가 시도한 바와 같이([그림 Ⅳ-4]), 수학화 하고자 하는 현상의 본질적인 특성을 잘 드러낼 수 있는 표상체를 활용하는 것이다. 제스쳐 표상체는 본질적으로 역동성과 관련되는 바, 동적 특징과 관련된 수학적 대상을 참조하는 데 효과적임이 알려져 있다(Sabena, 2008). 이로 인하여, 교사의 제스쳐 표상체는 학생들에게 잊힌 실세계 현상의 동적 맥락을 되새기는 데 효과적이었던 것으로 판단된다.

넷째, 수학적 모델링 과정에서 학생들이 경험한 수학화는 추상화 된 수학적 개념의 이면에 감추어진 수학적 담론(Sfard, 2008)을 회복하는 데 도움이 되었다(<표 Ⅳ-7>). 주어진 현상에 대한 학생들의 수학화가 어려웠던 원인 가운데 하나는 앞서 논의한 바와 같이 현상의 관계적인 측면과 맥락적인 측면을 모두 고려하여 관련된 수학적 대상들의 체계를 구축해야 한다는 점이었다. 이때, 수학화는 한편으로는 실세계 현상에 내재한 관계와 맥락을 표면화하고 포착하는 것을 필요로 하였으며, 다른 한편으로는 이에 대응되는 수학적 대상들의 체계를 탐색하고 관련지어야 했다. 학생들이 당구공의 경로를 수학화하기 위해서는 이를 표상한 선분을 점의 자취로 해석해야 하였으며, 이를 함수와 관련짓고, 마지막으로 당구대를 해석기하학적인 좌표명면으로 인식해야 했다. 두 당구공을 이은 선분을 좌표평면 위에서 동적 현상의 수학적 모델로 기능하는 일차함수의 그래프로 해석하기 위해서는 직선과 함수를 정적인 대상으로 물화(reify)되기 이전의, 과정(process)으로서 해석해야 했다(Sfard, 1991). 이를 통하여, 물화된 개념 이면의 과정으로서의 측면을 부각할 수 있는 교수방법으로서의 수학적 모델링이 좀 더 심층적으로 논의될

필요성이 제기된다.

본 연구에서는 학생들의 수학적 모델링 활동을 분석하여, 수학적 모델링 과정에서 수학화가 어떻게 일어나는지, 그 과정상의 어려움은 무엇인지를 확인하였다. 연구 결과 수학적 모델링 과정에서의 수학화 활동에서 학생들은 실세계 현상의 구조를 관계적인 측면과 맥락에 비추어 조직한다는 점을 확인할 수 있었으며, 이는 학생들의 의사소통 과정에 드러난 표상체의 기능 변화를 통하여 확인할 수 있었다. 그리고 수학적 모델링 과정의 수학화에서 표상체의 도상적인 측면과 지표적인 측면의 상호작용이 주요한 역할을 하고 있음이 확인되었으며, 이 과정에서 드러난 학생들의 어려움에 대하여 교사가 어떻게 접근해야 할 것인가에 대하여 논의하였다. 마지막으로, 본 연구에서는 수학적 모델링 과정의 수학화 활동을 학생들로 하여금 물화된 수학적 개념 이면의 과정으로서의 측면(Sfard, 1991, 2008)을 재조명하는 탐구로 안내할 수 있는 교수방법으로서 논의하는 후속 연구의 필요성을 확인할 수 있었다. 이를 통하여, 수학적 모델링 과정의 수학화 활동을 다양한 수학적 개념, 절차와 관련된 학생들의 수학적 탐구와 연결 지을 수 있는 이론적인, 그리고 실천적인 방안을 모색할 수 있게 되기를 기대한다.

참고문헌

김선희(2005). 문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰. **학교수학, 7**(3), 303-318.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

Allison, J., Charnes, A., Cooper, W. W., & Sueyoshi, T. (1994). Uses of modeling in science and society. In W. A. Wallace (Ed.), *Ethics In Modeling* (pp. 11-36). Tarrytown, NY: Elsevier Science Inc.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? In W. Blum, P. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds). *Applications and modelling in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 45-56). New York: Springer

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45-58.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economic* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematical instruction, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95.

Chan, C. M. E. (2008). Using model-eliciting activities for primary mathematics classrooms, *The mathematics educator, 11*, 47-66.

CCSSI(Common core state standards initiative, 2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, D.C.: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

English, L. D. & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century, In B. Sriraman, & L. English (Eds). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 263-283). New York: Springer.

English, L. D. & Watters, J. J. (2004). Mathematical modelling with young children. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International PME Conference* (pp. 335-342). Bergen: Bergen University College.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education china lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Galbraith, P., & Stillman, G., (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162.

Gorlee, Dinda L. (1994). *Semiotics and the Problem of Translation: With Special Reference to the Semiotics of Charles S. Peirce*, Amsterdam: Rodopi.

Gravemeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. V. Oers & L. Verschaffel (Eds.) *Symbolizing, Modelling and Tool use in Mathematics Education* (pp. 145-169). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaiser, G., & Sriraman, B., (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310.

Kockelman, P. (2007). The semiotic stance, *Semiotica*, *157*(1), 233-304.

Lesh, R., & Caylor, B., (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics, *International journal of computers for mathematics learning, 12*, 173–194.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Maaß, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching mathematics and its applications, 24*(2-3), 61-74.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142.

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In. R. Lesh et al. (Eds.) *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 43-59). New York: Springer.

Otte, M. (2001). Mathematical epistemology from a semiotic point of view. *Paper presented in the Discussion Group, Semiotics in Mathematics Education at the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 12-17). Utrecht: University of Utrecht.

Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce.* Volume 2, edited by the Peirce Edition Project. Bloomington: Indiana University Press.

Presmeg, N. (2005). Metaphor and metonymy in processes of semiosis in mathematics education. In M. H. G. Hoffinann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.) *Activity and Sign - Grounding Mathematics Education* (pp. 105-116). New York: Springer.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the “connections” standard: Significance of semoitics for teachers of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*, 163-182.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students’ types of generalization, *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Sabena, C. (2008). On the semiotics of gestures. In L. Radford, G. Schumbring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 19-38). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating, human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Stake, R. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks, CA: Sage

A Semiotic Analysis on Mathematization in Mathematical Modeling Process

Park, Jin Hyeong (Graduate School of Seoul National University)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

Though the term “mathematical modeling” has no single definition or perspective, it is pursued commonly by groups from various perspectives who emphasize the activities of understanding and representing real phenomenon mathematically, building models to solve problems, and reinterpreting real phenomenon to make an attempt to understand the real world and related mathematical models more deeply. The purpose of this study is to identify how mathematization arises and find difficulties of mathematization in mathematical modeling process that share common features with the mathematical modeling activities as presented here. As a result of this research, we confirmed that the students mathematized real phenomena by building various representations, and interpreting them with regard to relationships and contexts inherent real phenomena. The students’ communication fostered interplay between iconic representations and indexical representations. We also identified difficulties of mathematization in mathematical modeling process.

* Key Words : mathematical modeling(수학적 모델링), mathematization(수학화), semiotics(기호학), function(함수)

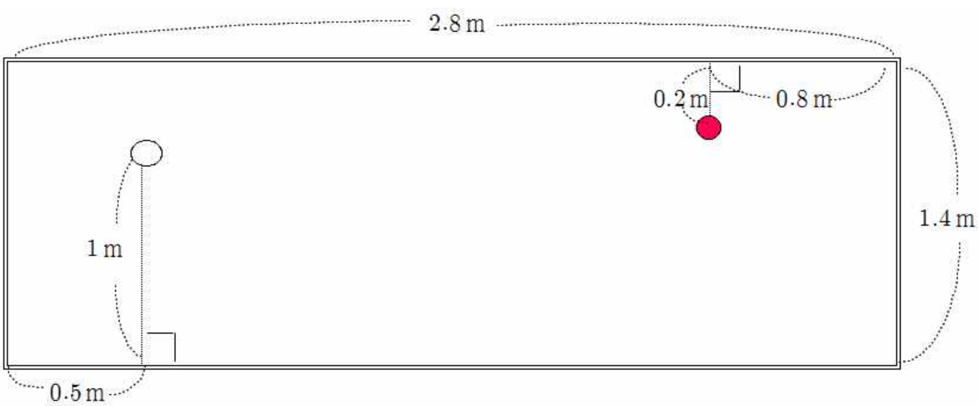
논문접수 : 2013. 3. 27
논문수정 : 2013. 4. 25
심사완료 : 2013. 5. 20

<부록 1> 수학적 모델링 과제

※ 당구는 다음 그림과 같은 가로 2.8m, 세로 1.4m의 직사각형 탁자인 당구대 위에 있는 반지름 3㎝인 공을 '큐'라고 부르는 기다란 막대기로 쳐서, 다른 공을 맞추는 스포츠다. 당구의 여러 종목들 가운데 3쿠션은 선수가 큐로 흰 공을 한 번 쳐서, 흰 공이 붉은 공 두 개를 모두 맞춰야 하며, 흰 공이 붉은 공 두 개를 모두 맞추기 전에 당구대의 모서리를 세 번 이상 맞추어야 한다.

※ 진이는 당구선수가 되기 위해 연습을 하는 중이다. 진이는 3쿠션의 여러 기술들 가운데, 흰 공이 먼저 당구대의 모서리를 **세 번 이상** 맞추고 난 뒤에 붉은 공을 맞추게 하는 '뱅크샷(Bank Shot)'을 연습하고 있다. '뱅크샷'은 붉은 공 두 개가 매우 가까이 있을 때 사용하는 3쿠션 기술이다.

※ '뱅크샷'은 붉은 공 두 개가 매우 가까이 있을 때 사용하는 기술이므로, 두 붉은 공 가운데 하나만 맞추면 거의 성공한다. 그러므로 본 과제에서는 당구대 위에 흰 공과 붉은 공이 다음 그림과 같이 하나씩 있다고 가정하고, 진이의 '뱅크샷' 실력 향상에 도움을 줄 방법을 생각해보자.



1. 당구대 위에 당구공들이 다음 그림과 같이 있을 때, 먼저 진이는 큐대로 흰 공을 쳐서, 흰 공이 당구대의 모서리를 맞추지 않고 곧바로 붉은 공을 맞추게 하려고 한다. 흰 공이 붉은 공을 곧바로 맞추는 방법을 찾고, 이때 흰 공이 지나게 되는 경로를 식으로 나타내어 보시오.