한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 3, 561-582, September 2013

수학적 모델링문제 해결에서의 의미에 관한 연구

김창수[1)]

그동안 수학교육에서 의미는 강조되었지만 의미가 뜻하는 것이 무엇인지, 어떻게 분류될 수 있는지는 명확하게 규정되지 못하였다. 이러한 입장에서 의미를 표현적 의미와 인지적 의미로 구분하였으며, 두 의미도 수학적 상황과 현실적 상황으로서의 의미로 다시 재분류 하였다. 의미의 분류를 기반으로, 본 연구에서는 수학적 모델링문제 해결에서 보이는 학생의 의미 인식에 대해 살펴보았다. 그 결과 다른 의미의 이해에 비해 현실적 상황의 인지적 의미 이해에서는 상대적으로 어려움을 겪는다는 것을 알게 되었으며, 식을 세우는 단계에서의 의미보다 풀이과정에서의 의미 이해에 더 어려움을 겪는다는 것을 알게 되었다. 따라서 수학적 모델링의 전 과정에서 의미의 이해를 돕기 위해, 학생이 실생활 상황과 수학을 연결 지어 사고하도록 지도하여야 하며, 측정과 단위를 통한 지도 방법이 실생활 상황과 수학의 연결을 위한 하나의 방안이 됨을 알 수 있었다. 이러한 현실 상황과 수학의 연결을 강조한 지도를 통해 더 폭넓은 수학의 활용이 가능하리라 생각된다.

주요용어 : 수학적 모델링, 의미, 표현적 의미, 인지적 의미, 측정, 단위

Ⅰ. 서론

수학은 인류의 역사와 함께 시작하여 오늘날의 문명과 문화를 이루는데 근본적인 밑거름이 되어오고 있다. 자연과학이나 공학적 현상을 설명하고 표현하는 것은 물론이고, 사회 현상을 이해하고 예측하기 위해서도 수학은 중요한 도구로 사용되고 있다. 이런 이유에서 수학은 우리의 삶 전체와 관련되며 과학적 의사소통을 위한 가장 합리적인 언어라 할 수 있을 것이다. 그러므로 수학은 다른 교과의 학습이나 생활 주변에서 부딪히는 여러 문제를 능률적이고 합리적으로 해결하고 그 결과를 활용할 수 있는 능력을 기르는 것을 목적으로 한다고 할 수 있다. 이러한 입장에서 보면 수학은 실생활 상황의 이해와 합리적 해결에 강조점을 가지는 교과라 할 수 있겠다.

현실 상황과 수학의 연결을 강조한 연구의 대표적인 분야로는 수학적 모델링이 있으며, 많은 연구자들에 의해 수학적 모델링에 관한 연구가 진행되어 오고 있다. 그동안의 연구 결과로 수학적 모델링문제가 학교수학에서도 다루어지고 있으며, 그 활용의 폭을 점차 넓혀가고 있다. 선행연구자들은 수학적 모델링은 실생활의 현상에서 출발해야하며 수학적 구조를 가져야 한다고 하고 있다. 수학적 모델링문제가 현실 상황을 그 출발점으로 한다는 점에서

---

1) 경상대학교사범대학부설중학교(cupncap@gmail.com)

보면 현실 상황의 다양한 맥락에서 수학과의 연결을 찾아야 할 것이다. 하지만 수학적 모델링 과정은 현실 상황을 수학적 구조로 변경한 후, 그것을 수학적으로 해결하여 해를 구하고, 구한 해를 다시 현실 상황과 연결하도록 지도되고 있다.

그러나 수학적 모델링 과정에서 수학적 구조로 변경한 후부터, 현실 상황과 괴리되어 수학적으로만 다루어지는 것은 현실 상황을 다루는 것이라 하기 어려울 것이다. 더욱이 수학적 지식을 실생활에 적용한다는 측면에서 보면 더더욱 어울리지 않는 과정이라 할 수 있겠다. 현실 상황을 이해하고 해석하기 위한 도구로 수학이 사용되었지만 수학에 사용된 기호나 수식의 현실적 의미를 알지 못하는 것은 이해의 한 면만을 강조한 것이라 할 수 있을 것이다. 이러한 이유에서 수학적 모델링은 모든 과정에서 실생활과의 연결을 강조해서 지도하여야 할 필요가 제기된다.

하지만 수학적 모델링문제의 해결과정은 이미 수학적 구조로 가져온 것이므로 순수한 의미 그대로의 현실 상황으로 해석되기는 쉽지 않을 것이다. 그 방안으로 측정과 단위를 고려한 학습을 생각할 수 있다. 측정은 현실 세계의 한계를 극복하기 위한 활동이므로 그 근간은 현실 상황에 있다고 할 수 있으며, 단위는 측정 활동을 통해 생성되며 단위를 이용하여 측정 활동은 이루어지게 된다. 그러므로 현실 상황과 수학의 연결을 위해 측정활동이 수반된 수학적 모델링문제의 해결에서, 학생이 단위를 어떻게 사용하며 인식하는지에 대한 관심은 더 높아져야할 것으로 판단된다. 따라서 수학적 모델링문제 해결에서 학생이 단위와 식을 어떻게 연결 짓고 이해하는지를 살펴보는 것은 의미 있는 연구가 되리라 생각된다.

김창수(2013)는 학교수학에서 학생들은 수를 단위와 연결하여 다루는 것에 주목하지 못하고 있으며 알고리즘적 풀이에만 집착하고 있다고 하였다. 문제 상황에 주목하게 하지 않고 논리적 엄밀성을 통한 풀이와 그 해의 정당성만을 강조한 나머지, 학생들은 이미 학습한 측정과 단위를 문제 상황에 제대로 연결하지 못하고 있으며, 그로 인해 알고리즘적 해법만 추구하는 것이라 판단된다. 이러한 수학적 엄밀성과 논리성의 지나친 강조로 인해 이미 학교에서 배운 지식을 실제 상황에 활용하기는 어려우며 수학은 수학 내에서만 존재하는 것이라는 믿음을 갖게 되는 기현상이 발생되는 것이라 생각된다. 그러므로 수학의 현실 상황 적용을 위해, 교수・학습 상황은 실생활로의 활용을 염두 해서 이루어져야 하며, 수학적 기호, 식 등을 실생활과 연결하여 그 의미가 무엇인지 살펴보게 하는 것은 매우 중요하다 하겠다.

의미는 수학적이든 수학 교육적이든 많은 연구자들에 의해 이미 지속적으로 강조되어 오고 있으며, 계속적으로 그 중요성은 언급될 것으로 생각된다. 이러한 의미에 대한 대표적인 연구자는 Brownell을 들 수 있으며, 그는 수학을 이해 가능한 개념, 원리, 과정간의 긴밀한 체계로 보고 개념과 구조와의 관계를 중시하며 의미의 이해를 강조하였다. 류근행(2004)은 Brownell에게 이해와 의미는 본질적으로 동등하다고 말하면서 의미의 중요성을 강조하기도 하였다. 기호학적 관점에서 Frege와 Peirce는 의미를 강조하였으며, Frege는 의미를 대상이 마음에 각인되는 방식이라고 하였으며, Peirce는 기호가 사물 혹은 생각을 어떻게 표상하는지, 그리고 그 의미가 어떻게 전달되는지의 두 가지 관계를 규정한다고 하였다. Biehler(2005)는 수학적 개념의 의미는 여러 가지 맥락에서 달라지므로, 수학교실은 수학 자신의 개념 의미를 발전시키는데 있어서 폐쇄적이고 자기 재생적인 체제가 되어서는 안 된다고 하였다.

그러나 의미에 대한 많은 연구에도 불구하고, 의미라는 용어가 가지는 복잡성과 자기 참조적 특성으로 인해 명확한 규정과 정의를 찾아보기는 쉽지 않다. 비록 의미라는 용어에 대한 명확한 규정은 어려울지라도 수학 교육적으로 좀 더 체계적으로 다루기 위해, 의미가 수

학 교육적 측면에서 어떻게 분류될 수 있는 지를 살펴보는 것은 매우 가치 있을 것으로 판단된다.

따라서 본 연구에서는 의미의 분류에 기초하여 수학적 모델링문제의 해결과정에서 학생이 보이는 사고과정을 통해, 수학적 모델링문제 해결에서 실생활과 연결된 의미를 학생은 어떻게 인식하는지를 알아보는 것을 목적으로 한다. 연구의 목적을 효율적으로 달성하기 위해 다음과 같은 연구의 문제를 설정하였다.

- 수학 교육적 측면에서 의미는 어떻게 분류될 수 있는가?
- 수학적 모델링문제 해결에서 학생은 수학과 실생활 상황을 어떻게 연결하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

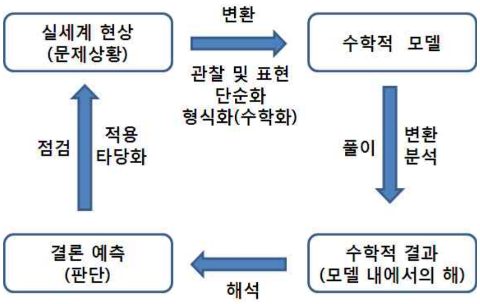
1. 수학적 모델링

국내・외의 많은 학자들에 의해 수학적 모델링에 관한 연구가 꾸준히 수행되어 오고 있으나 연구자들의 관점에 따라 수학적 모델링을 다소 다르게 정의하여 소개하고 있다.

신은주・권오남(2001)은 수학적 모델링을 수학화와 동일시한 Freudenthal의 관점을 수용하여, 수학화는 인간의 창조적 활동의 하나로서 실제적인 상황에서 직관 모델을 만들고, 직관 모델의 탐구에서 수학적 모델을 만들어 내고, 추상화와 형식화를 통해서 수학적 해를 구하고, 구해진 해를 원래 상황에서 반성해보는 피드백 과정을 거치는 학습을 의미한다고 하였다. 김선희(2005)는 수학적 모델은 문제 상황을 수학적으로 묘사한 외적표현의 형식을 가진 상황에 따라 해석될 수 있는 수학적 개념이라고 하였으며, 수학적 모델링의 결과는 수학적 구조, 패턴, 규칙성에 초점을 둔 복합적인 수학적 모델이라고 하였다. 김선희・김기연(2004)은 실생활 상황을 수학적 용어로 묘사하고 예측하고 이에 대한 이해를 얻는 과정으로 수학적 모델링을 정의하여 소개하였다.

장혜원(2003)은 수학적 모델링은 그 출발을 실생활의 일상적인 현상과 같이 문맥상 수학적이지 않은 듯 해 보이는 현상에서 시작한다는 특성을 지녀야 한다고 하였다. Swetz & Hartzler(1991)는 수학적 모델은 어떤 현상의 특성들에 근접하는 수학적 구조이며, 그것을 고안하는 과정이 바로 수학적 모델링이라고 하였다. 또 김수미(1993)는 실 상황의 모델을 구성하여 실 상황 문제를 해결하는 전체의 과정을 수학적 모델링이라 하였다. 그 외의 많은 연구자들(안종수, 2012; 권기석・박배훈, 1997 등)도 수학적 모델링의 출발점을 현상에 두고 현상의 단편을 탐색해 내는 것으로 그 의미를 부여하고 있다.

김인경(2012)은 2001년 이후 국내의 모델링에 관한 연구를 분석하면서 수학적 모델링 과정은 주로 '실세계 탐구→상황 모델 개발→수학 모델 개발→모델 적용'의 네 단계로 정의된다고 하였다. 그에 따르면 실세계 탐구의 과정은 실세계 맥락을 탐구하는 과정이며, 상황 모델 개발 단계는 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적인 상황 모델을 개발하는 과정, 수학 모델 개발의 단계는 상황 모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학 모델을 개발하는 과정이며, 마지막 모델 적용의 단계는 수학 모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석, 수정, 정교화 하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 과정이라 하였다. 이러한 수학적 모델링의 4단계를 그는 다음과 같이 도식화하여 <그림 1>과 같이 나타내었다.



[그림 1] 수학적 모델링 4단계

황혜정(2007)은 국내의 수학적 모델링 연구를 메타 분석하여 수학적 모델링 과정으로 만들어진 문제의 특징을 도출하였다. 그에 따르면 수학적 모델링문제는 다음과 같은 특징을 갖고 있다.

첫째, 수학적 모델링문제는 선행 지식을 기반으로 고차원적인 인지활동을 요구한다.

둘째, 수학적 모델링문제의 출발과 종착은 실세계 현상이다.

셋째, 문제에 적합하면서도 고유한 수학 모델의 형성을 수반한다.

이상에서 살펴본 바와 같이 연구자마다 수학적 모델링의 정의와 의미는 다소 다르게 소개되고 있다. 하지만 이들의 정의 대부분은 수학적 모델링은 실세계의 현상에서 출발해야하며 수학적 구조를 가지고 있어야 함을 강조하고 있다. 이러한 이들의 의견을 종합하여 본 연구에서는 실세계 상황을 수학적 용어와 구조로 묘사하고 예측하고 해를 구하여 점검하면서 실생활 상황에 대한 이해를 얻는 과정을 수학적 모델링으로 사용하고자 한다. 또한 수학적 모델링문제는 수학적 모델링 과정을 통해 생산된 문제 즉, 실생활 상황을 수학적 구조를 가진 문제의 형식으로 기술된 것 모두를 지칭하는 것으로 사용하겠다.

2. 문제해결과 수학적 모델링

Lesh & English(2005)에 따르면 전통적으로 문제해결은 주어진 것에서 목표를 찾아가는 경로가 명확하지 않는 상황에서 적절한 경로를 찾아가는 것으로 정의되고 있으며, 수학적 모델링 관점에서의 문제해결은 문제 해결자가 상황에 대해 사고한 것을 좀 더 생산적인 방법으로 발달시키는 것이 필요할 때, 목표에 도달하기 위한 직접적인 활동이 문제가 되는 것이라 하였다. 김선희・김기연(2004)은 전통적 관점에서 문제해결은 인위적이고 비실제적인 방법으로 제한된 사실과 규칙을 사용하여 질문에 답하는 것이지만, 수학적 모델링 관점에서 문제해결은 조건, 목표, 가능한 해의 경로, 사물에 내재된 패턴과 규칙을 해석하는 유용한 방법을 발전시키는 것과 관련되며, 해를 구하기 위해 서술, 설명, 예측이 점차 세련되고 정교해지는 여러 과정이 포함된다고 하였다. 또 그들은 수학적 모델링은 현상 내지 실생활 상황에서 문제를 도출하고, 그 문제를 수학적으로 해결하여 다시 현 상황으로 해석하는 과정을 거치게 하여 학생들로 하여금 수학적 모델링을 통해 수학이 실생활에 응용됨을 알 수 있고, 현실 상황을 수학적 모델로 바꾼 후 수학문제를 해결한다는 점에서 문제해결력이 향상될 수 있다고 하였다.

신은주・이종희(2004)에 따르면 전통적인 문제해결은 문제에 제시된 기호적으로 서술된 상황의 의미를 이해하여 문제의 해를 구하는 반면, 모델링 과정에서는 유의미한 상황에서 기호적인 서술을 하게 되므로 강조되는 능력이 다르다고 하였다. Swetz & Hartzler(1991)는 수학적 모델링은 문제해결 학습과 공통적 특징을 가지지만 수학적 모델링 상황에서는 수학적이지 않는 형상이 존재하며 이것이 반드시 모델화되어야 한다고 강조하고 있다. 이러한 입장에 따르면 전통적 문제해결에서의 의미 이해는 기호적 상황에서의 의미를 안다는 것이지만, 수학적 모델링에서는 기호적 상황과 현실적 상황에서의 의미를 함께 안다는 것임을 알 수 있다. 따라서 수학적 모델링에서 의미는 전통적인 문제해결보다 더 많은 상황을 고려해야 하므로 더 면밀히 세분화되고 엄밀하게 다룰 필요가 있음을 알 수 있다.

이상에서 살펴본 것과 같이 전통적인 문제해결과 수학적 모델링 관점의 문제해결의 명확한 구분은 수학적 모델링의 정의가 하나로 통일되어 통용되고 있지 않는 현 상황에서는 결코 쉬운 문제라 할 수는 없을 것이다. 하지만 수학적 모델링을 통해 수학이 실생활에 응용됨을 알 수 있고, 현실 상황을 수학적 모델로 바꾼 후 수학 문제를 해결한다는 점에서 보면 수학적 모델링 관점의 문제해결은 전통적 관점의 문제해결력을 향상시킬 수 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서는 수학적 모델링 관점에서 문제해결 과정의 고찰을 통해 전통적 관점의 문제해결력을 증가시킬 수 있을 것이라는 관점으로 접근하고자 한다.

3. 실생활 상황과 측정, 단위

이미 살펴본 바와 같이 수학적 모델링은 실생활의 상황에서 출발하여, 수학적 구조로 해석하고 해결한 뒤 다시 실생활 상황으로 해석해 내는 일련의 과정이라 하였다. 실생활 상황을 수학적 구조로 해석하기 위해서는 많은 고려 점들이 필요하겠지만 그 중 한 가지는 양과의 관련에 있다고 할 수 있다.

실생활 상황의 문제들은 양을 다루어야 할 경우가 많으며 이를 효율적으로 해결하기 위해 수와 수학적 구조가 동원되는 것이라 할 수 있다. 김수환 외(2009)는 양을 엄밀하게 정의하기는 어려우나 사물을 크기의 관점에서 관찰할 때, 관측자로 하여 대소의 차이를 느끼게 하는 추상개념이라고 하였다. 이러한 관점에서 모든 사물은 양을 가진다고 할 수 있다.

모든 사물은 양을 가지며, 양은 크기와 대소와 관련되므로 결국 측정과 관련된다. 측정에 관해 김수환 외(2009)는 보통 이산량의 수치화 과정을 '센다(counting)'라고 하며, 연속량을 수치화하는 과정을 '측정(measurement)'이라 한다고 하였다. 세기는 이산량의 개수를 구하는 것이므로 일정한 이산량 한 개를 단위로 하여 단위에 대한 개수를 나타내는 것이 되며, 측정은 단위에 대한 배를 구하는 것이 된다. 측정이라는 것이 단위에 대한 주어진 수를 구하는 것이라는 입장에서 보면 세기 또한 큰 범주의 측정으로 볼 수 있다. 결국 측정은 단위를 이용한 조작활동이며 단위를 통해 측정이 이루어지게 되는 것이다. 그러므로 단위를 통한 측정활동은 수 개념의 기원이라 할 수 있으며, 수학의 출발점이라고 할 수 있다. 이러한 이유에서 실생활 상황과 수학적 구조의 연결은 양의 측정과 단위의 인식에서부터 시작된다고 할 수 있다.

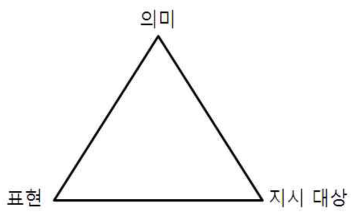
이상에서 살펴본 바와 같이 실생활과 수학의 연결의 출발점은 측정이라 할 수 있으며, 측정은 단위에 기반 함을 알 수 있다. 그러나 본 연구에서는 수학적 모델링문제를 [연구의 문제]로 하므로 문제 해결자가 직접 측정활동을 수행하지는 않으므로 임의단위를 단위로 지칭하지 않으며, 일상에서 자주 사용하는 보편단위인 측정단위(1㎝, 1㎞, 1㎏ 등)를 단위로 생각하도록 하겠다.

Ⅲ. 수학 학습에서의 의미에 대한 고찰

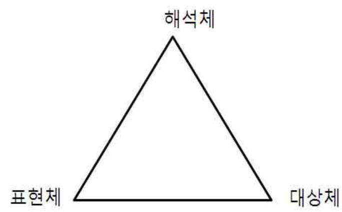
많은 수학교사들과 수학교육 연구자들은 수학에서 기호, 식, 정의 등에 관하여 학생들이 그 의미를 이해하는 것은 매우 중요한 일임을 강조하고 있다. 수학교육에서 의미를 강조한 연구는 학습에서의 의미, 기호학적 관점, 인식론적 관점으로 나누어 살펴볼 수 있다.

학습에서 의미를 강조한 가장 대표적인 연구자는 Brownell(1935)이라 할 수 있다. 그는 산술 학습에서의 의미를 강조하면서, 개념들 간의 관계에 강조를 둔 의미의 지도 없이 연습만을 강조하는 것은 수학은 서로 관련 없는 독립된 요소들의 더미에 불과한 것이라는 인식만 심어줄 뿐이라고 말하였다. 류근행(2004)은 Brownell에게 의미란 결국 이해와 동일한 것이라고 하였으며, 의미와 이해가 동일하게 다루어질 수 있는 이유에 대해 Sierpinska(1996)는 이해의 대상과 의미의 대상이 같기 때문이라고 하였다. 이후 Engen(1949)은 Brownell의 의미를 수학을 이해하는데 사회현상에서 보이는 사회적 의미와 수학의 구조적 측면에서 보이는 구조적 의미로 확대하여 소개하였다.

기호학적 관점에서의 의미에 대한 연구는 Frege와 Peirce가 대표적이다. 조수경(2008)은 Frege는 의미와 표현 그리고 지시체의 의미론적 삼각형을 통해 의미를 강조하였으며, 표현의 지시체는 표현이 지시하는 대상이며 의미는 대상이 마음에 각인되는 방식이라고 하였다. 여기서 Frege의 의미와 지시 대상, 표현 사이의 상호 과정은 주어진 자료의 의미를 규칙과 구조, 관계 등의 측면에서 파악하고 문자 기호로 표현하며, 기호에 대한 조작이 어떤 의미를 갖고 원래 문제에서 제시한 자료와 어떻게 관련되는가를 파악하는 활동을 말한다. 김성준(2004)은 대수에서 기호 해석과 관련하여 일어나는 사고 과정의 변화는 의미, 표현, 지시 대상 사이의 상호 작용을 틀로 하여 파악할 수 있다고 하였다. 또 Peirce는 기호를 사물 혹은 생각이 어떻게 표상되는지, 그리고 그 의미가 어떻게 전달되는지의 입장에서 표상과 의미의 관계로 규정하였다. 김선희・이종희(2003)는 Peirce의 기호의 삼원적 관계에서 시각과 같은 감각을 통해 얻을 수 있는 표현으로 기호를 나타낸 것이 표현체이고, 기호가 대신하고 있는 것이 바로 대상체이며, 기호에 의해 떠오르는 생각이 바로 기호의 해석체라 하였다. 그러므로 기호는 표현체에 대응하고 대상은 지시체에 대응하며 해석체는 의미와 대응한다고 할 수 있다. 이러한 Frege와 Peirce의 삼각형 모델을 그림으로 나타내면 다음의 <그림 2>, <그림 3>과 같다.



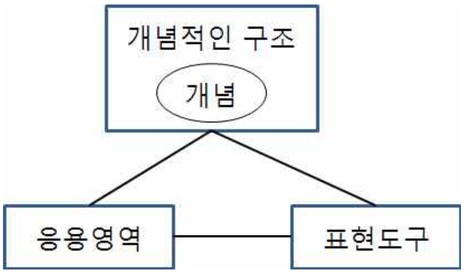
[그림 2] Frege의 의미론적 삼각형



[그림 3] Peirce의 삼원론적 기호모델

인식론적 관점의 개념 의미에 대한 연구는 Biehler(2005)에서 찾아볼 수 있다. 그는 수학적 개념의 의미는 여러 가지 맥락에서 달라지며, 수학교실은 수학 자신의 개념 의미를 발전

시키는데 있어서 폐쇄적이고 자기 재생적인 체제가 되어서는 안 된다고 하였다. 이러한 주장은 교실에서 구성되는 의미는 실제와 학교 외부의 의미와 관련되어져 지도되어야 하는 것임을 강조한 것이라 할 수 있다. 또 그는 다양한 학문의 분야, 사회의 실제 그리고 역사에서 개념에 대한 사용은 그러한 개념의 매우 포괄적인 의미 조망의 일부분으로서 고려될 수 있다고 하였다. 이러한 입장에서 그는 의미가 새로운 적용에 의해, 새로운 개념적인 관계에 의해, 또는 새로운 표현에 의해 변한다고 하였으며 수학적인 개념의 의미를 논의하는데 사용하였던 Steinbring(1994)의 인식론적 삼각형을 변형시켜 다음 <그림 4>와 같이 소개하였다.



[그림 4] 인식론적 삼각형 변형

국내에서도 의미를 강조한 연구는 지속적으로 이루어져 오고 있으며, 많은 연구에서 의미가 강조되고 있다. 최근 수학 학습에서 의미를 강조한 연구로는 김창수(2012)와 전영배・노은환・김대의・강정기(2013) 등이 있다. 김창수(2012)는 일반화 과정과 그 정당화에서 이해를 논하면서 본질적 의미의 이해를 강조하였으며, 전영배・노은환・김대의・강정기(2013)는 문제의 속성이 갖는 의미를 음미해 봄으로써 문제에 대한 더 깊은 이해와 문제 구조를 더 잘 알게 될 것이라 하였다. 기호학적 관점에서 의미를 강조한 연구는 김선희・이종희(2003), 송상헌・신은주(2007) 등이 있다. 김선희・이종희(2003)는 의미를 학습 과정에서 성장시키는 활동이 해석화라고 하였으며, 송상헌・신은주(2007)는 초등수준 영재의 추상화 과정에서 기호의 의미 작용 과정을 돕는 지도방안을 제안하였다.

많은 이들의 연구에서 의미의 중요성과 수학 교수 상황에서 강조되어야 함은 주장하고 있지만, 의미의 명확한 정의나 설명을 찾아보기란 쉽지 않다. 이러한 의미에 대해 서울대학교 교육연구소(1995)에서는 언어나 기호를 사용할 때의 의도나 목적을 뜻하기도 하고, 지시나 언급의 대상을 일컫기도 하며, 정의나 번역과 같은 뜻으로 쓰이기도 하고, 언어적 행동의 인과관계에서 원인이나 결과를 가리킬 때도 있다고 설명하고 있다. 또 그들은 의미에 관한 주장이나 의미의 이해방식이 다양한 것은, 발언자와 해석자의 관점의 구별, 인어나 기호의 특수성과 보편성의 문제, 언어의 용법의 다양성 등으로 인한 것이라 설명하고 있다. 이러한 의미에 대한 명확한 정의의 어려움을 Sierpinska(1996)는 의미라는 용어는 자기 참조적 특성을 갖기 때문이라고 설명하고 있다.

서울대학교 교육연구소(1995)는 의미를 분류하여 표현적 의미, 인지적 의미 그리고 정의적 의미로 다음과 같이 소개하고 있다.

표현적(expressive) 의미 : 감정적·상상적·의지적 특징이 표현되는 경우에 그것을 표현적 의미라고 한다.

인지적(cognitive) 의미 : 어떤 언어나 기호 혹은 표현이 무엇을 서술하거나 주장할 때 그 진위(眞僞)의 분별이 가능할 경우 그 내용을 인지적 의미라고 한다.

정의적(emotive) 의미 : 일종의 표현적 의미에 속하는 것으로 태도나 감정을 주고받거나 의지를 고취시키는 기능을 하는 능력을 말한다.

이러한 세 가지의 의미는 수학 학습에서 언급되는 의미와 크게 다르지 않으며 그 맥을 같이한다고 볼 수 있다. 수학 학습의 입장에서 세 의미를 살펴보면 기호나 문장이 지칭하는 대상물을 아는지와 관련되는 것은 표현적 의미로, 명제의 진위와 수학적 절차의 옳고 그름의 구별하게 해주는 것은 인지적 의미 그리고 의사소통상황에서 감정 또는 의지와 관련된 것을 정의적 의미라 할 수 있겠다.

이상에서 살펴본 것과 같이 의미의 명확한 규정은 의미가 갖는 용법의 다양성과 자기 참조적 특징으로 인해 한 문장으로 기술되기는 어렵지만, 언어나 기호의 의도나 목적, 지시나 언급의 대상 정의나 번역, 인과관계에서 원인이나 결과를 이르는 용어로 본 연구에서 사용하겠다. 또 의미가 대상물의 이해와 관련될 때 표현적 의미로, 진위에 관련될 때 인지적 의미로 다소 분명히 구분하여 사용하도록 하겠다. 그러나 정의적 의미는 본 연구와는 그 성격을 달리하므로 본 연구에서는 다루지 않겠다.

이러한 입장에서 표현적 의미는 학습 상황에서 ‘무엇’과 관련된다고 할 수 있으며, 인지적 의미는 ‘왜’와 관련된다고 하겠다. 그러나 교실에서 구성되는 의미는 실제와 학교 외부의 의미와 관련되어져야만 한다는 Biehler(2005)의 입장에서 이러한 의미는 두 가지로 다시 분류되어야 함을 알 수 있다. 수학을 배우고 가르치는 입장에서의 의미 즉, 수학적 상황에서와 학교 외부에서 다루는 의미 즉, 현실적 상황에서가 그것이다. 따라서 본 연구에서 표현적 의미를 수학적 상황에서와 현실적 상황에서의 표현적 의미로 구분하며, 인지적 의미 또한 수학적 상황에서와 현실적 상황에서의 인지적 의미로 분류하여 다루도록 하겠다.

세 도시A, B, C와 세 도시간의 거리를 각각 a, b, c로 나타낸 삼각형을 예로 표현적 의미와 인지적 의미를 수학적 상황과 현실적 상황으로 구분하여 살펴보자. 이 삼각형에서 A, B, C는 꼭짓점이고 a, b, c는 변의 길이임을 이해하는 것은 수학적 상황에서의 표현적 의미를 아는 것이며, a, b, c는 모두 양수이어야 됨을 아는 것은 수학적 상황에서의 인지적 의미를 아는 것이라 할 수 있다. 또 $c < a+b$임을 이해하는 것도 수학적 상황에서 인지적 의미를 이해한 것이라 할 수 있다. 이에 반해 A, B, C 세 도시를 나타내며 a, b, c는 세 도시간의 거리를 나타낸다는 것을 아는 것은 현실적 상황에서의 표현적 의미를 안다는 것이다. 또 B도시에서 A도시로 가기위해 C도시를 거쳐 가는 것은 바로 가는 것보다는 더 멀다는 것을 아는 것은 현실적 상황에서의 인지적 의미를 안다고 할 수 있다.

Ⅳ. 수학적 모델링문제 해결에 대한 사례연구

1. 학생의 실태

본 연구에서의 학생은 현재[2] 경남 진주시 K중학교 2학년에 재학 중인 남학생으로, K과학고등학교 영재교육원을 다니고 있으며, 학기 중에는 본교에서 실시하는 영재학급에서 수학과 과학을 공부하고 있는 학생이다. 수학 성적도 우수하여 중학교 입학이후 2학년 1학기 과정까지 수학교과에 항상 높은 성취력을 보이고 있으며, 많은 부분에서 수학에 대한 소양이 뛰어난 학생이다. 학생은 온순한 편으로 차분하고 생각하기를 좋아하며, 자신의 생각을 조리있게 설명할 수 있다. 학생과 연구자는 한 학기 동안 수업을 함께해 오고 있으며 서로 간에 충분한 래포(Rapport)가 형성되어 있다.

학생은 이미 중학교 2학년 1학기를 마친 상태이므로 연립방정식과 연립부등식, 일차함수 단원의 활용영역에서 수학적 모델링문제의 해결을 경험하였다. 본 연구에서의 [연구의 문제]는 중학교에서 방정식의 활용 영역으로 지도되고 있으며, 학생들이 어려워하는 영역 중의 하나이다. 또 본 연구는 학교 교육에서의 주안점과는 달리 학생이 문제해결 과정에서 실생활 현상을 어떻게 이해하는지를 알아보기 위해 수행되므로 어느 정도의 수학적 소양이 갖춰진 학생이 필요했으며, 학생의 사고를 알아보기 위해 면담을 실시하므로 자신의 생각을 조리 있고 차분하게 설명할 줄 아는 학생이 필요하였다. 이러한 이유로 이 학생은 본 연구를 위해 적절하다고 판단하여 대상자로 선정하였다.

2. 연구의 문제

본 연구에 사용될 [연구의 문제]는 수학적 모델링문제로 실생활 현상을 포함하여야 하며 수학적 구조를 가지고 있어야 한다. 또한 학생의 수학적 상황과 현실적 상황에서의 표현적 의미와 인지적 의미의 이해를 알아보는 것이 본 연구의 주안점이므로, 학생에게 낮선 문제보다는 친숙한 문제가 필요하였다. 이러한 이유로 학생의 학교에서 사용하는 수학익힘책에서 수학적 모델링문제인 [연구의 문제1]을 선정하였다. 그러나 면담이 진행되는 과정에서 학생이 [연구의 문제1]은 측정에 기반 하는 문제임에도 단위에 대한 생각에 미치지 못해, 상대적으로 단위가 분명하게 드러나는 문제인 [연구의 문제2]를 사용하게 되었다. 연구에 사용된 두 문제는 학생의 학교에서 사용하는 중학교 수학익힘책2(강신덕 외, 2012)에 있는 문제이다. 수학익힘책에 출제되어 있으며 이미 학습이 완료된 문제이므로 [연구의 문제1,2]는 학생에게 낯설지 않으며, 실생활 현상과 수학적 구조를 포함하고 있어 본 연구에 적절하다고 판단되었다. 익힘책에서 선택된 [연구의 문제1, 2]는 다음과 같다.

[연구의 문제1] 어떤 일을 형이 혼자서 하면 6일이 걸리고 동생이 혼자서 하면 10일이 걸린다고 한다. 이 일을 형이 하다가 도중에 동생이 교대하여 8일 만에 끝냈다. 동생이 일한 날은 며칠인지 구하여라.

[연구의 문제2] 집에서 6km 떨어진 거리를 시속 5km로 걷다가 시속 3km로 걸었더니 총 1시간 36분이 걸렸다. 시속 5km로 걸은 시간과 시속 3km로 걸은 시간을 각각 구하여라.

2) 2013년 7월 현재.

3. 자료수집 및 분석방법

본 연구를 위한 면담은 여름방학 중 오전 4시간의 방과후 수업을 마치고, 점심을 먹은 다음, 14시 이후부터 40여분에 걸쳐 이루어졌다. 면담은 연구자의 연구실에서 이루어졌으며, 방학 중이므로 다른 교사나 학생의 왕래가 없어 학생이 연구에 집중할 수 있을 만큼 충분히 정숙하였으며, 학기 중 자주 왕래하였던 곳이라 편안한 마음으로 면담에 임할 수 있었다.

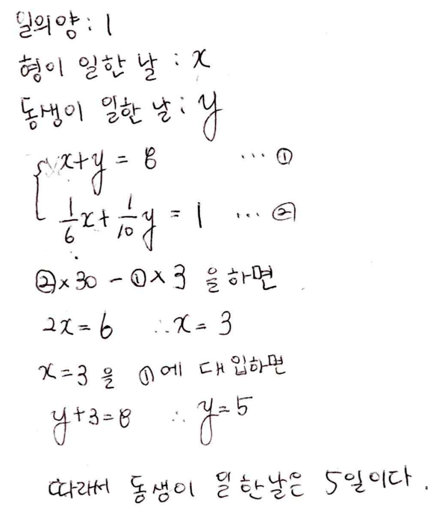
문제를 해결하는 과정은 학생 혼자 힘으로 수행하였으며 그 과정을 연구자는 지켜보고 특기할 내용은 기록하였다. 그런 다음 문제해결이 완전히 이뤄지고 난 후 풀이과정에서 보인 학생의 특기할 행동과 학생은 실생활 상황을 어떻게 해석하고 인지하는지를 의미의 입장에서 알아보기 위해 면담을 실시하였다. 면담 과정에서도 의미에 초점을 둔 학생의 사고를 알아보는 것에 주안점을 두었으며, 학생이 면담 과정에서 다소 어려움을 겪더라도 연구자가 직접적인 언급은 자제하였다.

본 면담 내용에 대한 기록은 학생의 양해를 구해 대화를 연구자가 노트에 기록한 다음, 컴퓨터로 옮겨 타이핑하였다.

본 면담의 분석은 수학적 모델링문제 해결에서 학생이 보이는 표현적 의미와 인지적 의미에 관한 반응을 수학적 상황과 현실적 상황에 초점을 두고 이루어졌다.

4. 사례연구의 실제

학생이 수학적 모델링문제의 풀이에서 전통적인 문제해결의 관점과는 다르게 실생활 현상에 맞추어 해와 풀이과정을 검토하지를 알아보고자, 학생에게 [연구의 문제1]의 풀이를 요구하였다. 학생은 다음 <그림 5>와 같이 풀이하였으며, 학생의 풀이는 문장으로 풀이를 기술한 수학익힘책과 달리 간단히 식으로(②×30-①×3) 표현한 것과 $\frac{x}{6}, \frac{y}{10}$를 $\frac{1}{6}x, \frac{1}{10}y$로 표기한 것 외에는 큰 차이를 보이지 않았으며, 문제해결에 큰 어려움은 보이지 않았다.



[그림 5] [연구의 문제1]의 풀이

연구자는 학생의 풀이방법이 궁금하여 면담을 실시하였으며 그 내용은 다음과 같다.

T1[3]: 그래, 어떻게 푼 건지 설명 해 볼래?
S1: 전체 일의 양을 1로 두고, 형이 일한 날은 x, 동생이 일한 날은 y라 두면 이것처럼 식을 세울 수 있어요. 그런 다음 연립해서 풀면 답이 나와요.

학생의 답안과 "전체 일의 양을 1로 두고, 형이 일한 날은 x, 동생이 일한 날은 y라 두면 이것처럼 식을 세울 수 있다."는 학생의 말 S1에서 식에 대한 수학적 상황으로의 표현적 의미는 잘 이해하고 있음을 알 수 있었다. 연구자는 학생이 수학적 모델링문제에서의 수량을 현실의 양과 연결 지어 생각할 수 있는지가 궁금하였으며, 자신이 세운 두 방정식에서 수량들이 나타내는 수학적 의미와 현실적 의미를 알고 있는지가 궁금하였다. 이런 이유에서 다음과 같이 면담을 실시하였다.

T2: 그렇구나. 그런데 왜 전체 일의 양을 1로 두었지?
S2: 음 편하게 하려고요.
T3: 그게 무슨 말이야 편하게 하다니?
S3: 식이 복잡하지 않게 하려고요.
T4: 그래, 1로 두면 식이 간단해 진단 말이지?
S4: 예.
T5: 그럼, 전체 일의 양을 1 아닌 다른 수로 두어도 된다는 거야?
S5: 예.
T6: 어떤 수로 둘 수 있지?
S6: 음(잠시 생각한 후) 양수이면 모두 다요.
T7: 그럼 전체 일의 양을 3으로 두고 다시 풀어보렴.
S7: 다시 할 필요 없는데.
T8: 왜?
S8: ②식의 $\frac{1}{6}$의 1에다 3을 넣고, $\frac{1}{10}$의 1에다 3을 넣고 이쪽(우변)의 1에도 3을 넣으면 어짜피 모두 3으로 나누어지니 결국 같잖아요.
T9: 그렇구나. 멋진데. 그럼 $\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{10}$은 무엇이니?
S9: $\frac{1}{6}$은 형이 하루에 한 일의 양이고 $\frac{1}{10}$은 동생이 하루에 한 일의 양이에요.

학생은 전체 일의 양은 어떤 값을 두어도 식에는 영향을 끼치지 않아 간단하게 1로 두었다고 S2, S5와 같이 진술하였다. 또한 일의 양을 다른 임의의 양수로 두어도 방정식에는 별 영향을 미치지 않음을 S6에서 진술하였다. 이로서 학생은 현실적 상황으로서 일의 양에 대한 표현적 의미를 잘 알고 있으며, 수학적 상황으로서는 표현적 의미와 인지적 의미까지도

3) 학생의 면담 내용은 S로 연구자의 면담은 T로 표기 하였으며, 분석의 효율성을 고려하연 학생과 연구자를 구분하여 연번을 붙여 나타내었다.

잘 이해하고 있음을 알 수 있었다. 또한 학생이 세운 식에서 각각 $\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{10}$의 표현적 의미를 형과 동생이 하루에 일한 일의 양으로 S9와 같이 정확하게 설명하였다. 이로서 학생은 자신이 세운 식에서도 현실적 상황과 연결 지어 표현적 의미를 정확하게 알고 있음을 알 수 있다. 연구자는 방정식에 사용된 현실적 상황의 의미와 풀이과정에서의 수학적 상황의 의미를 정확히 연결하여 알고 있는지를 알아보고자 하였으며, 이를 위해 다음과 같은 면담을 실시하였다.

T10: 그럼 ①식은 어떤 양을 식으로 나타내었고 ②식은 어떤 양을 나타낸 식이니?
S10: ①식은 일한 날을 나타낸 거고요 ②식은 일한 양을 식으로 나타낸 거예요.
T11: 그래 그렇구나. 그런데 풀이에 ②$\times 30-$①$\times 3$라고 적어 놓았네. 이 두 식이 연산 가능한 거니?
S11: 예, 왜 안되요?
T12: ①식은 날이고 ②식은 일한 양을 나타낸 거라며?
S12: 예, 왜요?
T13: 서로 다른 양인을 나타낸 건데 계산해도 되냐구?
S13: 아! 그렇군요.

학생은 S10에서 자신이 세운 식은 서로 다른 양을 사용하여 기술된 식임을 현실적 상황에서의 표현적 의미로 알고 있지만, 어떻게 서로 다른 두 양이 연산 가능한지는 알지 못하고(S11) 있었다. 또 학생은 서로 다른 두 양을 나타내는 두 식을 연산해도 되는지에 대한 관심은 S12에서와 같이 전혀 보이지 않고 있었다. 이로서 학생은 풀이를 위해 세운 식에서는 현실적 상황으로서의 인지적 의미로 알고 있지만, 풀이과정에서는 현실적 상황으로서의 인지적 의미는 이루어지지 않음을 알 수 있었다.

수학적 모델링문제의 해결을 현실 상황을 수학적 구조로 변형하여 문제를 해결한 다음 그것을 다시 현실 상황으로 환원한다는 입장에서 보면, 풀이과정에서의 양의 비교는 가치 없어 보일 수 있다. 하지만 수학에서도 분명 양을 다루고 있으며, 서로 다른 양의 연산은 불가능하게 처리되고 있다. 이러한 입장에서 풀이과정 속의 양을 어떻게 다루어야 하는지를 살펴보는 것은 매우 중요하다할 수 있을 것이다. 연구자는 학생이 세운 식을 어떻게 양의 관점으로 해석하는지가 궁금하였으며, 이를 알아보고자 양의 관점으로 식이 해석가능한지를 질의하였다.

S14: (한참 생각한 후) 예, 가능해요.
T14: 어떻게?
S15: ①식도 일의 양으로 해석해도 되잖아요.
T15: 그게 무슨 말이야?
S16: 여기 x를 $1\times x$라 생각할 수 있잖아요. 그러면 1을 일의 양이라고 생각하면 $1\times x$는 일의 양이잖아요? y도 그렇게 생각하면 되는데.
T16: 그래, 그럼 ①식을 하나씩 설명해 볼래?
S17: 형이 일한 날 수 더하기 동생이 일한 날 수는 8일이다.
T17: 좀 전에 x는 $1\times x$라 생각해서 일의 양으로 생각한다고 하지 않았니?

S18: 그랬죠. 이상한데. 왜 그렇지? 잘 모르겠어요.
T18: 그럼 x를 $1\times x$라 생각할 때 1은 뭘까?
S19: 1은 형이 하는 일의 양요.
T19: 그럼 $1\times y$에서 1은 뭐야?
S20: 그때 1은 동생이 하는 일의 양요.
T20: 뭐야 아까 1은 전체 일의 양이라며?
S21: 그때 1은 전체 일의 양이고요 x, y앞의 1은 그냥 일의 양 1요.
T21: 그럼 그 두개는 어떻게 달라?
S22: 글쎄요. (잠시 생각 후) 두 개의 1이 같다고 해도 상관없어요.

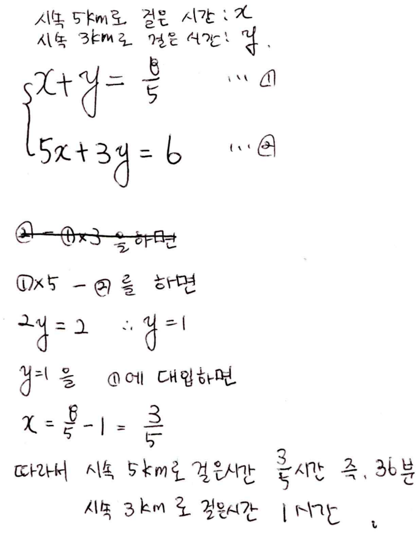
학생은 자신이 세운 두 식의 양의 종류가 달라 연산할 수 없음을 인식하고, ①식을 일의 양에 관한 식으로 재해석(S15, S16)하려 하였다. 그러나 이 과정에서 전체의 일의 양 1과 x를 $1\times x$로 해석했을 때, 1을 현실적 상황으로서의 표현적 의미로 제대로 해석하지 못하여 갈등(S18)을 보이고 있었다. 연구자는 ①에서 단순히 x를 $1\times x$로 생각하여 일의 양에 대한 식으로 재해석한다면, 학생은 자신이 세운 ①식 전체를 어떻게 해석할 수 있을지가 궁금하였다. 이를 알아보고자 면남을 실시했으며, 그 내용은 다음과 같다.

T22: 그럼 ①식은 도대체 무엇에 관한 식이야? 일의 양이야 일한 날 수에 관한 식이야?
S23: 일의 양에 관한 식요.
T23: 그럼 ①식을 일의 양으로 설명해봐.
S24: 그러니까, x를 $1\times x$로 생각해서 형이 1만큼 x일 동안 한 일요.
T24: ①식 전체를 설명해봐.
S25: ①식을 $1\times x+1\times y=1\times 8$로 생각해서 1만큼 형이 x일 일하고 1만큼 동생이 y일 만큼 일한 것은 1만큼 8일 동안 일한 것과 같다.
T25: 그렇구나. 그런데 누가 8일을 일했지?
S26: 글쎄요.
T26: 그런데 이때의 1과 전체 일의 양 1과 같은 거야 다른 거야?
S27: 상관없다니까요.
T27: 왜?
S28: 답에는 별 문제 없는데요.

학생은 ①식을 일의 양을 나타내는 현실적 상황으로서의 표현적 의미로 해석하고자 하였으나, 1×8을 해석하는 부분(S25, S26)에서 그 해석이 잘 이루어 지지 않았다. 이로서 학생은 $1\times x+1\times y=1\times 8$의 식 전체를 실생활과 관련하여 표현적 의미로 제대로 알지 못하고 있으며, 현실적 상황으로서의 인지적 의미로도 이해하지 못하고 있음을 알게 되었다.

이후의 면담에서 학생은 서로 다른 양을 연산해도 되는지, 연산이 된다면 어떻게 가능한지에 대한 연구자의 질의에 모르겠다고 답하였다. 그런 다음 학생은 연구자에게 그 이유를 알려 줄 것을 요청하였다. 이에 연구자는 일의 양을 다루는 문제에서는 학생의 학습 수준에서 양의 종류(측정의 단위)가 분명하게 드러나지 않아, 연산 가능성을 알지 못하는 것이 아닐까하는 생각을 하였다. 이런 이유로 양의 종류와 단위가 다소 분명하게 드러나는 거리, 속력, 시간에 관한 [연구의 문제2]를 학생에게 풀이하기를 요구하였다.

학생은 [연구의 문제2]도 별 어렵지 않게 해결하였으며, 풀이과정에서 x와 y중 어느 문자를 소거할지 잠깐의 고민 외는 큰 망설임도 보이지 않았다. 또한 풀이의 과정과 해도 정확했으며 수학익힘책에 제시되어있는 풀이와도 큰 차이를 보이지 않았다. 학생의 [연구의 문제2]의 풀이는 다음 <그림 6>과 같다.



[그림 6] [연구의 문제2] 풀이

연구자는 학생이 [연구의 문제2]에서는 단위가 좀 더 분명히 드러나므로, 현실적 상황을 풀이과정과 연결할 수 있는지와 서로 다른 양의 연산은 어떤 이유에서 가능한지 알 수 있지 않을까하는 기대로 면담을 실시하였다. 그 면담은 다음과 같다.

T28: 그럼 ①과 ②식은 어떤 양을 식으로 세운거야?
S29: ①식은 시간이고요 ②식은 거리예요.
T29: 그렇구나. 그런데 두 식이 연산이 되니?
S30: 안돼요.
T30: 그런데 너는 풀이에서 ①×5－②로 연산했잖아?
S31: 5를 곱했잖아요. 그래서 연산이 되요.
T31: 5만 곱하면 연산이 되는 거야?
S32: 아니요.
T32: 그런데 너는 연산 했잖아.
S33: 그러니까요.

학생은 연구자의 기대와 달리 단위가 분명하게 주어지는 거리, 속력, 시간에 관한 방정식 문제에서도 서로 다른 양을 나타내는 두 식의 연산이 어떻게 가능한지에 대해서는 S30, S32에서 보이는 것처럼 정확히 알지는 못하였다. 이에 연구자는 혹시 학생이 식을 세울 때도 양에 대한 의미를 제대로 알지 못하고 있었던 것이 아닌지 궁금하였으며, 이를 확실히 해보고자 다음과 같이 면담을 실시하였다.

T33: 그럼 ①식은 어떻게 해서 세운건지 설명해 볼래?

S34: 시속 5km로 걸은 시간과 시속 3km로 걸은 시간은 $\frac{8}{5}$시간이다.

T34: 그렇구나. 그런데 그 식은 어디를 보고 세운거야?

S35: (문제의 “시속 5km로 걷다가 시속 3km로 걸었더니 총 1시간 36분이 걸렸다”를 가리키며) 여기요.

T35: 그럼 ②식은?

S36: 시속 5km로 x시간 간거리와 시속 3km로 y시간 간 거리는 6km이다.

T36: 어디를 보고 세운거야?

S37: (문제의 “집에서 6km 떨어진 거리”를 가리키며) 여기요.

T37: 그럼 세운 식에 문제는 있을까? 없을까?

S38: 없는 것 같은데요.

학생은 자신이 세운 식은 어떤 양을 나타낸 것인지(S34, S36)와 문제의 어느 부분을 식으로 표현한 것인지를 알고(S35, S37) 있으며, 현실적 상황으로서의 표현적 의미는 잘 이해하고 있었다. 이러한 의미의 확인과정을 통해 학생은 자신이 세운 식에는 문제가 없음(S38)을 알게 되었다. 연구자는 학생이 식을 세울 때는 잘못이 없음을 알게 되었으므로, 서로 다른 양을 나타내는 두 식을 연산할 때 어떤 조작을 수행하는지를 관심을 갖게 하고자 다음과 같이 면담을 실시하였다.

T38: 그럼 어디서 문제가 생겼을까?

S39: 그 다음이겠죠.

S40: 아~! 알겠어요. 속력이에요.

T39: 속력?

S41: ①×5에서 5는 속력이에요.

T40: 왜?

S42: ①식은 시간이잖아요. 그러니까 속력을 곱해야 ②식과 연산이 되요. 그럼 가능해요.

T41: 정말?

S43: 예. 확실해요.

T42: 그러면 모든 문제가 해결되니?

S44: 예. 분명해요.

T43: 그렇구나. 그런데 그걸 어떻게 알았니?

S45: 거리=속력×시간이잖아요. 그러니까 시간에 속력을 곱하면 거리가 되니까요.

T44: 그렇구나. 그럼 어떻게 하면 그 사실을 확인할 수 있을까?

S46: 그냥 다 맞는데.

T45: 확인할 수 있는 방법은 없어?

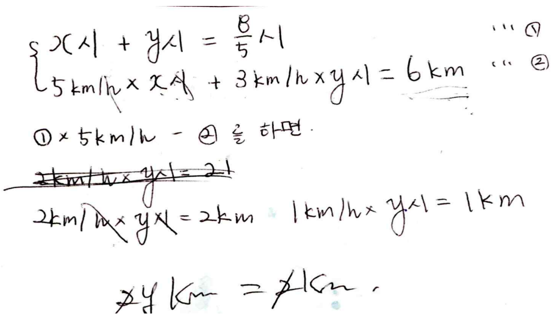
S47: 아~ 단위를 붙여 보면 되요.

학생은 잘못이 어디서 기인한 것인지를 물어보는 연구자의 질문으로, 자신의 풀이를 다시 고찰하던 중 ①×5에서 5는 그냥 단순한 5를 나타내는 것이 아니라 속력을 나타내는 것(S40)임을 알게 되었다. 시간을 나타내는 양과 속력을 나타내는 양 두개가 곱해지면, 그 양

은 거리가 되고 ②식은 거리를 나타내는 식이므로 연산이 가능하다는 사실을 인지(S45)하게 되었다. 또한 학생은 S47에서 그러한 사실은 각 수량에다 단위를 붙여 나타내면 분명히 드러남을 언급하고 있다. 이로부터 학생은 두 식이 왜 연산이 가능한지를 현실적 상황으로서의 인지적 의미로 이해하게 되었다고 판단된다. 이에 연구자는 학생의 풀이에 각 수량마다 단위를 붙여 나타내도록 요구하였다. 단위를 붙여 풀이를 시도하던 학생이 단위를 다루는 생소함으로 다음과 같은 질의를 해왔다.

S48: 그런데 선생님 단위도 약분이 되요?
T46: 왜?
S49: 약분이 되어야 맞아지는데요?
T47: 그래, 그럼 약분해보렴.

이후 학생은 어렵지 않게 단위를 붙여 다음 <그림 7>과 같이 자신의 풀이를 나타내었다.



[그림 7] 단위를 붙여 풀이한 학생의 답

학생은 풀이를 마친 다음, 풀이의 맨 마지막 단계에서 $2ykm = 2km$의 값을 구하는 단계에서 미심쩍은 부분을 발견하고 연구자에게 다음과 같이 질의를 하였다.

S50: 다 했어요. 그런데 지금도 약간 이상해요.
T48: 뭐가?
S51: 맨 마지막에 $2ykm = 2km$에서 2와 km를 약분하면 y=2가 나와요.
T49: 그게 뭐가 이상하지?
S52: 처음 y는 시속 3km로 간 시간이라 두었잖아요? 그런데 2시간이 아니라 2가 나와서요.
T50: 그럼 ①식 x시+y시=$\frac{8}{5}$시 에서 y는 시간이니 그냥 수니?
S53: 시간이라 생각하면 2시간 시간 이니까 이상해지네요. y는 그냥 수네요.
T51: 그럼 뭐가 잘못된 거야?
S54: 처음 미지수를 정할 때, 시속 5km로 걸은 시간을 x로 둘 것이 아니라 x시간 이런 식으로 해야 해요.

S52에서 학생은 처음 미지수를 둘 때 미지수 x,y가 단위를 포함하는 수라 생각하였으나 방정식의 마지막 단계에 y값이 몇 시간으로 나와야하는데 그렇지 않아 당황(S51)해 하였다.

이것으로부터 학생이 식을 세우는 과정까지는 현실적 상황으로서의 표현적 의미를 잘 알고 있다고 생각했지만 미지수를 두는 과정에서부터 표현적 의미의 이해에 다소 문제가 있었음을 알게 되었다. 그러나 학생은 연구자의 간단한 발문(T50)만으로 궁금증을 해결하게 되었으며, 미지수를 둘 때부터 단위에 대한 명확한 생각을 가지고 있어야 함을 S54에서 알게 되었다. 연구자는 학생이 [연구의 문제2]를 통해 확인한 사실을 [연구의 문제1]에도 그대로 적용할 수 있을까를 알아보고자 하였으며, 그 면담은 다음과 같다.

T52: 그럼 처음 문제 일 문제로 돌아가 볼까?
S55: 아니 그럴 필요 없어요.
T53: 왜?
S56: 이 문제를 해보니 그것도 이해됐어요.
T54: 그래, 뭐를 이해했어?
S57: 양이 다르면 연산할 수 없다. 연산하기 위해서는 같은 양으로 바꿔야 한다.
T55: 멋지구나. 그런데 왜 처음에는 그걸 몰랐을까?
S58: 처음 일 문제는 단위가 없어 잘 몰랐는데, 속력 문제는 단위가 있어 생각하기 조금 쉬웠어요. 그래서 알게 되었어요.

학생은 [연구의 문제2]를 단위를 통해 의미적으로 이해한 후, [연구의 문제1]을 다시 살펴보자는 연구자의 말에 [연구의 문제1,2]는 같은 맥락으로 이해 가능하므로 더 이상 살펴볼 필요가 없다고 S55와 같이 말하였다. 또한 일에는 평소 단위를 잘 생각하지 않아 이해하기 어려웠는데 [연구의 문제2]에는 단위가 있어 발견하기 쉬웠음을 S58에서 말하였다.

5. 사례연구의 분석

학생은 [연구의 문제1]의 문제를 해결하라는 연구자의 요구에, 큰 어려움이나 많은 시간을 들이지 않고 수학적으로 완벽하게 문제를 해결해 내었다. 또한 자신이 세운 식과 풀이과정에서의 수학적 상황으로서의 표현적 의미와 인지적 의미는 잘 알고 있으며(S1), 식을 세우는 과정까지는 현실적 상황으로서의 표현적 의미도 정확히 잘 이해(S2, S8, S9)하고 있었다.

그러나 연립방정식의 식을 세운 후 풀이과정에서 서로 다른 양을 연산해도 되는지를 묻는 연구자의 질문(T11)에 의아심(S11)을 가지고 있었다. 이로서 학생은 현실적 상황으로서의 인지적 의미로 풀이과정은 이해하지는 못하고 있음을 알게 되었다. 비록 수학적 모델링이 실생활 상황을 수학적 구조로 가져와 수학적으로 해결한 다음 다시 실생활 상황으로 점검하는 단계를 거치지만, 이러한 수학적 모델링 과정의 각 단계는 독립적으로 이루어진다고 볼 수 없다. 더욱이 풀이에서의 학생의 사고 작용은 동시에 혹은 인식하지 못하는 순간에 이루어진다는 입장에서, 식의 수립과 해의 해석만을 실생활과의 연결을 꾀한다는 것은 어울리지 않게 된다. 이로 인해 학생이 수학의 실생활 적용의 측면에서 더 많은 혼란을 가지지는 않을까 우려된다.

이에 연구자는 학생이 풀이과정을 양과 관련하여 해석하게 하기위해, 자신이 세운 식을 양의 입장에서 해석하기를 요구하였다. 학생은 전체 일의 양 1과 같은 양 1을 사용하여 식

을 해석하려 하였지만 S18의 반응처럼 쉽게 해석하지 못하였다. 더욱이 식 자체를 일의 양으로 재석하려고 한 자신의 방법으로는 문제와도 맞지 않음을 인식하고, 연구자에게 서로 다른 양의 연산 가능성을 알려줄 것을 요구하였다. 이로부터 수학적 모델링 과정 중 수학적 모델과 수학적 결과의 단계에서도 실생활 상황과 연결 지어 그 의미를 이해하도록 지도해야 할 필요성이 있음을 알게 되었다.

연구자는 [연구의 문제1]은 일에 관련된 문제이므로 양의 단위가 분명하게 주어지지 않아 문제와 현실을 연결 짓는 측정을 인지하지 못하여, 현실적 상황으로서의 인지적 의미를 알지 못하는 것이 아닌가 생각하여 단위가 좀 더 분명한 [연구의 문제2]를 학생에게 풀이하도록 하였다. 학생은 [연구의 문제 2]의 풀이에서도 수학적 상황으로서의 표현적 의미와 인지적 의미를 잘 이해하고 있었다. 그러나 풀이과정에서는 [연구의 문제1]과 마찬가지로 현실적 상황으로 인지적 의미를 이해하는 것에는 어려움이 있음을 S30에서 보였다. 이런 이유로 연구자는 학생에게 자신이 세운 식 전체에 대한 현실적 상황으로서의 표현적 의미로 재해석할 것을 요구하였으며, 학생은 어려움 없이 해석(S35, S36)하였다. 이러한 과정을 통해 학생은 분명히 자신이 세운 식에서는 문제가 없음을 S38에서 인지할 수 있었다. 이를 통해 수학적 모델링에서 학생들에게 수학적 구조로 변형된 수식에서 항 하나 하나의 현실적 상황으로서의 표현적 의미를 알게 해주는 것도 중요하지만 식 전체를 현실적 상황으로서 표현적 의미로 이해 하게해 주는 것은 매우 중요하다는 것을 알게 되었다.

학생은 자신이 세운 식에는 문제가 없음을 알게 되었으므로 풀이과정에 주목하게 되었으며, 풀이과정에서 식 전체에 5를 곱하는 것을 살펴본 다음, 5가 속력을 나타내는 양임을 S41에서 발견하였다. 또한 5가 왜 속력인지를 묻는 연구자의 질문 T40에 학생은 단위를 붙여보면 알 수 있다고 S47과 같이 답하였다. 이를 통해 학생은 현실과 연결 지어 자신의 풀이가 옳다는 확신을 가지게 되었음을 알 수 있으며, 현실적 상황으로서의 인지적 의미를 알게 되었다고 판단할 수 있다.

그러나 단위를 붙여 풀이를 재 진술하도록 요구한 연구자의 요구에 학생은 단위도 약분이 가능한지를 S48에서 질의하였다. 이 사실로 많은 수학 학습에서 단위를 다루는 경험은 부족했으며, 이러한 단위를 고려하지 않은 수학 학습은 현실과는 많이 동떨어져 있음을 알 수 있다. 또 학생은 단위를 붙여 풀이하는 마지막 단계에서 자신이 구한 해 $y=2$에서 y는 시간을 나타내어야 하지만 단순한 양만을 나타내고 있어 이상하다(S50, S52)고 하였다. 그러나 곧 자신이 미지수를 둘 때 단위를 고려하지 않음을 발견하고 미지수를 둘 때부터 단위는 신중히 고려되어야 함을 알게 되었다.

이러한 일련의 과정을 통해 수학적 모델링 학습에서 현실과 수학과의 연결은 어느 한 단계에서만 이루어져서는 안 되며, 학생의 의미 이해에 한계를 갖게 해 줄 수 있다는 것을 알게 되었다. 이런 이유에서 현실 상황과 수학과의 연결과 점검은 수학적 모델링 과정 전반에서 이루어 져야함을 알 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 현행 중학교 수학익힘책에서 다루어지는 수학적 모델링문제를 해결하는 과정에서 학생이 보이는 의미의 이해에 관해 살펴보았다. 그동안 수학에서 의미는 강조되었지만 의미가 뜻하는 것은 무엇인지, 의미는 어떻게 분류될 수 있는지는 명확하게 규정되지 못하였다. 이에 본 연구에서는 의미를 언어나 기호의 의도나 목적, 지시나 언급의 대상 정의나 번역, 인과관계에서 원인이나 결과를 이르는 용어로 사용하였다. 또 의미를 표현적 의미와 인지적 의미로 나누어 생각할 수 있으며, 이러한 두 의미도 수학적 상황과 현실적 상황으로 분류될 수 있음을 알 수 있었다.

수학적 모델링문제해결에서 학생은 수학과 실생활 상황을 어떻게 연결하는지를 알아보기 위해 실시한 사례에서는, 학생은 수학적 상황으로서의 표현적 의미와 인지적 의미의 이해에는 어려움을 보이지 않지만, 현실적 상황으로서의 인지적 의미의 이해에서는 상대적으로 어려움을 겪는다는 것을 알게 되었다. 이로서 수학적 모델링문제의 해결에서는 수학적 상황에서의 의미와는 달리 현실적 상황으로서의 의미를 파악하게 하여야 함을 알게 되었다. 또 의미의 이해를 돕기 위해서는 수학적 모델링 과정 전반에서 실생활 상황과 연결 지어 점검하여야 하며, 그 중 측정과 단위를 통한 연결이 한 가지 대안이 됨을 알 수 있었다.

또 실생활 상황과 연결되는 현실적 상황으로서의 의미 지도에서는 식을 세우는 단계에서의 의미보다 풀이과정에서의 의미를 이해하는 것을 학생이 더 어려워하며, 학생들은 표현적 의미보다 인지적 의미 이해에 더 어려워함을 알 수 있었다. 또한 단위를 통한 현실적 상황으로서의 의미 지도를 위해서는 미지수의 선택 단계에서부터 신중히 다루어져야 됨을 알 수 있었다. 이러한 과정을 통해 수학적 모델링의 전 과정에서 실생활 상황과의 연결과 점검은 면밀히 수행되어야할 필요가 있음을 알 수 있었다.

본 연구의 결과는 학업 성취력이 높은 한 학생의 사례를 통해 얻어진 것이므로 모든 학생에게 적용가능하고 확신할 수는 없지만, 이러한 사례의 결과로부터 유사한 사례를 가진 학생의 지도를 위해 다음과 같이 시사점을 유추해 볼 수 있다.

첫째, 수학적 상황의 의미 이해와 현실적 상황의 의미 이해는 서로 다르다.

둘째, 현실적 상황으로서의 표현적 의미의 이해보다는 인지적 의미 이해를 더 어려워한다.

셋째, 수학적 모델링에서 단위를 통한 현실 세계와의 연결은 유의미하다.

넷째, 수학적 모델링 과정의 모든 단계에서 현실과의 연결을 지도할 필요가 있다.

그러나 학생의 수학 학습에서 의미의 강조는 수학적 모델링에서만 주목받아야할 것은 아니라 판단된다. 많은 연구자들이 의미 이해의 중요성을 주장한 것과 같이 수학교육에서 그 가치는 결코 가벼운 것은 아니다. 따라서 다양한 분야에서 지금의 의미에 대한 연구에서 나아가 좀 더 세분화된 연구와 관심이 필요하리라 생각된다. 이런 입장에서 증명과정에서의 논리적 절차를 학생은 어떤 의미로 이해되고 있는지, 또 어떤 의미의 이해가 어려운지에 대한 연구는 매우 가치 있을 것으로 판단되며, 이러한 연구를 후속연구로 제언한다.

참고 문헌

강신덕・홍인숙・김영우・이재순・전민정・나미영(2012). 중학교 수학익힘책2. 서울: (주)교학사.

권기석・박배훈(1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 36(2), 149-159.

김성준(2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위 논문.

김선희(2005). 문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 7(3), 303-318.

김선희・김기연(2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론 유형 및 역할 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 6(3), 283-299.

김선희・이종희(2003). 통계 자료의 정리와 표현에서 중학생들의 기호화와 해석화 과정 분석, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 13(4), 463-483.

김수미(1993). 중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰. 서울대학교 석사학위 논문.

김수환・박성택・신준식・이대현・이의원・이종영・임문규・정은실(2009). 초등학교 수학과 교재연구. 파주: 동명사.

김인경(2012). 수학적 모델링과 수학화 및 문제해결 비교 분석, 한국수학사학회지, 25(2), 71-95.

김창수(2012). 일반화 과정과 그 정당화에서 '이해'의 완전성에 대한 연구- 산술, 기하, 조화평균을 중심으로, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 51(4), 377-393.

김창수(2013). 유한소수의 나눗셈 알고리즘 정리와 그 관련 개념의 일반화에 관한 연구. 경상대학교 박사학위 논문.

류근행(2004). 수학학습에서 이해 및 적용에 관한 연구. 공주대학교 박사학위 논문.

서울대학교 교육연구소 (1995). 교육학용어사전. 춘천: 하우동설.

송상헌・신은주(2007). 수학영재의 추상화 학습에서 기호의 의미작용 과정 사례분석, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 9(1), 161-180.

신은주・권오남(2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 11(1), 157-177.

신은주・이종희(2004). 중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 14(4), 403 - 419.

안종수(2012). 함수 단원의 수학적 모델링 자료를 활용한 수업이 학생들의 학습능력 향상에 미치는 영향, 한국학교수학회논문집, 15(4), 747-770.

장혜원(2003). 중등 수학의 대수와 함수 영역에서의 모델링, 청람수학교육, 11, 41-65.

전영배・노은환・김대의・강정기(2013). 의미 분석을 강조한 문제설정 모형 설계하기, 한국학교수학논문집, 16(2), 283-407.

조수경(2008). 초등학교 6학년 수학영재들의 기호감각 분석. 경인교대 석사학위 논문.

황혜정(2007). 수학적 모델링의 이해-국내 연구 결과 분석을 중심으로, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 9(1), 65-97.

Brownell, W. A.(1935). Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic. In W. D. Reeve(Ed.), The Teaching of Arithmetic, the 10th Yearbook of the NCTM(pp. 1-31), Newyork: Columbia University Teachers College Publications.

Biehler, R.(2005). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example, Meaning in Mathematics Education, Mathematics Education Library. 37, pp. 61-81.

Swetz, F., & Hartzler, J. S.(Eds.).(1991). Mathematical Modeling in the Secondary Classroom. Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. & English, L.(2005). Trends in the Evolution of Models & Modeling Perspectives on Mathematical Learning and Problem Solving, In H. L. Chick & J. L. Vincent(Eds.), Proc. of the 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education(Vol. 1, pp. 192-196). Melbourne: PME.

Sierpinska, A.(1996). Understanding in Mathematics. 권석일・김성준・남진영・박문환・장혜원・한대희・홍진곤 역. (2010). 수학에서의 이해. 서울: 경문사.

Steinbring, H.(1994). Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education. in Biehler R., Scholz R. W., Straesser R. & Winkelmann B.(Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline(pp. 89-102), Dordrecht Kluwer Academic Publishers.

Van Engen, H.(1949). An Analysis of Meaning in Arithmetic, Elementary School J. 49(6), pp. 321-329.

A Study on Meaning in Solving of Mathematical Modeling Problem

Kim, Chang Su[4)]

Abstract

Meanwhile, the meaning has been emphasized in mathematics. But the meaning of meaning had not been clearly defined and the meaning classification had not been reported. In this respect, the meaning was classified as expressive and cognitive. Furthermore, it was reclassified as mathematical situation and real situation. Based on this classification, we investigated how student recognizes the meaning when solving mathematical modeling problem.

As a result, we found that the understanding of cognitive meaning in real situation is more difficult than that of the other meaning. And we knew that understanding the meaning in solving of equation, has more difficulty than in expression of equation. Thus, to help students understanding the meaning in the whole process of mathematical modeling, we have to connect real situation with mathematical situation. And this teaching method through unit and measurement, will be an alternative method for connecting real situation and mathematical situation.

Key Words : Mathematical Modeling, Meaning, Expressive Meaning, Cognitive Meaning, Measurement, Unit

Received August 20, 2013
Revised September 23, 2013
Accepted September 26, 2013

4) The middle school Affiliated with G.S.N.U (cupncap@gmail.com)