한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 4, 927-941, December 2013

유추를 활용한 코사인 법칙의 일반화 지도방안

김성수[1] · 박달원[2]

본 연구에서는 고등학교 학생들이 삼각형에 대한 코사인 법칙으로부터 사각형과 n각형에 대한 코사인 법칙을 유추적 사고를 통하여 발견하는 과정을 조사하였으며 삼각형에 대한 코사인 법칙에 대한 충분한 이해가 일반화된 법칙을 발견하고 증명하는데 어느 정도 영향을 미치는지를 분석하였다. 이와 같이 귀납적 추론이나 유추적 사고 활동을 통해 학생 스스로 지식을 발견하고, 스스로 발견한 수학적 지식을 논리적 추론이나 연역적 증명을 통해 정당화하는 경험을 쌓을 수 있을 때, 학생들은 이 지식을 자신의 것으로 내면화할 수 있게 되고, 다양한 상황에 자유롭게 활용할 수 있는 능력을 가질 수 있을 것이다.

주요용어 : 코사인 법칙, 유추, 일반화

I. 서론

문제해결에서 유추는 문제를 해결할 실마리를 제공한다. 새로운 문제에 직면했을 때, 이미 알고 있는 유사한 문제의 해법을 찾아 그 방법을 일반화하거나 변형하여 새로운 문제를 해결하는 경우가 많다. 이때 사용되는 추리를 유추라고 한다.

유추란 몇몇 성질이나 관계를 공통으로 갖는 두 개의 사물이나 문제에 대하여 한 대상이 갖는 성질이나 법칙이 다른 대상에도 이와 동일하거나 유사한 성질 또는 법칙이 있을 것으로 추리하는 것을 말한다.

유추에 의한 문제 해결은 현재의 문제를 이전에 경험했던 유사한 문제에 대한 지식과 연결시키고 이를 기초하여 두 문제간의 유사성을 추론함으로서 주어진 문제를 해결하는 것을 말한다(Chen, 1996). 유추에 의한 문제해결은 유추적 전이(analogical transfer)라고도 하는데 그 이유는 이전의 문제해결에서 습득한 지식을 새로운 문제해결에 적용하는 데에 지식의 전이가 일어나기 때문이다(Holyoak & Thagard, 1995).

유추란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의

1) 대전반석고등학교 (ksskeg@nate.com)
2) 공주대학교 (dwpark@kongju.ac.kr)

성질을 추측하는 것이다. 어떤 종류의 대상이 다른 종류의 대상과 몇 가지 점에서 서로 유사하다는 사실이 확인될 때, 첫 번째 종류의 대상이 그 밖의 다른 특성을 갖고 있으면 두 번째 종류의 대상도 그 성질을 가지고 있을 것이라고 추리하는 것이 유추이다. 동형사상은 구조의 전이를 나타내는 수학화된 유추이다(우정호, 2000).

논리적 추론 또는 증명 교육을 추론 교육으로 한정하여 인식하는 경향이 있으나 귀납적 추론을 통해 학생 스스로 규칙성이나 공통성을 발견하거나 유추를 통해 추측해 보는 경험을 쌓는 것이 필요하다. 이러한 귀납적 추론이나 유추적 사고 활동을 통해 학생 스스로 지식을 생산하고, 스스로 생산한 수학적 지식을 논리적 추론이나 연역적 증명을 통해 정당화하는 경험을 쌓을 수 있을 때, 학생들은 이 지식을 진정으로 자신의 것으로 내면화할 수 있게 되고, 다양한 상황에 자유롭게 활용할 수 있는 능력을 가질 수 있게 된다(교육과학기술부, 2007).

본 연구에서는 인문계 고등학교 3학년 자연계열 학생들이 삼각형에 대한 코사인법칙으로부터 사각형과 n각형에 대한 코사인법칙을 어느 정도 일반화 시킬 수 있는지를 알아보고 그 과정에서 나타난 학생들의 사고 유형과 유추과정을 분석하였다.

II. 이론적 배경

1. 유추적 사고와 문제해결

수학적 사고에서 유추는 매우 중요한 사고의 도구이다. 유추에 의하여 수학의 많은 개념은 서로 연결되며 그 구조가 파악되기도 하고 새로운 수학적 개념이 체계화된다. 수학자들은 유추를 통하여 많은 법칙들을 발견하고 일반화한다. 평면기하와 입체기하 사이의 유추, 유추를 통한 지수법칙의 일반화, 집합론에서의 유추, 실수의 연산법칙에 대한 유추를 통한 복소수의 체계화 등 많은 분야에서 유추적 사고는 매우 중요한 역할을 하고 있다. 유추를 이용하여 문제를 해결하기 위해서는 유추에 도움이 되는 바탕문제가 존재해야 하고 바탕 문제와 표적 문제 사이에는 반드시 공통된 유사성이 존재해야 한다.

Polya(2002)는 문제해결전략으로 ‘친숙한 문제로 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라’, ‘관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있거나. 그것을 활용할 수 있을까?’ 등을 제시하였다. 이와 같은 질문은 학생들의 사고를 돕고 유추적인 사고방식을 불러일으킬 수 있다. 유추를 통한 피타고라스 정리의 증명방법을 제시하면서 일반화와 특수화가 유추의 두 측면으로 문제를 발견하고 일반화하며 해결하는 유용한 사고 도구라고 하였다.

따라서 학교 현장에서 교사는 학생들로 하여금 관찰과 추측을 익숙하게 하여 추론을 통한 수학을 학습할 수 있도록 하는 것이 중요하다.

유추 전이를 다룬 인지심리학의 연구들은 유추 전이에 영향을 미치는 변인들을 밝히기 위하여 유추를 이용하여 문제를 해결하는 과정을 여러 단계로 나누어 설명해왔다. 대다수의 연구자들은 문제의 해결을 위하여 표적 문제의 부호화(encoding), 바탕 유사물의 인출(retrieval), 바탕과 표적의 대응(mapping), 전이 및 학습(transfer and learning)의 네 단계가 필요하다는 것에 의견을 같이하고 있으며(Sternberg, 2005; Weisberg, 2009), 유추 전이가 이루어지기 위해서는 바탕 문제와 표적 문제의 유사성의 수준에 따라 바탕 개념과 바탕 문제의 해법의 요소들이 인출되어 표적 문제의 요소들과 대응이 되어야 한다. 바탕 지식이 선택되고 인출이 되면 바탕 문제와 표적 문제 사이의 유사성을 지각하여 요소들 사이의 대응이 일어나며, 두 문제에서 유사 개념들이 명시적으로 짝지어져, 바탕 문제의 해법을 이용하여 표적 문제를 해결할 수 있게 된다(Gentner, 1983; Holyoak & Thagard, 1995, Weisberg, 2009).

Gentner(1983)는 구조 대응 이론(structure mapping theory)을 통하여 유추 전이에 있어서 바탕과 표적의 요소들이 서로 짝지어지는 대응 단계를 강조하고 있다. 그는 대응 과정에서 바탕과 표적의 가능한 모든 성분들의 관계는 일대일로 연결된 체계가 되어야 한다고 주장하였다. 바탕과 표적의 일대일 대응을 유추 전이의 필수 요소로 생각하고 있는 많은 연구 결과 들(예, Gentner & Markman, 1997; Holyoak & Thagard, 1989, 1995)이 Gentner(1983)의 주장을 뒷받침해 주고 있으며, 바탕과 표적의 대칭적인 일대일 대응을 중요시하는 연구들은 명료한 대응이 성공적인 유추 전이를 보장한다는 관점을 취하고 있다.

한편 Novick과 Holyoak(1991)은 바탕과 표적 요소들 간의 대응만으로는 유추 전이가 일어날 수 없다고 제안하였다. 그들은 대응 단계가 유추 전이에 있어서 필요하기는 하나 대응 단계만으로는 충분하지 않고, 표적 문제를 해결하기 위하여 바탕 문제의 해법을 실행하는 적용 과정(adaptation process)이 수반되어야 유추 전이가 일어날 수 있다고 주장하였다.

Novick과 Holyoak(1991)은 실험 결과를 바탕으로 유추의 과정에서 대응 단계와 적용 단계는 인지적으로 분리될 수 있을 것이고, 바탕과 표적의 대응만으로 완벽한 유추 전이가 보장되지 않으며, 효과적인 유추 전이를 위해서 적용 과정이 필요하다는 것을 주장하였다.

English(2004)에 의하면 기본적으로 수학교육학에서의 유추에 관한 연구는 1980년대 이후 인지심리학에서 진행된 문제 해결에 관한 유추 연구의 연장선상에 있다. 유추는 수학교육에서 광범위하게 사용될 수 있는데, 수학적 법칙을 발견하기 위해서는 관찰된 사례의 공통적인 성질에 주목하여 일반적인 법칙을 추측하는 귀납 추론이 필요하며, 유추는 귀납 추론을 위한 중요한 도구가 된다(반은섭외 2012, 재인용).

2. 코사인 법칙의 일반화

1) 사각형에서의 코사인 법칙

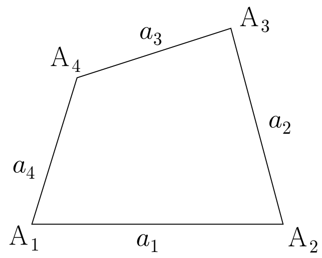
한인기(2007)는 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 방안을 제시하였다. 삼각형 ABC에서 세 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 하고, 두 변 AB와 CA가 이루는 각의 크기를 $[bc]$라고 하면 코사인 법칙 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos[bc]$가 성립한다.

사각형에서도 삼각형의 코사인 법칙과 유사한 정리가 다음과 같이 성립한다. 사각형 $\mathrm{A_1A_2A_3A_4}$에서 $\overline{A_1A_2} = \overline{a_1}$, $\overline{A_2A_3} = \overline{a_2}$, $\overline{A_3A_4} = \overline{a_3}$, $\overline{A_4A_1} = \overline{a_4}$, 각각의 길이를 a_1, a_2, a_3, a_4이라 하고 $[a_ia_j]$를 $\overline{a_i}$ 와 $\overline{a_j}$가 이루는 각이라 하면 이 때 코사인 법칙이 성립한다.

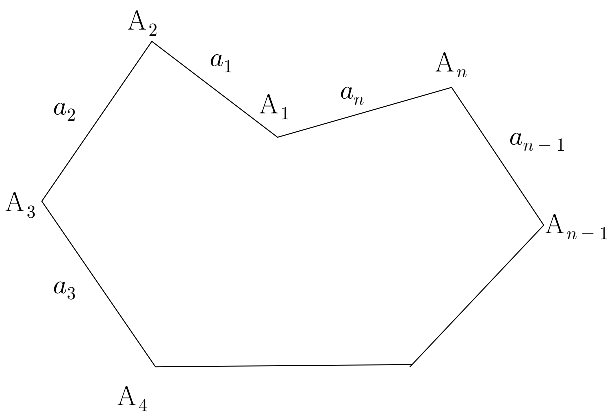
$$a_4^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2a_1a_2\cos[a_1a_2] - 2a_1a_3\cos[a_1a_3] - 2a_2a_3\cos[a_2a_3]$$

2) n각형에서의 코사인 법칙

삼각형의 코사인 법칙을 사각형, 오각형 그리고 n각형까지 확장시킬 수 있으며 $\overline{A_1A_2} = \overline{a_1}$, $\overline{A_2A_3} = \overline{a_2}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n} = \overline{a_{n-1}}$, $\overline{A_nA_1} = \overline{a_n}$, 각각의 길이를 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이라 하고 $[a_ia_j]$를 $\overline{a_i}$ 와 $\overline{a_j}$가 이루는 각이라 하면 아래와 같은 코사인 법칙이 성립한다.



[그림 1] 사각형



[그림 2] n각형

$$\begin{aligned} a_n^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_{n-1}^2 - 2a_1a_2\cos[a_1a_2] - 2a_1a_3\cos[a_1a_3] - \cdots - 2a_{n-2}a_{n-1}\cos[a_{n-2}a_{n-1}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1} a_ia_j\cos[a_ia_j]. \end{aligned}$$

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 문제 및 대상

본 연구는 대전시에 소재하고 있는 A고등학교 3학년 자연계열 상위 20%이내에 있는 학생 15명을 선정하여 이 학생들이 삼각형에 대한 코사인법칙으로부터 n각형에 대한 코사인 법칙을 어느 정도 일반화 시킬 수 있는지를 알아보고 그 과정에서 나타난 학생들의 사고 유형을 분석하여 학생들의 유추능력을 파악하고자 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

첫째, 학생들이 일반화된 코사인 법칙을 추측할 때, 바탕문제의 어떤 유사성으로부터 유추하는가?

둘째, 일반화된 코사인 법칙의 유추에 영향을 미치는 활동은 무엇인가?

2. 연구 방법

코사인 법칙의 일반화 문제를 학생들에게 제시하기 전에 삼각형, 사각형, ⋯, n각형에서의 내각의 합, 피타고라스 정리의 일반화, 무게중심의 확장, 평면좌표에서 공간좌표로의 확장 등을 학생들에게 설명하여 유추적 사고에 대하여 학생들이 경험적으로 이해할 수 있도록 하였으며 단계별로 학생들과의 면담을 통하여 삼각형에서 성립하는 코사인 법칙을 n각형의 코사인 법칙으로 일반화하는데 작동되는 유추의 사고 과정과 문제점을 분석하였다.

3. 연구 절차

Lakatos(1967)에 따르면 수학은 추측, 증명과 반박에 의해 성장하는 준경험주의 과학이며, 수학적 지식은 반박되지 않을 때, 잠정적으로 받아들일 수 있다고 하였다. 또한, 수학적 발견에서는 소박한 추측으로부터 시작하여 사고 실험이 뒤따른다고 말하며 추측과 반박이 이어지는 발견적 접근법을 강조하였다. Polya(2002)에 의하면 관찰은 수학적 발견의 풍부한 원천이며 귀납은 수학자의 창조적인 사고 과정에서 본질적인 역할을 한다고 하며 수학은 귀납과 유추를 통해 발견에 이르는 '관찰과학'이라고 말하였다.

본 연구에서는 추측과 발견 그리고 반박을 중심으로 한 수업 모형을 적용하고 유추적 사고를 각 단계별로 확장시킬 수 있도록 준비단계, 직관적 추측 단계, 원리를 이용한 추측 단계, 반박과 증명 단계, 원리의 일반화 단계로 설정하였다.

[준비단계] : 유추적 사고에 대한 이해

학생들은 논리적 추론에 의하여 어떤 문제를 증명하거나 방정식을 해결하는 데에는 익숙해져 있지만 유추적 사고를 통한 법칙의 발견이나 일반화하는 경험을 거의 갖고 있지 않기 때문에 유추적 사고에 익숙해질 수 있는 준비단계를 설계하였다. 이 단계에서는 삼각형, 사각형, …, n각형에서의 내각의 합, 피타고라스 정리의 일반화, 무게중심의 일반화, 평면좌표에서 공간좌표로의 확장 등 여러 사례를 들어 학생들이 일반화에 대하여 어느 정도 이해할 수 있도록 하였다.

[1 단계] : 직관적 추측

실질적인 실험의 첫 단계로 사각형에서의 코사인 법칙을 자유롭게 구성해 보는 단계이다. 원리의 발견이나 연역적인 증명 없이 삼각형에 대한 코사인 법칙으로부터 직관적으로 공식을 생각해 보는 단계이다. 이 단계에서는 어떤 논리적인 추론도 배제되기 때문에 코사인 법칙에 대한 일반화된 공식을 어떻게 직관적으로 추측하는지를 분석하기 위한 단계이다.

[2 단계] : 원리를 이용한 추측

좀 더 엄밀하게 공식을 추측해 볼 수 있는 단계로 기존에 알고 있는 삼각형의 코사인 법칙을 바탕으로 사각형에서의 코사인 법칙을 유추하는 단계이다. 두 도형을 관련지어 생각하기 위해서 삼각형에 대한 코사인 법칙을 나타내는 식에 대한 요소를 분석하고 이에 대응되는 사각형의 요소를 추측하는 단계이다.

[3 단계] : 반박과 증명

추측한 정리를 반박하고 증명하는 단계로 법칙이 구성되고 일반화 되는 과정에서 가장 중요한 단계이다. 2단계에서 추측한 공식이 맞는지 확인해보기 위해서 구체적인 사각형을 제시하고 이를 통하여 발견한 법칙이 성립되는지를 확인해 보는 단계이다. 이 과정에서 문제가 발생되면 식을 수정하고 보완하는 과정을 거치면서 사각형에서의 코사인 법칙을 발견하는 단계이다.

[4 단계] : 평면도형에서 원리의 일반화

발견된 원리를 n각형으로 일반화 하는 단계이다. 삼각형에서 사각형으로 공식을 유추한

것과 같은 방법으로 코사인 법칙을 n각형으로 일반화하는 단계이다. 특히 삼각형, 사각형에서 성립되는 공통 성질들을 찾아 n각형에 적용하기 위해서는 변사이의 관계와 식의 구성 형태에서 엄밀한 표현이 중요하다.

IV. 연구결과 및 분석

1. 수업의 실제 및 단계별 결과 분석

1) 1단계(직관적인 발견)

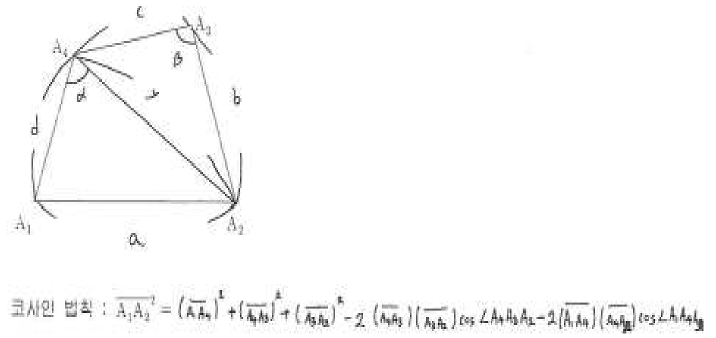
삼각형에서 코사인 법칙을 바탕으로 사각형에서 코사인 법칙을 자유롭게 서술하게 한 결과 정확한 코사인 법칙을 정확하게 유추한 학생은 없었지만 일부 학생들은 코사인 법칙과 유사한 식을 도출하였다. 학생들의 사고과정을 분석하여 공통적인 내용을 조사하였는데 이를 정리하면 다음 <표 1>과 같다.

<표 1> 1단계 학생들의 결과

사고 유형	학생수	비율(%)
사각형을 두 개의 삼각형으로 분할하여 식을 구성	8	53.3%
인접한 변사이의 관계만을 이용하여 식을 구성	5	33.3%
연결할 수 있는 모든 변을 이용하여 식을 구성	1	6.7%
그 외	1	6.7%

위의 <표 1>에서 나타난 바와 같이 8명(53,3%) 학생들은 대각선을 작도하여 사각형을 두 개의 삼각형으로 나누거나 두 개의 대각선을 작도하여 얻은 삼각형을 이용하여 코사인 법칙을 일반화하는 노력을 하였다.

사각형은 삼각형에서 단순히 변의 개수가 1개 더 늘어난 것이라고 생각할 수 있지만 두 도형사이에는 많은 차이가 있다. 삼각형은 모든 변이 인접하고 있지만 사각형에는 인접하지 않은 변이 존재하고 그 두 변이 이루는 각도 생각해야 한다. 사각형에서는 삼각형과 달리 대각선을 그을 수 있고 그 대각선을 그어 삼각형으로 분리할 수 있다. 일부 학생들은 사각형의 문제를 해결하기 위해서는 분할된 삼각형의 무게중심을 이용하여 사각형의 무게중심을 구하듯이 분할된 삼각형에서 성립하는 코사인 법칙을 이용하여 사각형에 대한 코사인 법칙을 찾으려는 시도를 하였다.



[그림 3] 사각형의 분할을 통한 유추

2) 2단계(원리를 이용한 추측)

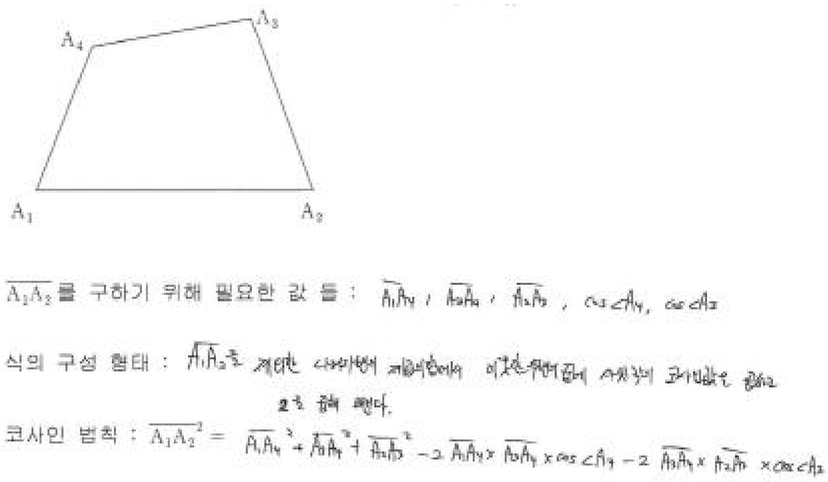
1단계에서 코사인 법칙을 직관적으로 유추하였다면 2단계에서는 좀 더 엄밀하고 의미 있는 식을 구성해내기 위해 우선 삼각형에서의 코사인 법칙을 설명하도록 하고 한 변의 길이를 구하기 위해 필요한 값들과 식의 구성 형태에 대한 질문을 통하여 학생들이 원리를 스스로 발견할 수 있도록 하였으며 삼각형에서의 요소를 인출하여 사각형의 요소로 대응시키는 방법으로 코사인 법칙을 추측할 수 있도록 하였다. 학생들의 서술한 내용을 정리하면 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> 2단계 학생들의 결과

사고 유형	학생수	비율(%)
필요한 요소를 발견하고 식의 구성 형태를 완벽히 만들어낸 경우	2	13.3%
필요한 요소를 발견하였지만 식의 구성 형태에서 오류가 있는 경우	11	73.4%
필요한 요소들을 잘 발견하지 못한 경우	2	13.3%

학생들은 삼각형에 대한 코사인 법칙을 정확히 알고 있었으며 이를 사각형으로 연결하여 한 변의 길이를 구하기 위한 필요한 요소를 찾아낸 학생은 13명(86.7%)이었고 이 중에서 식의 구성 형태까지 완벽히 쓴 학생은 2명(13.3%)이고 나머지 11명(73.4%)은 비슷하게 식을 구성하였으나 일부 오류가 나타났고 나머지 2명(13.3%)은 유사한 식도 만들어 내지 못하였다. 가장 많은 비율은 차지했던 11명의 학생 중 5명은 똑같은 식을 생각했는데 한 학생의

예를 살펴보면 다음과 같다.



[그림 4] 유추에서의 오류

<학생과의 인터뷰 내용>

교사: 다음과 같이 식을 생각해 낸 이유가 무엇이죠?

학생 : 우선 삼각형의 코사인 법칙을 바탕으로 나머지 변을 모두 제곱하였고 이웃한 두변의 곱과 끼인각에 대한 코사인 값을 곱하여 더했습니다.

교사: 그럼 이웃하지 않은 변은 고려하지 않았나요?

학생: 처음에 생각은 했지만 코사인 법칙은 왠지 간단해야 할 것 같아서 식에서 뺐습니다.

교사: 그럼 이웃하지 않은 변을 고려해야 한다면 끼인각은 어떻게 정의할 건가요?

학생: 코사인 값은 예각과 둔각에서 부호가 다르니 방향을 고려한 벡터를 이용하든지 엄밀하게 정의해야할 것 같습니다.

많은 학생들이 법칙을 표현하는데 있어서 복잡해 보이는 것을 배제하려는 경향이 있었으며 사각형에서의 법칙을 나타낼 때 인접한 이웃한 변과 끼인 각만을 이용하여 법칙을 구성하려고 하였다.

3) 3단계(반박과 증명)

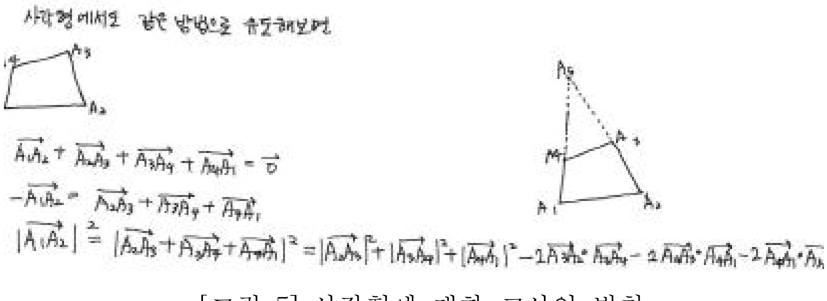
2단계에서 자신이 추측해 본 법칙이 성립하는지를 한 예를 들어 확인해 보도록 하였다. 2단계의 결과에서 알 수 있듯이 대부분의 학생들의 추측이 틀렸기 때문에 <표 3>과 같이 반박되지 않은 경우는 3명(20%)으로 나타났다. 이 학생들에게는 코사인 법칙을 연역적으로 증

명하도록 하였고 나머지 12명의 학생에게는 법칙을 예에 맞게 수정하도록 하였으며 자신의 틀린 점이 무엇인지 생각하도록 하였다.

<표 3> 3단계 학생들의 결과

사고 유형	학생수	비율(%)
증명한 경우	1	6.7%
반박되지는 않았으나 증명하지 못한 경우	2	13.3%
반박을 통하여 법칙을 찾고 이에 대하여 증명한 경우	7	46.7%
여러 번 반박되었음에도 불구하고 법칙을 찾지 못한 경우	3	20.0%
그 외	2	13.3%

교사의 도움 없이 법칙을 증명을 한 학생은 1명(6.7%)이었고 나머지 학생은 증명에 어려움을 겪었다. 그 중에는 반박된 사각형에서 변의 길이와 주어진 각의 삼각비 값을 이용하여 식을 구성해보려는 학생들도 있었다. 대부분의 학생들은 이웃한 변 사이의 관계에만 주목하는 것으로 조사되었다. 마주 보는 변의 관계까지 고려해보라는 힌트를 제시하였는데 7명(46.7%)의 학생들은 힌트에 의하여 정확한 공식을 발견하고 증명할 수 있었다. 그러나 공식을 정확하게 발견한 2명(13.3%)의 학생은 반박되지는 않았으나 증명을 하지 못했고, 3명(20%)의 학생은 여러 번의 반박하는 과정에서 식을 수정하지 못하고 결국 포기하였다. 나머지 1명(6.7%)의 학생은 증명을 잘 유도하였으나 두 변이 이루는 각의 정의가 확실하지 않아 완벽한 법칙이라고 볼 수 없었다. 다음 [그림 5]는 정사각형을 예로 들어 자신이 생각한 법칙이 처음에는 반박되었지만 다시 생각하여 법칙을 잘 유도한 학생의 증명과정이다.



[그림 5] 사각형에 대한 코사인 법칙

반박단계에서 학생들이 생각한 많은 사례는 평행사변형과 직사각형이었다. 물론 법칙이 틀린 경우 여러 가지의 예를 제시하여 추측한 법칙이 성립되는지를 확인해 볼 수 있지만 잘못 추측된 법칙이 특정한 사례에서 성립되는 경우가 발생되기도 하였다. 어떤 학생은 특수한 사각형을 그려놓고 그 사각형에 추측된 법칙을 맞게 수정하기도 하였다. 따라서 학생들이 추측한 법칙을 구체적인 예를 통하여 확인하는 과정에서는 특수한 사각형 즉, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴 등이 아닌 일반적 사각형을 학생들에게 제시하여 추측한 법칙을 확인하도록 할 필요성이 제기되었다.

4) 4단계(평면에서의 원리의 일반화)

3단계에서 사각형의 코사인 법칙의 증명을 이해한 학생들이 n각형의 코사인 법칙을 쉽게 발견하고 증명할 것으로 예상하였지만 결과는 다르게 나타났으며 내용은 아래의 표와 같다.

<표 4> 4단계 학생들의 결과

사고 유형	학생수	비율(%)
법칙을 완벽히 증명한 경우	3	20.0%
법칙을 거의 유도해냈으나 불완전한 경우	5	33.3%
법칙을 유도해 내지 못한 경우	6	40.0%
그 외	1	6.7%

n각형에서의 코사인 법칙을 완벽히 증명한 학생은 3명(20.0%)이었다. 5명(33.3%)의 학생은 증명을 거의 유도해냈으나 미흡하였으며 6명(40.0%)의 학생은 증명을 중도에 포기하였으며 그 외 다른 식의 형태로 증명을 표현한 학생은 1명(6.7%)이였다.

증명이 미흡한 학생들은 인접하지 않은 두 변이 이루는 각을 표현하는데 어려움을 겪었다. 사각형에서 마주보는 두 변이 이루는 각은 두 변을 연장하여 삼각형을 만든 다음 각을 이용하여 표현했지만 n각형에서 두 꼭짓점이상 떨어진 두 변을 그 사이에 있는 각을 가지고 표현하는 데에 어려움이 있었다.

증명을 유도해 내지 못한 학생의 경우 벡터식의 전개과정에 문제점이 있었다. 한 변을 나타내는 벡터를 나머지 변을 이용한 벡터로 잘 표현하였으나 그 식을 전개하고 정리하는 과정에서 문제가 발생되었다.

나머지 1명의 학생은 한 꼭짓점을 기준으로 $(n-2)$개의 삼각형을 만든 다음 증명하였는데 이는 두 변이 이루는 사잇각을 이용한 식이 아니기 때문에 사잇각이 주어진 도형의 경우

그 세분화된 각을 구해야하는 어려움이 있다.

우정호(1986)는 “수학적 정리를 증명하기에 앞서 먼저 추측을 해야 한다. 세세한 부분을 수행하기 전에 증명에 대한 아이디어를 추측해야한다. 관찰한 것을 결합 시키고 유추를 해야 한다. 수학자의 창조적인 연구 결과는 연역적 추론 즉, 증명이다.”라고 하면서 증명하기 이전 단계에서 추측을 중요시하게 생각하였다. 근데 여기에는 본 단계를 추측하기 전에 이전 단계의 완벽한 이해를 기반으로 하는 것이다. 이해라고 하면 단순히 공식을 암기하고 있고 잘 사용하는 것만을 말하는 것은 아니다. 공식을 자유롭게 활용하는 것뿐만 아니라 그 유도와 증명과정까지 알고 있어야 함을 의미한다.

이렇듯 새로운 법칙을 추측하고 증명하기 위해서는 이전 단계의 완벽한 이해 즉, 유도와 증명과정이 필요하다. 도형 단원을 지도하는 많은 교사들은 증명을 도할 때, 도구를 이용하여 직관적인 이해를 시키거나 형식적인 증명은 하지만 그 중요성은 강조 하지 않는다. 그리고 증명보다 그 법칙을 암기하게 하고 문제를 푸는 수단으로써만 이용하게 만든다. 물론 완벽히 증명지도를 하는 것은 절대 쉬운 일이 아닐 것이다. 그렇지만 학생들이 기하적인 내용을 확장하고 일반화 할 때에는 이전 단계의 증명 지도가 반드시 필요하다.

V. 결론

수학에서 유추적 사고는 매우 중요하고 새로운 법칙이나 이론이 이러한 유추적 사고에 의하여 생산되고 일반화된다. 따라서 학생들의 유추적 사고력을 신장시키는 교육은 매우 중요하다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 삼각형에 대한 코사인 법칙으로부터 일반화된 코사인 법칙을 학생들이 어떻게 추측하는지를 조사하였다. 본 연구에 참여한 학생들은 조사대상 학교에서 수학성적이 상위 20%이내인 비교적 우수한 학생들이기 때문에 본 연구 결과를 일반화하는 데에는 많은 어려움이 있다고 볼 수 있지만 본 연구를 통하여 학생들의 유추적 사고과정을 분석하고 유추적 사고를 촉진시키는 요소를 도출하였다.

학생들이 삼각형에서 코사인 법칙을 일반화할 때, 어떤 성질에 주목하여 법칙을 유추하는지를 조사하고 분석할 결과는 1단계 직관적 유추단계에서는 사각형에서의 코사인 법칙을 정확하게 유추한 학생은 없었다. 코사인 법칙에서 변과 각에 대한 성질을 파악하기 보다는 8명(53.3%)은 사각형을 두 개의 삼각형으로 분할하고 삼각형에 대한 코사인 법칙을 이용하여 일반화된 코사인 법칙을 유추하려고 하였으며, 5명(33.3%)은 변사이의 관계만을 이용하여 일반화된 코사인 법칙을 유추하는 노력을 보였다.

2단계에서 삼각형에 대한 코사인 법칙을 발견하는 경험을 거친 이후에는 2명(13.3%)의 학생들이 사각형에 대한 일반화된 코사인 법칙을 정확하게 유추하였으며 11명(73.4%)의 학

생들도 상당히 유사한 공식을 유추하였다.

3단계인 반박과 증명 단계에서는 1명의 학생이 정확하게 공식을 증명하였으며, 반박을 통하여 스스로 공식을 수정·보완하는 과정을 통하여 정확한 공식을 유추하고 증명에 성공한 학생들은 7명(46.7%)으로 나타났다. 4단계인 일반화 단계에서는 3명(20%)이 n각형에 대한 코사인 법칙을 정확하게 유추하고 증명에 성공하였으며, 5명(33.3%)은 유사한 공식까지는 유추하였지만 증명하지는 못하였다. 삼각형과 사각형에 대한 코사인 법칙을 이해하고 증명할 수 있었지만 이를 n각형으로 일반화하는 데에 있어서 학생들은 많은 어려움을 겪고 있는 것으로 밝혀졌다.

학생들은 본인이 유추한 코사인 법칙을 검증하는 과정에서 특수한 사각형에 적용하는 사례가 많았다. 특히 특수한 사각형에서는 성립하고 일반적 사각형에서 성립하지 않는 공식을 유추한 학생은 자신의 생각을 수정·보완하는 데에 많은 어려움에 직면하였다.

수학적 지식의 구조에서 지식과 지식들은 서로 긴밀하게 연결되어 있기 때문에 유추적 사고의 교육적 가치는 매우 크고 중요하다. 특히 고등학교 교육과정이나 영재교육 학습 내용 중에는 평면도형의 내용을 일반화 시키거나 평면도형을 공간도형으로 확장 시키는 등 유추적 사고를 향상시켜줄 수 있는 학습 내용이 많아 이를 잘 구성하고 적용한다면 학생들의 수학적 사고를 향상시키는데 큰 도움이 될 것이다. 이와 같이 귀납적 추론이나 유추적 사고 활동을 통해 학생 스스로 지식을 발견하고, 스스로 발견한 수학적 지식을 논리적 추론이나 연역적 증명을 통해 정당화하는 경험을 쌓을 수 있을 때, 학생들은 이 지식을 자신의 것으로 내면화할 수 있게 되고, 다양한 상황에 자유롭게 활용할 수 있는 능력을 가질 수 있을 것이다.

참고 문헌

교육과학기술부(2007). 고등학교 교육과정 해설(5).

반은섭, 신재홍(2012). 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 효과, 한국학교수학회논문집 제15권 제3호 535-554.

우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부.

한인기(2007). 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> 제21집 제1호 51-64.

Chen, Z.(1996). Children's analogical problem solving : The effects of superficial, structural, and procedural similarity, Journal of Experimental Child Psychology 62, 410-431.

Collins, L, Osler, T.J(2011). Law of cosines generalised, The Mathematical gazette Vol.95

No.533.

English, L. D. (Ed.).(2004). Mathematical and analogical reasoning of young leaders. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D.(1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. Cognitive Science, 7, 155-170.

Gentner, D., & Markman, A. B.(1997). Structure mapping in analogy and similarity. American Psychologist, 52(1), 45-56.

Holyoak, K. J., & Thagard, P.(1989). Analogical mapping by constraint satisfaction. Cognitive Science, 13, 295-355.

Holyoak, K. J., & Thagard, P.(1995). Mental leap: Analogy in creative thought. Cambridge, MA: MIT Press.

Lakatos, I.(1967). Preblems in the Philosopy of Mathmatics, North-Holland Publishing Company.

Novick, L. R., & Holyoak, K. J.(1991). Mathematical problem solving by analogy of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17(3), 398-415.

Polya, G.(2002). 어떻게 문제를 풀 것인가? -수학적 사고와 방법-(우정호 역). 서울: 경문사. (원저는 1971년에 출판).

Sternberg, R. J.(2005). 인지심리학(김민식, 손영숙, 안서원 역). 서울: 박학사. (원저는 2003년에 출판).

Weisberg, R. W.(2009). 창의성: 문제해결, 과학, 발명, 예술에서의 혁신(김미선 역). 서울: 시그마프레스 (원저는 2006년에 출판).

A Study on Teaching Methods of Extension of Cosine Rule Using Analogy

Kim, Sungsoo[3] · Park, Dal-Won[4]

Abstract

In this paper, we investigate and analysis high school students' generalization of cosine rule using analogy, and we study teaching and learning methods improving students' analogical thinking ability to improve mathematical thinking process. When students can reproduce what they have learned through inductive reasoning process or analogical thinking process and when they can justify their own mathematical knowledge through logical inference or deductive reasoning process, they can truly internalize what they learn and have an ability to use it in various situations.

Key Words : Cosine Rule, Analogy, Generalization

Received December 3, 2013
Revised December 17, 2013
Accepted December 26, 2013

3) DaeJeon Banseok High-school (ksskeg@nate.com)
4) Kongju National University (dwpark@kongju.ac.kr)