한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 4, 883-898, December 2013

동일한 수학적 상황에서 문제해결 능력 분석 연구
-방정식·부등식과 함수를 중심으로-

박정미[1]·이중권[2]

본 연구의 목적은 고등학교 학생들이 동일한 수학적 상황을 다른 형태로 제시할 때 수학 문제해결 능력을 분석 연구하는데 있다. 본 연구의 결과로부터 얻어진 결론은 다음과 같다.
첫째, 동일한 수학적 상황을 함수로 제시한 문항이 방정식과 부등식으로 제시한 문항보다 정답률이 높았으며, 일차방정식·일차부등식과 일차함수와의 관계를 묻는 문항보다 이차방정식·이차부등식과 이차함수와의 관계를 묻는 문항에서 정답률이 떨어졌다.
둘째, 방정식과 부등식 문항을 기계적인 계산에 의해서 푸는 문항을 주로 접해온 학생들은 면담 결과 그래프에서 나타나는 교점이 연립방정식의 해라고 알고 있는 학생은 많았지만 그것을 그래프를 그리거나 해를 구하는 데 사용하지 못하는 것으로 보아 방정식과 함수와의 관계에서 동일한 수학적 상황을 인식하지 못한 것을 알 수 있었다.
셋째, 면담을 통하여 학생들이 방정식·부등식과 함수에 대한 관계를 어떻게 생각하고 있는지 알아본 결과, 관계에 대한 정확한 이해 능력이 없음에도 정답을 구하는 경우가 있었다.

주요용어 : 수학적 상황, 방정식, 부등식, 함수

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

수학교육의 목적은 학생들로 하여금 수학적인 논리력, 외자와의 적용력을 키우는 것이라고 할 수 있다. 즉, 수학적 논리력을 바탕으로 하여 발생된 문제에 대한 창의적 해결능력을 높이는 것이 수학교육의 주된 목적이라고 할 수 있다.
NCTM(2000)에서 학생들은 일상생활과 직업 현장에서 수학적 지식을 자신 있게 사용할 수 있어야 한다는 점을 강조하고 있다. 또한 NCTM(1989, 2000)에서 학생들로 하여금 수학을 알고, 수학을 할 수 있게 하여야 하는가에 대한 기술을 나타낸 규준 중 하나가 표현(representation)과 연결성(connections)에 대한 개념이다.

---

1) 동국대학교 일반대학원 (nannananna@hanmail.net)
2) 동국대학교(joonglee@dgu.edu)

표현(representation)은 수학적 내용을 표현하는 다양한 기호나 다이어그램, 구체적인 그림, 그래프, 식, 표 등의 물리적 대상이나 이미지, 관념과 같은 주체의 실체인 정신적 대상을 지칭하는 용어이다(장혜원, 1997). 학생들의 수학적인 이해란 다양한 표현에 대한 해석, 표현의 산출, 표현간의 번역 등의 활동을 통해 수학적인 표현에 대한 적합한 개념적 인지를 구성하는 것으로 볼 수 있다.

표현이라는 개념과 더불어 중요시 되는 개념은 연결성(connections)이다. 실세계 또는 수학 이외의 학문에서 제기되는 문제 상황과 수학적 표현 사이의 연결이 수학의 외적 연결성이고 문제 해결에 있어 다양한 수학적 표현을 사용하거나 풀이과정을 반성하는 활동을 강화함으로써 서로 다른 수학적 표상 사이의 공통성을 주목하게 하는 것이 내적 연결성이다.

특히, 내적 연결성은 교육과정, 교육자료, 그리고 학생들 수업에서 두드러지게 나타난다. 이런 과정을 통해 중요한 수학적 아이디어들이 다른 아이디어들과 연결되고 어떻게 관계를 맺고 있는 지에 대한 학습이 일어난다. 학생들에 대한 연결성에 대한 강화된 교육은 학생들로 하여금 개념간의 관계성 파악 능력, 개념간의 위계구조 배열 능력, 새로운 논리적 개념들이 설계 능력 개발을 유도한다.

수학교육자는 학생들로 하여금 수학적 표현에 대한 이해와 적절한 표현 능력을 개발하게 해야 한다. 또한, 표현이 내포하고 있는 개념들 간의 관계 파악을 나타내고 있는 연결성에 대한 학생들의 능력을 제고시키는 것이야 말로 수학교육의 목적이자 수학교육자의 책무라고 생각한다.

본 연구자는 표현이 내포하고 있는 개념들 간의 관계 파악을 나타내고 있는 연결성의 연구에 관하여 개념적, 실증적 연구를 위하여 방정식·부등식과 함수와의 관계에 대한 부분을 채택하였다.

'표현'과 '연결성'에 관한 선행연구를 살펴보면, 정난희(2003)는 컴퓨터 소프트웨어 Maple을 사용이 이차함수와 이차방정식·이차부등식 간의 수학적 개념 연결 능력 향상에 어떠한 효과가 있는지를 연구하였다. Maple을 사용한 실험집단과 지필식의 학습을 한 통제집단 사이에서 나타난 연구 결과는 개념 이해와 계산 기능 학습에서 유의한 차이가 나타나지 않았지만 컴퓨터를 활용한 수업이 계산 기능 학습 면에서 개념 학습에 좀 더 효과적이라는 것을 알 수 있다.

우현철(2000)은 이차방정식과 부등식의 문제 풀이과정에서 학생들이 어떤 오류의 유형을 범하고 있는 가를 파악하고, 학생들의 오류를 교정해 나아가는 연구를 통해 이차방정식·이차부등식과 이차함수 등이 실제로 밀접하게 연관되어 있음에도 불구하고 이들의 내용을 서로 별개의 것으로 기억하여 서로 관련이 있는 수학적 내용들을 총체적으로 연결 지어 생각하지 못함으로써 문제풀이에 어려움을 겪고 있음을 파악하였다.

그러나 선행연구들은 개념들 간에 관계 파악을 나타내고 있는 연결성에 대한 부분을 염두하여 연구되지 않았고, 관계에 대한 연구결과를 명시적으로 지적하지 않은 미비한 점을 보이고 있다. 이에 본 연구자는 방정식과 부등식, 함수와의 관계에서 동일한 수학적 상황을 제시하고 학습자의 해결과정에서 수학적 상황을 어떻게 인식하고 있는지를 살펴보고자 한다.

2. 연구문제

주어진 동일한 수학적 상황을 방정식 문제와 함수의 문제로 제시할 때와 부등식 문제와 함수의 문제로 제시할 때;
연구문제 1) 학생들은 문제해결 과정에서 동일한 수학적 상황으로 인식하고 있는가?
연구문제 2) 만약 인식하지 못한다면 그 원인은 무엇인가?

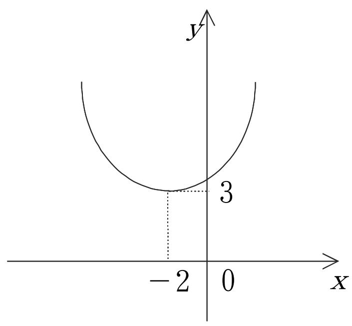
3. 용어의 정의

1) 수학적 상황

한 가지의 상황은 새로운 많은 문제들을 만들 수 있는 아이디어를 제공한다. 본 연구에서의 수학적 상황은 여러 가지 수학적 문제를 설정할 수 있는 장면으로, 다음은 동일한 수학적 상황에 대한 방정식, 부등식, 함수에 관한 문제의 예이다.

<동일한 수학적 상황>

다음은 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다.



[그림 1] 수학적 상황의 예

<수학적 상황에 따른 다양한 문제의 예>

- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근은 몇 개인가?
- 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해는 어떠한가?
- 이차함수의 꼭지점은 어떻게 되는가?

2) 방정식·부등식과 함수의 관계

함수의 그래프는 수학의 여러 영역에서 수학적 개념을 좀 더 깊고 풍부하게 강화시키고, 그 내용을 더 높은 수준으로 전이시키는데 핵심적인 표현 수단 일 뿐 아니라, 각 영역을 연결하고 전체의 흐름을 통합하는데 중요한 역할을 담당한다. 본 연구에서 방정식 · 부등식과 함수와의 관계란 방정식과 부등식 문제를 해결하는 과정에서 함수를 사용하여 해를 구하는 것을 의미한다.

3) 이해 능력

복소수, 함수, 극한과 같은 추상화된 고등 수학 개념들로 구성된 수학교과에서 연역적인 형식과 다양한 기호들의 언어는 학생들에게 사고의 어려움을 가져온다. 그러므로 학생들은 수학교과 내에서 종종 정확한 이해보다는 오히려 암기 학습을 택하기도 한다. 수학에서의 이해 능력이란 일시적으로 암기되어진 정의들을 사용하여 문제를 해결 하는 것이 아니라 올바른 이해로부터 수학적인 언어를 구사하는 것을 말한다.

4) 문제해결 능력

Polya(1980)는 문제해결을 답이 즉시 알려지지 않은 경우에 적절한 수단을 통해 답을 찾는 것이며, 어려움으로부터 길을 찾는 것이며, 장애를 돌파하는 방법을 찾는 것이며, 즉각적으로 획득할 수 없는 바람직한 목표에 도달하는 것이라고 설명하였다. 또한 NCTM(1989)에서는 수학적 문제해결이란 학생들이 그들 주변의 세계에서 수학의 유용성과 힘을 여러 모양으로 경험하는 과정, 즉 수학적 탐구와 발견, 적용의 방법이라고 하였다. 본 연구에서 학생의 문제해결 능력이란 주어진 문제들의 수학적 상황을 인식하고 관계를 사용하여 해결하는 능력을 의미한다.

Ⅱ. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구는 인천광역시에 소재하고 있으며, 이용 가능한 남자고등학교 2학년 2개반(인문계열 32명, 자연계열 31명, 총 63명)과 여자고등학교 2학년 2개반(인문계열 32명, 자연계열 33명, 총 65명)을 연구대상으로 선정하였고, 이 학생들은 중학교 함수 단원에서 일차함수와 방정식, 부등식 관계와 고등학교 함수 단원에서 이차함수와 방정식, 부등식 관계를 이미 학습하였다.

2. 연구 방법

본 논문의 연구 문제를 해결하기 위한 연구 방법은 고등학교 2학년 학생을 대상으로 중학교와 고등학교 함수 단원에 관련된 내용을 선정하여 연구 목적에 따라 지필 검사를 실시한 후 그 검사지에 나타나는 반응을 기술하는 기술 연구이다. 또한 지필검사에 나타나지 않은 원인을 보다 깊이 분석하기 위하여 개별면담을 실시하였다.

3. 검사도구 개발

본 검사도구의 목적은 주어진 동일한 수학적 상황에 대한 방정식·부등식과 함수 문제를 해결하는 능력과 어려움의 원인을 분석하기 위한 것이다. 따라서 중학교 교과서와 고등학교 수학 10-가와 10-나의 교과서에서 방정식·부등식과 함수단원의 문항을 기초로 연구자가 검사문항을 직접 설계하고 구성하였다. 또한 검사문항에 대한 내용 타당도는 전문가에 의해 입증되었고, 예비검사 결과 학생들의 이해분석에 대한 적절한 문항이 아니라고 판단된 문제는 수정, 보완하여서 본 검사 도구를 개발하였다.

이 검사지는 총 12문항으로 구성되어 있으며, 각각의 문항에 대한 구체적인 설명은 [그림 2]와 [그림 3]와 같다.

문항번호	<검사지1>의 내용
1	일차방정식과 일차함수와의 관계에서 방정식을 함수로 제시한 문제
2	일차부등식과 일차함수와의 관계에서 함수를 부등식으로 제시한 문제
3	연립일차방정식과 일차함수와의 관계에서 방정식을 함수로 제시한 문제
4	이차방정식과 이차함수와의 관계에서 함수를 방정식으로 제시한 문제
5	이차부등식과 이차함수와의 관계에서 부등식을 함수로 제시한 문제
6	연립이차방정식과 이차함수와의 관계에서 함수를 방정식으로 제시한 문제

[그림 2] 본검사 <검사지1>의 문항 구성

문항번호	<검사지2>의 내용
1	일차방정식과 일차함수와의 관계에서 함수를 방정식으로 제시한 문제
2	일차부등식과 일차함수와의 관계에서 부등식을 함수로 제시한 문제
3	연립일차방정식과 일차함수와의 관계에서 함수를 방정식으로 제시한 문제
4	이차방정식과 이차함수와의 관계에서 방정식을 함수로 제시한 문제
5	이차부등식과 이차함수와의 관계에서 함수를 부등식으로 제시한 문제
6	연립이차방정식과 이차함수와의 관계에서 방정식을 함수로 제시한 문제

[그림 3] 본검사 <검사지2>의 문항 구성

4. 검사 실시

1) 예비검사 실시

예비검사는 본 검사에서 사용할 검사 도구의 소요되는 시간, 문항의 수, 문항 제시 방법, 각 문항의 표현 등에 문제가 있는지를 알아보기 위해서 진행되었다. 또한 본 연구의 주제인 방정식·부등식과 함수의 관계에서 수학적 상황이 잘 나타나는 문항인가를 알아보기 위해 실시하였다. 예비검사 문항은 주관식인 6문항씩 2세트로 총 12문항으로 구성하였다.

예비 검사 결과 검사문항에 대한 학생들의 이해가 저조한 관계로 문항제시 방법을 수정하였다. 즉, 연립일차방정식과 일차함수와의 관계를 묻는 3번 문항과 연립이차방정식과 이차함수와의 관계에 대한 6번 문항을 제외하고 나머지 문항을 객관식으로 수정, 보완하였다.

2) 본 검사 실시

본 검사는 예비검사를 통해 수정 보완된 검사지를 가지고 실시하였다. 본 검사를 실시할 때 학생들에게 사전에 검사 실시 요령에 대하여 다음과 같이 주지시켰다.

① 검사 전에 학생들에게 검사의 목적과 답안 작성 요령에 대해서 자세히 설명하고, 답지는 별도로 마련하지 않고, 검사지에 바로 기입하도록 한다.
② 검사에 소요되는 시간은 50분으로 한다.
③ 검사 실시 후 검사지는 모두 회수한다.
④ 학생 상호간에 대화는 하지 못하게 하며, 검사 도중 힌트를 요구하는 발언은 하지 못하게 한다.
⑤ 모든 과정은 지우개를 사용하여 없애버리지 않도록 하며 수정하고자 할 때에는 두 줄로 그어 삭제의 뜻을 표시하고 그 밑에 계속하여 풀이하도록 지도한다.

3) 개별면담

개별면담은 지필검사에 나타나지 않은 원인을 보다 깊이 분석하기 위하여 학생 28명을 대상으로 실시하였다. 본 연구자는 면담을 통해 학생들이 문항에 대한 오류를 보인 이유를 질문하였고 면담 중 혹시 연구자가 질문한 내용에 대한 분석에 대하여 체크하지 못할 것에 대비하여 전체 면담 내용은 녹음하여 기록하였다.

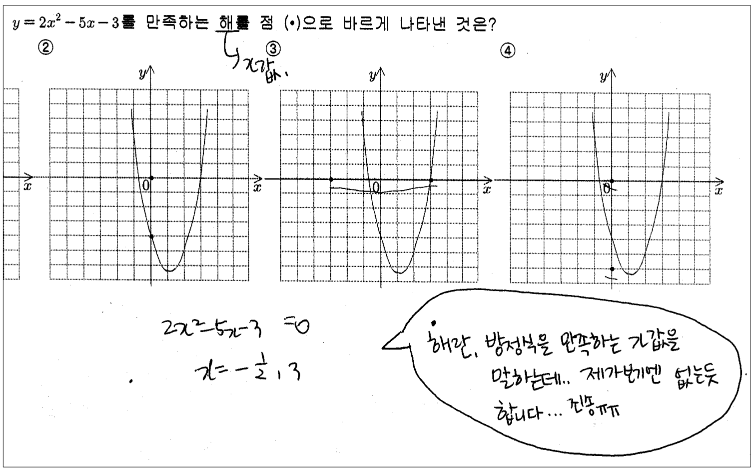
Ⅲ. 결과 및 논의

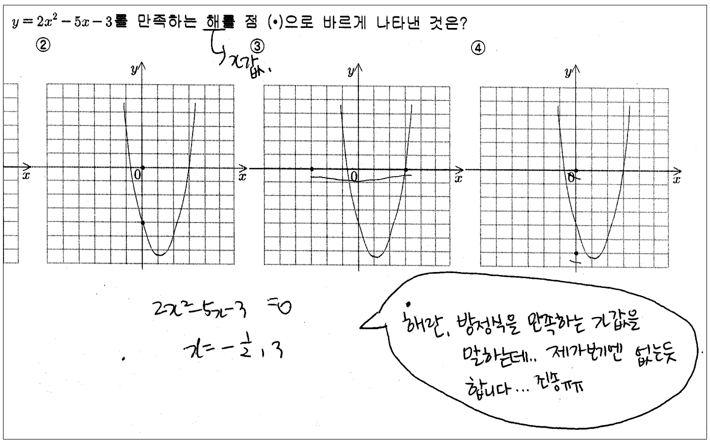
1. 결과분석

본 검사지 문항에 정답률을 살펴보면 다음과 같다.

<표 1> 본 검사지 문항에 대한 정답률

		여자(65명)		남자(63명)	
		인문계열	자연계열	인문계열	자연계열
일차방정식 일차함수	함수로 제시	78.1%(25명)	100%(33명)	71.8%(23명)	90.3%(28명)
	방정식으로 제시	90.6%(29명)	93.9%(31명)	68.7%(22명)	83.8%(26명)
일차부등식 일차함수	함수로 제시	84.3%(27명)	90.9%(30명)	53.1%(17명)	77.4%(24명)
	부등식으로 제시	68.7%(22명)	84.8%(28명)	46.8%(15명)	67.7%(21명)
이차방정식 이차함수	함수로 제시	90.6%(29명)	96.7%(32명)	53.1%(17명)	83.8%(26명)
	방정식으로 제시	90.6%(33명)	100%(33명)	56.2%(18명)	90.3%(28명)
이차부등식 이차함수	함수로 제시	59.3%(19명)	90.9%(30명)	34.3%(11명)	51.6%(16명)
	부등식으로 제시	56.2%(18명)	75.7%(25명)	31.2%(10명)	67.7%(21명)
연립일차방정식 일차함수	함수로 제시	78.1%(25명)	87.8%(29명)	46.8%(15명)	64.5%(20명)
	방정식으로 제시	43.7%(14명)	78.7%(26명)	15.6%(5명)	48.3%(15명)
연립이차방정식 이차함수	함수로 제시	50.0%(16명)	75.7%(25명)	9.3%(3명)	58.0%(18명)
	방정식으로 제시	25.0%(8명)	69.6%(23명)	0%(0명)	45.1%(14명)





[그림 4] 학생 N의 풀이과정

면담자 : 이렇게 예쁜 게 쓴 게 무슨 말이니?

학　생 : 해가 x값이잖아요. y를 0으로 만드는 x값이 해니까요. 그러니까 $-\dfrac{1}{2}$와 3이 보기에 있어야 된다고 생각해요. 그런데 보기에 없으니까 답이 없다고 쓴 거예요.

면담자 : (다른 문제(3번)를 보면서) 그런데 교점을 구하라고 하면 연립방정식의 해를 구해서 순서쌍을 쓰잖아. 그럼 순서쌍도 해잖아.

학　생 : 순서쌍은 해가 아니 예요. 해는 x값 이예요.

면담자 : (학생 N이 정답을 쓴 다른 문제를 보여주며) 그런데 너는 잘 풀었는데? (3, 4)라고 답을 썼네.

학　생 : 해는 순서쌍이 아닌데... 해는 x값 이예요.;

면담자 : 그럼 네가 쓴 4는 뭐야?

학　생 : (한참을 생각한 후에) 해가 x가 아닌가 봐요.

면담자 : 그럼 이 문제의 답은 뭘까?

학　생 : ①번이요.

면담자 : 왜?

학　생 : ...

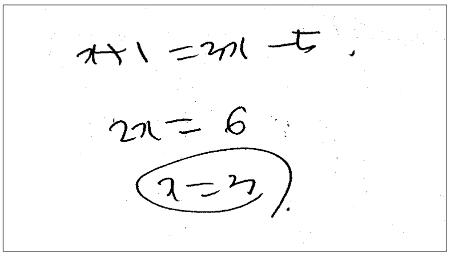
학생 N과 학생 O는 미지수가 2개인 방정식 $y=2x^2-5x-3$을 만족하는 해를 구하는 문항에서 해의 정의를 잘못 이해하고 있었으며, 이차방정식과 이차함수에서 동일한 수학적 상황을 인식하지 못한 경우였다.

다음은 연립일차방정식과 일차함수와의 관계에서 나타난 오답의 유형이다.

<표 2> 연립일차방정식 문제를 일차함수 문제로 제시한 문항의 오답 유형

연립일차방정식 일차함수		여자		남자	
		인문계열(7명)	자연계열(4명)	인문계열(17명)	자연계열(11명)
함수로 제시	x값만 구함	•	2명	2명	3명
	계산이 틀림	3명	•	3명	4명
	여러가지유형	1명	1명	3명	•
	무응답	3명	1명	9명	4명

다음은 x값만을 구하는 오류를 보인 학생 C에 대한 반응과 오류의 원인을 찾기 위하여 면담한 내용이다.



[그림 5] 학생 C의 풀이과정

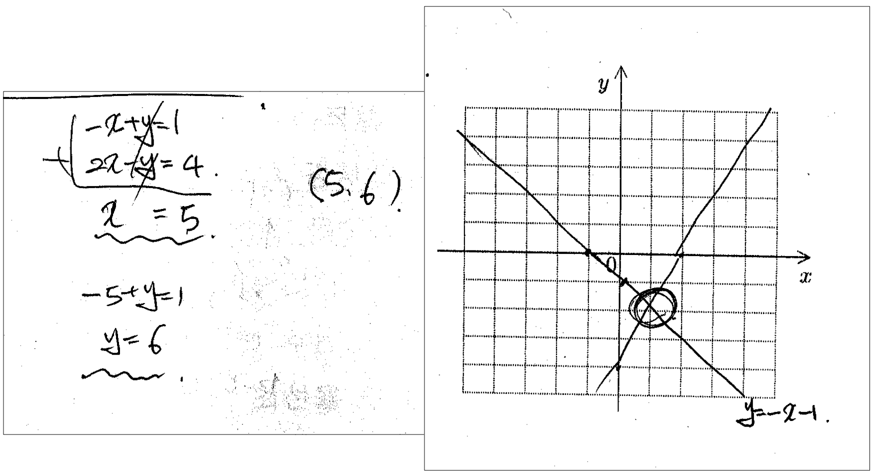
면담자 : 이 문제 어떻게 풀었니?
학　생 : 교점을 구하라고 하니까 두 식을 같다고 놓고, x의 값을 구했어요.
면담자 : 그럼 교점은 3이구나.
학　생 : 아니요, y의 값을 구해야 할 것 같아요. 교점은 x, y이니까요.
면담자 : 그럼 교점이 어떻게 되지?
학　생 : (두 식 x에 3을 넣어서 계산한 후) y가 4예요. 그러니까 교점은 (3, 4)예요.

학생 C는 교점을 쓸 때는 순서쌍으로 써야 하는데 y값은 구하지 않은 채 x의 값만을 구했고, 면담을 통해 계산 결과가 틀렸음을 확인하고 수정을 하였으며, 연립일차방정식과 일차함수에서 주어진 상황이 동일함을 인식하고 계산한 학생이었다.

<표 3> 일차함수 문제를 연립일차방정식 문제로 제시한 문항의 오답 유형

연립일차방정식 일차함수		여자		남자	
		인문계열(18명)	자연계열(4명)	인문계열(27명)	자연계열(16명)
방정식으로 제시	그래프 맞음 해 틀림	4명	3명	1명	4명
	그래프 틀림 해 맞음	5명	1명	4명	3명
	그래프 틀림 해 틀림	8명	3명	6명	4명
	무응답	1명	•	16명	5명

다음은 그래프는 그렸지만 해를 구하는 것이 틀린 학생 G에 대한 반응과 오류의 원인을 찾기 위하여 면담한 내용이다.



[그림 6] 학생 G의 풀이과정

면담자 : 이 문제는 그래프로 나타내는 문제인데 어떻게 그렸니?
학　생 : x절편이랑 y절편을 구해서 그래프를 그렸어요.
면담자 : (2)번 문제는 해를 표시하고, 순서쌍으로 나타내라고 했는데 어떻게 했니?
학　생 : 해는 동그라미로 표시한 거고, 순서쌍은 방정식을 연립해서 x와 y를 구했어요.
면담자 : 그럼 계산한 게 맞는지 다시 한번 볼까? (5, 6)이 나왔네. 맞니?
학　생 : 네.
면담자 : 그래프에 동그랗게 표시한 게 해라고 했잖아. 그게 (5, 6)이야?

학　생 : 아니요.
면담자 : 뭐가 잘못됐지?
학　생 : 모르겠어요.
면담자 : 그럼 어디다 잘못된 걸까?
학　생 : 그래프 그린게 잘못된 건지 해를 구한 게 잘못된 거 같아요.
면담자 : 그럼 너는 이 문제를 풀고 그래프와 해를 확인해 보지 않았니?
학　생 : 네.

학생 G는 그래프를 정확하게 그렸지만 해가 틀린 학생이었다. 두 개의 일차함수를 그래프로 나타내어 해를 구하는 문항인데도 연립일차방정식을 이용하여 해를 구했으며, 연립일차방정식의 해가 그래프를 이용하여 나온 해와 다른 것을 인식하지 못한 것으로 보아 방정식과 함수와의 관계를 이해하지 못하고 있는 경우였다.

다음은 연립이차방정식과 이차함수와의 관계에서 나타난 오답의 유형이다.

<표 4> 연립이차방정식 문제를 이차함수 문제로 제시한 문항의 오답 유형

연립이차방정식 이차함수		여자		남자	
		인문계열(16명)	자연계열(8명)	인문계열(29명)	자연계열(13명)
함수로 제시	x값만 구함	1명	4명	2명	3명
	해의개수 1개	1명	1명	3명	•
	계산이 틀림	•	•	7명	1명
	여러 가지 유형	8명	1명	•	•
	무응답	6명	2명	17명	9명

<표 5> 이차함수 문제를 연립이차방정식 문제로 제시한 문항의 오답 유형

연립이차방정식 이차함수		여자		남자	
		인문계열(24명)	자연계열(10명)	인문계열(32명)	자연계열(20명)
방정식으로 제시	그래프 맞음 해 틀림	1명	3명	•	5명
	그래프 틀림 해 맞음	4명	1명	•	4명
	그래프 틀림 해 틀림	15명	6명	16명	6명
	무응답	4명	•	16명	5명

2. 논의

본 연구의 목적은 고등학교 2학년 학생들이 동일한 수학적 상황이 주어졌을 때 방정식·부등식과 함수와의 관계를 이해하고 있는지를 분석해 보고 이해하지 못하는 경우 어떠한 원인이 있는지를 알아보고자 하는 데에 있다. 이러한 분석 결과를 토대로 선행 연구와 관련지어 차례로 논의해 본다.

첫째, 일차방정식·일차부등식과 일차함수에서는 학생들이 관계를 많이 이해하고 있지만, 차수가 높은 이차방정식·이차부등식과 이차함수에서는 관계에 대한 이해 분석이 떨어지는 것으로 나타났다. 일차방정식·일차부등식과 일차함수보다 이차방정식·이차부등식과 이차함수에서 학생들의 계산 능력이 떨어지는 것이 관계 이해 능력에 영향을 주었다. 또한 정답을 말한 학생들을 면담한 결과 방정식·부등식과 함수와의 관계를 이해하지 못한 채 문제를 푼 학생들이 있었으며, 이는 관계에 대한 이해능력이 없어도 문제를 푸는 데에 지장이 없는 문제를 접해 온 학생들이기 때문에 기계적인 계산만으로도 정답을 맞추는 데는 어려움이 없을 것으로 분석된다.

둘째, 방정식을 함수로 나타내는 주관식 문항을 살펴보면 학생들의 그래프를 그리는 데 많은 어려움을 겪고 있는 것을 볼 수 있었다. 함수를 이용하여 연립방정식의 해를 구하라고 했음에도 불구하고, 해를 구한 모든 학생들이 가감법이나 대입법을 사용하여 연립방정식의 해를 구하였고, 그래프를 이용하여 해를 구한 학생은 없었다. 이와 반대로 함수를 방정식으로 나타내는 주관식 문항을 보면 학생들이 기계적인 계산 문제는 어려움 없이 푸는 것을 알 수 있었다. 학생들은 방정식이나 부등식으로 제시된 문항보다 함수로 제시된 문항을 기피하는 경향을 보였으며, 한쪽으로 치우친 학습을 하게 된 결과 방정식·부등식과 함수와의 관계를 이해하는 데 어려움을 주는 것을 알 수 있었다.

셋째, 정난희(2003)의 연구에서 보면 이차함수와 이차방정식·이차부등식의 관계 이해 능력을 향상시키기 위해 Maple을 사용한 수업을 했지만 이 또한 개념 학습 면과 계산 기능 학습 면에서 유의미한 차이는 없었다. 이번 연구에서는 고등학교 학생들을 대상으로 중학교에서 배운 일차함수와 일차방정식·일차부등식의 관계부터 이차함수와 이차방정식·이차부등식의 관계까지의 이해 능력을 살펴보았다. 소프트웨어를 이용하여 수업을 한 결과 학생들은 관계 이해 능력의 차이를 보이지 않았고 이번 연구에서도 함수와 방정식·부등식의 관계에서 동일한 수학적 상황을 인식하지 못한 학생들은 적었다. 하지만 정답을 말한 학생들을 면담한 결과로 볼 때 기계적인 계산으로 문제를 풀었을 뿐 수학적 상황을 인식하고 있지 못한 것으로 보아 이번 연구 결과에서 수학적 상황이 동일함을 인식하고 있는 학생이 많은 것은 문항의 난이도가 좀 쉬었기 때문에 나타난 결과로 판단된다.

학생들의 함수와 방정식·부등식의 관계 이해 능력의 향상을 위해서는 함수 단원을 가르칠 때 방정식과 부등식을 언급해 주는 연계된 수업이 되어야만 함수와 방정식·부등식 관계에 대해 학생들이 인식할 수 있을 거라 생각된다.

Ⅳ. 결론 및 제언

1. 결론

본 논문에서는 고등학교 학생들이 동일한 수학적 상황에서 방정식·부등식과 함수의 관계를 인식하고 있는지를 분석하고, 인식하지 못하는 학생들의 원인은 무엇인지 찾아보고자 하였다.

본 연구의 목적은 주어진 동일한 수학적 상황을 방정식 문제와 함수의 문제로 제시할 때 학생들은 해결 과정에서 동일한 수학적 상황을 인식하고 있는가? 와 주어진 동일한 수학적 상황을 부등식 문제와 함수의 문제로 제시할 때 학생들은 해결 과정에서 동일한 수학적 상황을 인식하고 있는가? 에 대해 알아봄으로써 교사가 학습지도시 방정식·부등식과 함수와의 관계에 대한 적절한 준비가 이루어지도록 하고자 하였다.

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 일차방정식 문제를 일차함수로 제시한 문항에서는 일차함수 문제를 일차방정식으로 제시한 문항보다 정답률이 높았으며, 일차방정식과 일차함수의 관계에 대해 학생들은 동일한 수학적 상황임을 인식하고 있는 것으로 나타났다. 인문계열 여학생에서는 일차함수 문제를 일차방정식으로 제시한 문항에서 정답률이 높은 반대의 결과가 나왔지만 계산의 오류가 정답률에 영향을 미쳤을 뿐 동일한 수학적 상황을 인식하고 있는 것에는 영향을 주지 않았다.

일차부등식 문제를 일차함수로 제시한 문항에서는 일차함수 문제를 일차부등식으로 제시한 문항보다 정답률이 높았다. 방정식과 함수와의 관계를 묻는 1번 문항보다 전체적으로 정답률이 떨어졌으며, 이는 방정식과 부등식 문항을 기계적인 계산에 의해서 푸는 문항으로 주로 접해온 학생들은 동일한 수학적 상황임에도 생소한 문항에 어려움을 보인 것을 알 수 있었다.

이차방정식 문제를 이차함수로 제시한 문항에서는 이차함수 문제를 이차방정식으로 제시한 문항보다 정답률이 낮았다. 이차방정식의 해를 구하는 과정이 인수분해를 이용해서 쉽게 계산이 가능했지만 +,- 부호를 바꿔서 하는 계산의 오류가 나타났다.

이차부등식 문제를 이차함수로 제시한 문항에서는 이차함수 문제를 이차부등식으로 제시한 문항보다 정답률이 높았다. 다만 자연계열 남학생에서 반대의 결과가 나왔는데 이는 -부호를 양변에 곱하면 부등호가 바뀌는 계산의 오류를 범한 학생들이 많기 때문이었다. 그러나 계산의 오류를 범한 학생들을 면담한 결과 대부분 부등식과 함수의 관계를 인식하고 있는 학생임을 파악할 수 있었고, 단순한 계산의 오류를 제외하고는 부등식과 함수와의 관계를 인식하고 있지 못한 것으로 나타났다.

둘째, 3번 문항과 6번 문항은 주관식 문항으로 일차함수와 이차함수를 그래프로 직접 그려서 연립일차방정식과 연립이차방정식의 해를 구하는 문항이었다. 정답률이 다른 문항에

비해 많이 떨어져 학생들이 그래프를 그리는 것을 어려워 한다는 것이 나타났으며, 면담 결과 그래프에서 나타나는 교점이 연립방정식의 해라고 알고 있는 학생은 많았지만 그것을 그래프를 그리거나 해를 구하는 데 사용하지 못하는 것으로 보아 방정식과 함수와의 관계에서 동일한 수학적 상황을 인식하지 못한 것을 알 수 있었다. 또한 일차함수와 이차함수로 문제를 제시한 후 연립방정식의 해를 구하라는 문항에서는 정답률이 높았지만 면담 결과 정확한 뜻을 모른 채 기계적으로 계산을 하는 학생이 많다는 것을 알 수 있었다. 이 또한 동일한 수학적 상황을 인식하지 못한 경우로 판단되었다.

참고 문헌

교육부(1997). 중학교 교육과정 해설. 대한 교과서 주식회사.

김시넌(2000). 수학적 연결성 강화 프로그램 개발 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

김해성(2004). 이차함수 그래프 과제에서의 오류에 대한 교정 방법과 그 효과 분석. 이화여자대학교 석사학위 논문.

김현식, 장혜원(1996). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구 - 표상 모델 개발을 중심으로-. 대한수학교육학회 논문집 제6권 제2호 : 185-196

박근덕(1996). 수학적 교수-학습에서의 표현에 관한 연구. 한국교원대학교 박사학위 논문.

박성선(1998). 수학학습에서의 상황인지론 적용과 전이에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

방정숙(1996). 초・중학생의 수학적 조건추론 능력에 관한 분석. 한국교원대학교 석사학위 논문.

성종기(2000). 이차함수의 그래프에 대한 오류분석의 연구. 한국교원대학교석사학위 논문.

신현성, 최용준(2001). 수학 10-나. 서울 : (주) 천재교육.

우정호(1998). 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

우정호, 류희찬, 문광호, 박경미(2001). 수학 10-나. 서울 : 대한교과서(주)

우현철(2000). 이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

이종희(1999). 이해에 대한 수학교육적 고찰. 서울대학교 박사학위 논문.

이현화(2006). 이차함수의 성질에 관한 오류 분석과 인지 갈등 유발을 통한 오류 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

임봉환(2004). 고등학교 함수영역에서 실생활 문제에 대한 수학화 과정의 사고 분석. 한국교원대학교 석사학위 논문.

정난희(2003). 함수와 방정식·부등식 사이의 연결 능력 향상을 위한 Computer Algebra System의 활용 효과. 이화여자대학교 석사학위 논문.

장혜원(1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구 - 표상 모델 개발을 중심으로-. 서울대학교 박사학위 논문.

최지선(2003). 중등학교 수학학습에서 나타나는 오개념에 관한 고찰. 서울대학교 석사학위 논문.

홍성민(2000). 수학적 상황 설정 방법에 관한 연구. 대구대학교 석사학위 논문.

Ernst von Glasersfeld(1987). Preliminaries to any theory of representation : Problems of representation in the teaching learning of mathematics。 Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates

G. Polya, . 우정호(1994) 역. 어떻게 문제를 풀 것인가. (주) 천재교육.

National Council of Teachers of Mathematics(1989). Curriculum and evaluation standard for school mathematics. VA: Author. 구광조, 오병승, 류희찬 (공역) (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 경문사.

The National Council of Teachers of Mathematics(2000). Principle and standards for school mathematics. Reston, VA: Author

An Analysis of students' problem solving ability on the equivalent mathematics situations
-Focused on equations, inequalities, and functions-

Park, Jeong Mi[3] · Lee, Joong Kwoen[4]

Abstract

The purpose of this study is to examine that high school students recognize mathematical situation when they are requested for changing identical mathematics situations into different situations. The results of the study are followings.

First, percentage of correct answers to the questions of turning equal mathematical situation into function is higher than the one of turning equal mathematical situation into equation and inequality. As a result of individual interview for comprehensibility of the students on these relations, it is found that if degree goes up and there is different expressions of questionaries although mathematical situation is identical, it affects comprehensibility of the subjects.

Second, we found that they cannot understand identical mathematics situations because they have trouble in drawing graph or applying to get the answer while many students understand a point of intersection on the graph as a correct answer.

Third, As a result of individual interview for comprehensibility of the students on relation between equation, inequality and function, we found that students manage to get correct answer even without perfect comprehensibility on this relation.

Key Words : Mathematics Situations, Equations, Inequalities, Functions

Received November 2, 2013
Revised December 18, 2013
Accepted December 26, 2013

3) Dongguk University, Graduate School (nannananna@hanmail.net)
4) Dongguk University (joonglee@dgu.edu)