한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 4 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 4, 719-743, December 2013

# 비(非)구조화된 정도에 따른 비례 문제 유형에서 나타난 초등학생의 비례추론에 관한 연구1)

김민경2) ·박은정3)

대부분의 초등학생이 어려워하는 개념 중 하나인 비례추론은 이후 함수적 사고, 대수적 사고, 그리고 수학적 사고에 연결되는 본질적인 개념이다. 이에 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 서로 다른 비례문제를 적용하여 비례추론의 발달 단계에 비례문제의 유형과 문제의 비(非)구조화된 정도가 어떠한 영향을 주는지 학생들의 구체적인 문제해결 과정을 통해 살펴보았다. 초등학교 6학년 학생들의 비례추론의 발달단계를 분석한 결과, 과반수의 학생이 모든 문제에서 비례적 추론 단계로 나타났으며 문제에 따라 서로 다른 다양한 비례추론의 발달단계가 나타났다. 특히, 수리적 비교 문제보다 미지값 구하기 문제에서 과도기·비례적 추론의 발달단계가 더 높은 비율로 나타났다.

주요용어 : 비(非)구조화된 정도, 비례 문제 유형, 비례추론

## I. 시작하며

비례추론은 지도의 축척, 쇼핑할 때의 가격 비교, 환자의 체중에 따른 투약량 결정 등 일상생활에서 매우 많이 사용되는 추론의 한 유형이다(Valverde & Castro, 2012). 비례추론에 대한 다양한 정의 중 Karplus, Pulos와 Stage(1983)는 일차함수로 관계된 두 변수 사이의 추론을 비례추론으로 보았으며 Lesh, Post와 Behr(1988)는 공변과 다중비교를 포함한 수학적 추론의 한 형태를 비례추론으로 정의하며 수학적 체계 속에서 구조적 유사성과 불변의 성질을 인지하는 것을 가장 중요한 특징으로 꼽았다. 여러 문헌연구에서는 이러한 비례추론이 학생들의 인지적 발달에 중요하며 특히 함수, 그래프, 대수식, 측정 등과 관련된 개념의 발달에 기초가 됨을 주장하고 있다(Karplus 외, 1983; Lamon, 2007).

---

1) 이 논문은 2010년도 정부재원(교육과학기술부 인문사회연구역량강화사업비)으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF-2010-327-B00570)

2) 이화여자대학교 (mkkim@ewha.ac.kr)
3) 이화여자대학교 대학원 (gloria4004@naver.com)

하지만 비례추론의 기본 개념이 되는 비는 다른 수학 개념들과는 달리 매우 추상적이며 비를 배울 때 두 양과 두 수를 다루면서 또 다른 하나의 대상을 파악해야 하기 때문에 초등학생 대부분이 어려워하는 부분이다(정은실, 2003). TIMSS 2007에 대한 결과분석에서도 싱가포르 학생과 우리나라 학생의 점수를 비교한 결과 싱가포르 학생에 비해 상대적으로 낮은 점수를 보인 문항이 비, 비례식, 백분율로 나타났다(김경희, 백희수, 2010). 이러한 연구결과는 우리나라 학생들의 비례추론 능력에 대한 정확한 진단과 비례추론에 어려움을 보이는 원인규명이 필요함을 나타낸다.

여러 선행 연구에서는 학생들이 비례문제를 해결하는데 영향을 주는 요인으로 비례문제에서 주어진 수, 비례문제의 유형, 비례문제의 맥락에 주목하였다(Lamon, 1993; Lo & Watanabe, 1997; Singh, 2000; Van Dooren, De Bock, Evers & Verschaffel, 2009). 하지만 Nunes 외(1993)의 연구에서 학교 교육을 받지 않은 십장·어부들이 비례문제를 해결하는 절차적 과정을 학습한 학생에 비해 상황에 유연하게 대처하고 의미 있는 전략을 도출해 낸 것(박정숙, 2009, 재인용)은 실생활에서의 비례문제를 해결하는 데는 교과서의 전형적인 문제를 해결한 경험만으로는 충분하지 않음을 시사한다. 이는 학생들이 능숙하게 다양한 상황 속에서 비례문제를 해결하기 위해서는 비례문제가 얼마나 현실의 문제 상황을 잘 반영하고 있는지에 대한 고민이 필요함을 의미한다.

학교 교과서에 제시된 정형화된 문제와는 달리 현실 맥락에서부터 시작되어 학습자가 문제를 정의하고 해결에 요구되는 정보 및 기술을 스스로 결정하도록 하는 문제로 비(非)구조화된 문제와 그 교육적 의미를 생각해 볼 수 있다(Bransford 외 1996; Chi & Glaser, 1985; Ge & Land, 2003; Ng, Cheung & Hew, 2010). PISA 2009의 연구 결과에 따르면 우리나라의 많은 학생들이 정형화된 문제 풀이에 치중된 학교 교육으로 인하여 수학적 개념을 일상생활의 맥락과 연계함으로써 해결해야 하는 문제에서 어려움을 느끼는 것으로 나타났다(임해미, 김수진, 김경희, 2012). 이는 특히, 우리나라의 학교 수학이 수학적 지식을 실제적 맥락에 연결 짓고 복합적인 문제 상황을 유연하게 해결할 수 있는 능력을 신장시키는 방향으로 변화되어야 함을 강조하며 비(非)구조화된 문제의 필요성을 더욱 부각시키고 있다. 성창근과 이광호(2012)는 비례문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인을 분석하기 위해 해결방법의 예측가능정도에 따라 문제를 비(非)구조화된 정도로 구분하여 살펴보았으며 그 결과 비례 문제 해결 능력의 계발을 위해 비(非)구조화된 문제의 적극적인 활용을 제안한 바 있다.

이에 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 서로 다른 비례문제를 적용하여 비례 추론의 발달 단계에 비례문제의 유형과 문제의 비(非)구조화된 정도가 어떠한 영향을 주는지 학생들의 구체적인 문제해결 과정을 통해 살펴보고자 한다. 이처럼 각 문제의 특성에 따라 나타나는 비례추론의 발달 단계를 분석함으로써 초등학교 학생들의 비례추론 능력의 발달을 도모할 수 있는 교수·학습과 비례문제의 개발에 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

# II. 이론적 배경

## 1. 비례추론의 발달 단계

비례성의 발달을 오랜 기간 연구 해온 Piaget와 그의 동료들(1977)은 청소년들의 비례성에 대한 이해 능력은 문제 정보의 일부분만 사용하는 질적 반응, 변수 사이의 관계에 주목하기 시작하는 직관적 반응, 체계적인 방식으로 변수 사이의 관계를 계량화하는 가법적 전략, 두 양의 곱셈 관계에 주목하는 승법적 전략을 이용하는 단계로 발달하며 그 후에 비례법칙을 인지하는 형식적 단계로 발달한다고 하였다. 마지막 단계는 수치적 비례 관계를 인식하는 단계로 $a' = na$, $b' = nb$로부터 $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$라는 비례성을 인식하는 단계이다. 또한 가법적 사고 수준을 비례식의 양변의 구조적 동형을 인지하지 않은 채 옳은 답을 구하는 과정을 전비례성이라 부르며 비례성과 구분하였다. 예를 들면, 12명의 사람들이 2대의 차에 똑같이 나누어 탄다고 할 때 6대의 차에 탈 수 있는 사람은 모두 몇 명인가와 같은 문제를 풀 때 4대에는 24명, 따라서 6대에는 36명과 같이 1대의 차에 6명의 사람이 탄다는 것을 인식하지 못하고 같은 수를 반복적으로 더함으로써 답을 구하는 과정을 말한다. Piaget가 제시한 비례추론의 발달 단계는 이후 연구자들이 비례추론의 발달 단계를 연구하는데 기초가 되었다(박정숙, 2009 재인용).

Karplus 외(1983)는 레몬에이드 퍼즐문제에 기초하여 비를 비교하는 문제로 사용하여 학생들의 수행을 크게 4가지 범주로 분류하여 제시하였다. 범주I(불완전, 비논리적)은 어떠한 설명이 제공되지 않거나 비논리적 방법으로 자료를 사용, 혹은 적합하지 않은 방법으로 연산을 사용한 경우이다. 범주Q(질적)는 더 많다, 적다, 같다와 같이 질적 표현을 사용하여 값을 비교하며 주어진 4가지 용어를 사용하여 그들의 답을 정당화한다. 범주A(덧셈적)는 주어진 값에 뺄셈을 적용하여 답을 얻는다. 범주P(비례적)는 비록 계산상 오류를 보이더라도 답을 얻기 위해 주어진 모든 자료의 비례적 관계를 적용하며 세 가지 하위 범주로 구분된다.

Lesh 외(1988)는 Piaget가 제시한 발달 단계와 비슷한 단계를 제시하며 발달 단계라는 용어 대신 개념화라는 용어를 사용하여 비례추론의 발달 단계를 5단계로 구분하여 제시하였으며 이를 발전시켜 Koellner-Clark과 Lesh(2003)는 학생들의 문제 해결 과정에 기초하여 비례추론의 발달단계를 5단계로 구분하여 설명하였다. 1단계는 문제의 해석에 기초하는 단계로 학생들은 문제 상황에 관련된 두 양 중에서 한 부분에만 초점을 맞추고 해결하려 한다. 2단계는 문제 상황으로부터 질적인 관계에만 기초하는 단계로서 질적 추론을 통해 문제를 해결 할 수는 있지만 양적 추론을 필요로 하는 문제는 해결하지 못한다. 3단계는 덧셈적 관계에 근거하여 추론할 수 있는 단계로, 전 단계에서의 질적 추론을 수량화하게 되지만 이 단계에서는 곱셈적 관계를 인식하지 못하고 대신에 합이나 차와 같은 덧셈적 관계에 초점을 두게 된다. 비례추론 모델에서 비교, 감소, 증가와 같은 규칙을 적용할 수 있게 된다. 4단계

는 패턴을 인지하고 반복 계산하는 것이 가능한 단계로서 이 단계의 학생들은 문제 해결을 위해 징검다리 구성 전략을 사용하기도 한다. 이때의 징검다리 구성하기 전략을 주어진 정보를 활용가능 하도록 조직할 때 나타나며 비례표 이용 등을 통하여 발견된 규칙으로 문제를 해결할 수 있게 된다. 마지막 5단계는 둘 또는 그 이상 사이의 비 관계를 포함하고 비교하는 각각의 상황에 기초해 비례적으로 추론하는 단계이다.

Carpenter, Gomez, Rousseau, Steinthorsdottir, Valentine와 Wagner(1999)는 학생들의 비례 추론 수준을 4개의 수준으로 구분하여 설명하였다. 1수준은 주어진 문제를 비례적으로 풀지 못하는 단계로 임의로 계산하거나 덧셈적인 차이에 초점을 둔다. 2수준은 비를 개별적인 단위(나눌 수 없는 단위)로 보는 단계로 반복적으로 더하거나 정수 배를 하여 비로 나타낼 수 있지만 주어진 비가 $5:45=7:x$와 같이 비정수비라면 비례 문제를 해결하지 못한다. 3수준은 주어진 비를 나눌 수 있는 단위로 보는 단계로 이전 단계에서는 비를 단위 전체로 생각하는 데 비해 이 수준에서는 비정수비로 비를 변형시킬 수 있다. 따라서 학생들은 정수비, 비정수비의 관계를 가지는 문제를 해결할 수 있다. 마지막 4수준은 비를 단위 양으로 생각하고 곱셈 관계로 비를 이해하며 비율내, 비율간 관계를 알고 비와 비례문제를 유연하게 해결 할 수 있다.

이상의 비례 추론의 발달 단계에 대한 여러 학자들의 연구 결과를 종합해보면 학자마다 약간씩 차이는 있으나 두 양을 인식하지 못하고 하나의 양에만 관심을 두거나 두 양의 관계를 인식하더라도 직관적인 수준에 머무르는 단계에서 가법적, 승법적 전략의 사용으로 발전되어 가는 것을 알 수 있다(<표 Ⅱ-1> 참조). 이에 본 연구에서는 여러 학자들이 제시한 비례추론의 발달단계를 비교·분석한 결과에 기초하여 학생들의 비례추론을 분석하고자 한다.

<표 Ⅱ-1> 학자간의 비례 추론의 발달 단계 비교

| 학자 | Karplus 외(1983) | Koellner-Clark과 Lesh(2003) | Carpenter 외(1999) |
|---|---|---|---|
| 비례 추론의 발달 단계 | 불완전, 비논리적 사고<br>질적 사고<br>덧셈적 사고<br>비례적 사고 | 한 양에 초점<br>질적 추론<br>덧셈적 추론<br>징검다리 구성전략<br>비례추론 | 임의 계산<br>덧셈적 추론<br>정수비의 이해<br>비정수비의 이해<br>비율내, 비율간의 관계 이해 |

## 1. 비례문제의 유형

학생들이 비례문제를 해결하는데 어려움을 주는 요인에 대한 연구 중에서 Lo와 Watanabe(1997)는 Kaput과 West(1994)가 제시한 과제 요인에 기초하여 자신의 면담 학생을 관찰하고, 비례문제를 해결하는데 영향을 주는 요인으로 (1)주어진 수 (2)비례 문제의 유

형, (3)과제 상황을 제안하였다. 특히, 학생들의 비례추론 능력의 발달을 위해서는 보다 풍부하고, 다양한 상황의 비례문제의 경험이 중요함을 강조하였다. 이처럼 비례문제가 지닌 복합적인 특성이 비례추론의 발달에 영향을 준다는 점을 고려하여 초등학교 6학년 학생들의 비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 과제 요인 중 비례문제의 유형을 중심으로 살펴보고자 한다. 더불어 기존의 연구에서 제시했던 과제 요인 중 (3)과제 상황이 비례문제가 제시되는 맥락적인 측면에만 초점을 두었다면 이를 좀 더 확장하여 비례문제가 주어지는 상황을 실생활에서 경험할 수 있는 보다 복잡하고, 비(非)구조화된 형태로 제시하여 비례추론의 발달에 어떠한 영향을 주는지 분석해 보고자 한다.

기존의 선행연구를 살펴보면 1960년대에서 1980년대 사이에는 비례상황의 문제 유형을 물리, 비율, 혼합 문제로 구분하여 연구하였다면 최근에는 미지값문제, 수리적 비교문제, 질적인 추측과 비교에 관한 문제로 구분하고 있다(Singh, 2000). 전자는 비례문제가 제시된 맥락에 초점을 두었다면 후자는 비례문제에 내재된 비의 구조에 초점을 둔 구분방법으로 보인다. 본 연구에서 비례문제에 내재된 비의 구조에 초점을 두어 비례문제 유형을 구분하고자 하며 이를 구체적으로 살펴보면 <표 Ⅱ-2>와 같다.

김용익(2009)은 제7차 교육과정 교과서에서 비와 비율, 비례식, 비율그래프 등 비례문제가 제시된 상황을 분석한 결과 비와 비례를 도입하는 상황이 빈약함을 지적한바 있다. 이는 현행 교과서에서도 마찬가지로 비례문제의 유형을 중심으로 살펴보았을 때 현행교과서에 제시되고 있는 비례문제의 유형은 미지값 구하기 문제와 수리적 비교문제만이 제시되고 있으며 질적 추측 및 비교 문제는 찾아 볼 수 없다. 또한 정은실(2003), 정영옥(2006)이 현행 수학교과서의 문제점으로 지적한 것처럼 비례식이라는 식을 능숙하게 풀 수 있는 알고리즘의 지도에 중점을 두면서 비례식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 미지값 구하기 문제가 대부분을 차지하고 있다. 이에 본 연구에서는 초등학교 6학년 학생들의 비례추론 능력을 분석하기 위해 비례 문제 유형을 현행 교과서에 제시되고 있는 문제 유형인 미지값 구하기 문제와 수리적 비교 문제 두 가지로 제한하여 적용해 보고자 한다.

<표 Ⅱ-2> 비례상황의 문제 유형(Singh, 2000).

| 문제유형 | 설명 |
|---|---|
| Missing value problems (미지값 문제) | 세 개의 수 정보가 주어지고 하나의 미지수를 찾는 문제(a/b=c/x에서 a, b, c의 값이 주어지고 x의 값 찾기)<br>*<예> Mr Short의 키를 button으로 재었을 때 4buttons이고, Mr Tall의 기는 6buttons였다. 이들의 키를 paper clip으로 재었을 때 Mr Short의 키는 6paper clips이라면 Mr Tall의 키는 몇 paper clips이겠는가?* |
| Numerical comparison problems | 두 개의 완전한 비율이 주어지면, 비율을 비교해야 하는 문제(a, b, c, d가 주어지고, a/b와 c/d를 비교하여 더 큰지, 더 빠른지, 더 비싼지 등 비율 비교하기) |

| | |
|---|---|
| (수리적 비교 문제) | *<예>John과 Mary는 각각 설탕과 레몬주스의 양을 다르게 혼합하여 서로 다른 레몬에이드를 만든다. John이 레몬주스 12스푼에 설탕3스푼을 넣었다면 Mary는 레몬주스 13스푼에 설탕 4스푼을 넣었다. 누구의 레몬에이드가 더 달겠는가?* |
| Qualitative prediction and comparison problems (질적 추측 및 비교 문제) | 어떤 특정한 수리적 값에 의존하지 않고 비교해야 하는 문제로, 비례적 사고의 부분이며 학생들이 비와 비례의 의미를 이해하는 것을 기초로 함 |
| | *<예>한 학급에 여학생은 전체의 3/5이다. 만약 6명의 여학생과 9명의 남학생이 더 들어왔다면 이 학급의 여학생 수와 남학생 수는 어떻게 되겠는가?*<br>*a.여학생이 더 많다.* *b.남학생이 더 많다.*<br>*c. 같다.* *d. 정보가 충분하지 않다.* |

## 2. 비(非)구조화된 문제

문제를 구조화된 문제에서부터 비(非)구조화된 문제에 이르는 연속체로 표현한다면 일반적으로 교과서 단원에 포함된 문제로서 제한된 수학적 지식에 기초한 응용문제를 구조화된 문제라 할 수 있다(Jonassen, 1997). 이처럼 학생들이 교과서에서 접할 수 있는 전형적인 상황으로 제시되는 문제가 구조화된 문제라면 본 연구에서는 비(非)구조화된 형태로 학생들에게 비례문제를 제시하고, 이를 학생들의 비례추론의 발달에 영향을 주는 과제 요인의 하나로 여기고 분석해 보고자 한다.

문제는 수렴적인 해를 가지는 비맥락적인 문제에서부터 여러 개의 해를 가지는 매우 맥락화된 문제에 이르기까지의 연속체를 나타내며 이에 따라 퍼즐 문제, 구조화된 문제, 비(非)구조화된 문제 세 종류로 무리지어진다(Jonassen, 1997). 구조화된 문제와 비(非)구조화된 문제의 특징을 대조하여 요약하기도 하였으며(김민경, 이지영, 홍지연, 주현정, 2012) 문제의 비구조성에 대한 요소로 김민경, 이지영, 홍지연과 김은경(2011)은 실제성, 복잡성, 개방성의 구성요소로 설명하기도 하였다.

이러한 비(非)구조화된 문제의 특징은 학생들로 하여금 문제를 조직하고, 문제의 해결책을 찾는 것을 어렵게 만든다(Ge & Land, 2003). 학생들은 다양한 해결책 중에서 문제와 그 제한점에 근거하여 가장 적합하다고 생각하는 것을 하나 선택해야만 하기 때문이다(Bulu & Pedersen, 2010). 하지만 복잡하고, 비(非)구조화된 문제 해결은 구조화된 문제보다 실세계에서 더 자주 마주친다는 점에서 교육적으로 그 중요성이 강조되고 있다(Bransford 외, 1996). 복잡한 현실 세계의 문제와 같은 비(非)구조화된 문제를 해결하는 것은 현실 세계의 상황에 지식을 적용하고, 지식의 전이를 쉽게 할 수 있도록 도움을 주기 때문이다(Ge & Land, 2003).

하지만 현재 우리나라의 수학교과서에서는 이와 같은 비구조성을 지닌 문제가 부족한 실정으로 학생들의 수학적 문제해결능력 향상을 위해서는 비구조화 문제와 같이 실세계 문제

상황을 담고, 학생들이 다양한 생각을 할 수 있는 열린 문제가 교육과정에 제시되어야 할 필요가 있다(김민경 외, 2011). 특히, 김경희와 백희수(2010)는 TIMSS 2007에 대한 결과 분석을 통해 우리나라 학생들이 어려워하는 비, 비례식, 백분율을 지도할 때 수에 의한 연습을 도입하기 위한 인위적인 맥락이 아닌 이 시기 학생들의 관심사와 현실을 반영한 맥락에서 지도하는 것의 필요성을 강조한 바 있다. 이러한 까닭에 본 연구에서는 비(非)구조화된 문제를 해결하는데서 나타난 비례추론의 발달 단계를 분석하여 초등학생들의 비례추론 능력에 비(非)구조화된 문제가 어떠한 영향을 보이는지 분석해 보고자 한다.

## III. 연구 방법

### 1. 연구 대상

본 연구의 목적은 초등학교 6학년 학생들의 비례상황 문제를 해결하는데서 나타나는 비례추론의 발달 단계를 분석하는데 있다. 이를 위해 수도권의 K초등학교 6학년 학생(24명)과 S초등학교 6학년 학생(26명) 총 50명을 대상으로 연구 과제를 적용하였다. 하지만 연구에 참여한 인원 50명 중 연구 기간 중 1일 이상 결석한 경우나 학습지에 이름이 미기재 된 경우 등 6개 모든 과제에 대한 문제해결 결과를 수집할 수 없는 경우 분석대상에서 제외시켰다. 이에 최종적으로 분석 대상이 된 학생은 총 39명(K초등학교 20명, S초등학교 19명)이다. 이들은 6학년 1학기 때 비와 비율과 관련된 단원을 이미 학습한 상태였으며 연구 적용 기간 바로 전에 6학년 2학기 7단원 정비례와 반비례의 단원의 학습을 마쳤다.

### 2. 연구 과제

본 연구에서는 학생들의 비례추론 능력에 영향을 주는 요인으로 비례문제 유형 및 문제의 비(非)구조화된 정도를 선정하였으며 이를 위해 비례문제 유형이 다른 수리적 비교문제와 미지값 구하기 문제, 문제의 비(非)구조화된 정도가 다른 구조화된 문제와 비(非)구조화된 문제로 각각 개발하였다. 개발된 과제는 박사과정생 2인과 전문가 1인의 검토를 받았다. 특히, 과제를 수일에 걸쳐 적용해야 했기 때문에 이전의 문제해결 경험이 이후의 문제해결에 영향을 줄 수 있음을 고려하여 구조화된 문제 중 수리적 비교문제와 미지값 구하기 문제는 각각 2세트씩 개발하여 비(非)구조화된 문제를 적용하기 이전과 이후에 모두 적용할 수 있도록 하였다(<표 Ⅲ-1>참고)

<표 Ⅲ-1> 비례문제의 특성

| 과제 | 비례문제의 유형 | 문제의 비(非)구조화된 정도 |
|---|---|---|
| 과제1 | 수리적 비교 문제 | 구조화된 문제 |
| 과제2 | 수리적 비교 문제 | |
| 과제3 | 수리적 비교 문제 | 비(非)구조화된 문제 |
| 과제4 | 미지값 구하기 문제 | 구조화된 문제 |
| 과제5 | 미지값 구하기 문제 | |
| 과제6 | 미지값 구하기 문제 | 비(非)구조화된 문제 |

구조화된 문제이면서 비례문제의 유형이 서로 다른 [과제 1, 2]와 [과제 4, 5]의 경우 동일한 비의 구조를 나타낼 뿐만 아니라 문제가 주어진 상황도 유사하도록 개발하였으며 두 양 사이의 비는 비정수비로 하여 비정수비를 다루는 정도를 기준으로 비례추론의 발달 단계를 구분할 수 있도록 하였다. 또한 비(非)구조화된 문제는 비례문제의 유형을 달리하여 수리적 비교 문제, 미지값 구하기 문제 각각 한 문제씩 개발하였다. 문제 상황은 선행연구를 바탕으로 문제의 실제성, 복잡성, 개방성 세 가지를 비(非)구조화된 문제의 개발 기준으로 삼았다. 문제해결의 목표가 명시되어 있으나 상황에 대한 정보를 보다 많이 제시하여 실제성을 지니도록 하였으며 다양한 관점에서 바라볼 수 있으며 기준을 무엇으로 하느냐에 따라 다양한 해결 방안을 생각할 수 있도록 구성하였다. 하지만 비례추론을 분석하기 위해 비례 상황이 직접적으로 제시되어야 하는 까닭에 문제에서 사용된 개념 및 내용이 복잡하기 보다는 제한적으로 제시된 부분에 있어서는 본 연구의 결과를 비(非)구조화된 문제의 특성으로 일반화하는데 제한점이 된다(자세한 문제 상황은 <부록 1> 예시 참조).

## 1. 자료수집

학생들이 비례상황 문제를 해결하는데서 보이는 비례추론의 발달단계를 분석하기 위해 연구 대상자에게 수리적 비교문제에서 미지값 구하기 문제 순으로 동일한 비례문제 유형 안에서는 구조화된 문제 -> 비(非)구조화된 문제 -> 구조화된 문제 순으로 문제를 해결하도록 하였다. 연구대상자에게 문제를 해결하는 동안 자신의 생각을 되도록 구체적으로 학습지에 기록하도록 하였으며 중간에 자신의 생각이 변경되었다 하더라도 지우개를 사용하지 않고, 다시 쓸 수 있도록 하였다. 연구자는 학생들이 기록한 활동지를 수집하여 학생들의 학습지에 기록된 문제해결 과정을 바탕으로 비례추론의 발달단계의 분석기준에 따라 분석하였다.

## 2. 분석방법

본 연구에서 초등학교 6학년 학생들의 비례상황 문제해결에서 나타나는 비례추론의 발달단계를 분석하기 위해 기존의 선행연구(Carpenter 외, 1999; Clark & Lesh, 2003; Karplus

외, 1983)에서 제시하고 있는 비례추론의 발달 단계를 바탕으로 크게 비례적추론 단계, 과도기적 단계, 비(非)비례적추론 단계로 구분하였으며, 비(非)비례적추론 단계를 학생들이 문제해결에서 보인 전략을 중심으로 다시 세 부분으로 세분화하여 구분하여 학생들의 문제해결 과정을 분석하였다(<표 Ⅲ-2> 참조).

<표 Ⅲ-2> 비례추론의 발달 단계 분석 기준

<table>
<tr><th colspan="2">단계</th><th>설 명</th></tr>
<tr><td rowspan="6">非비례적추론단계</td><td rowspan="2">I : (Incomplete, Illogical reasoning) 불완전, 非논리적단계</td><td>문제해결 과정에 어떠한 설명도 제공되지 않아 비례추론의 정도를 판단할 수 없으며 비논리적인 방법으로 자료를 사용하거나 부적합한 방법으로 연산을 적용한 경우이다.</td></tr>
<tr><td>ex) 무응답<br>ex) 오렌지 분말 2컵과 물 3컵을 섞어 주스를 만든 것은 5컵이 나오는데 오렌지 분말 3컵과 물 4컵을 섞어 주스를 만든 것은 7컵이 나와서 더 진하다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Q : (Qualitative reasoning) 질적추론단계</td><td>문제를 해결하는데 더 적게, 더 많이, 같은 양으로와 같이 질적인 표현을 사용하여 여러 대상의 관계를 비교하는 경우이다.</td></tr>
<tr><td>ex) 오렌지 분말 2컵과 물 3컵을 섞어 주스를 만든 것과 오렌지 분말 3컵과 물 4컵을 넣은 주스 중 분말 3컵을 넣은 주스가 더 진하다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A : (Additive reasoning) 덧셈적추론단계</td><td>덧셈적 관계에 근거하여 추론할 수 있는 단계로 곱셈적 관계를 인식하지 못하고, 합이나 차와 같은 덧셈적 관계에 초점을 두어 여러 대상의 관계를 비교하는 경우이다.</td></tr>
<tr><td>ex) 오렌지 분말 2컵과 물3컵을 섞어 주스를 만든 것은 1컵 차이가 나고, 오렌지 분말 3컵과 물4컵을 넣은 주스도 1컵 차이가 나기 때문에 두 주스는 진하기가 같다.</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">T : (Transition) 과도기적 단계</td><td>두 변수 사이의 패턴을 인지하고 곱셈 관계에 주목하기 시작하는 단계이다. 반복적으로 더하거나 정수 배를 하여 비로 나타낼 수 있으나 주어진가 비정수비라면 비례 문제를 해결하는데 어려움을 보인다.</td></tr>
<tr><td>ex) 오렌지 분말 2컵과 물3컵을 섞어 주스를 만든 것(가)과 오렌지 분말 3컵과 물4컵을 넣어 주스를 만든 것(나)를 다음과 같은 표로 나타내면 (나)주스가 (가)보다 물이 더 적기 때문에 진하다.
<table>
<tr><td rowspan="2">가</td><td>오렌지 분말</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>물</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">나</td><td>오렌지 분말</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td></tr>
<tr><td>물</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">P : (Proportional reasoning) 비례적추론단계</td><td>둘 또는 그 이상 사이의 비 관계를 비교하는 각각의 상황에 기초해 비례적으로 추론하는 단계이다. 비정수비인 비를 이해하며 두 양의 곱셈관계를 다른 두 양에도 적용하여 동치인 비를 만들 수 있다. 비를 단위 양으로 생각하고 곱셈 관계로 비를 이해하며 비율내, 비율간 관계를 알고 비와 비례문제를 유연하게 해결 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>ex) (가)주스의 경우 물에 대한 오렌지 분말의 양이 2/3이라면 (나)주스의 경우 물에 대한 오렌지 분말의 양이 3/4가 되어 (나)주스가 더 진하다.</td></tr>
</table>

# IV. 연구 결과 및 해석

비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 학생들로 하여금 비례문제의 유형 및 문제의 비(非)구조화된 정도에 차이가 있는 6개의 과제를 해결하도록 하였다. 학생들의 문제 해결 결과를 비례추론의 발달 단계 I, Q, A, T, P의 5단계로 분류하고, 학생들의 비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 먼저 과제별로 학생들의 비례추론의 발달 단계를 살펴보고, 이후에는 학생별로 비례추론의 발달 단계를 분석, 그 특징을 서술하고자 한다.

## 1. 과제별 비례추론의 발달 단계

과제별로 학생들의 비례추론의 발달단계를 분석한 결과는 <표 Ⅳ-1>과 같다. 먼저 전체적으로 학생들의 비례추론의 발달단계를 살펴보면 (P)단계가 가장 높은 비율로 나타났고, 그 다음으로는 (I)단계, (T)단계, (Q)단계, (A)단계 순으로 높은 비율을 차지했다. 이처럼 (P)단계가 가장 높은 비율로 나타난 것은 연구 대상이 이미 비와 비율을 학습했으며 연구 시기 또한 6학년 2학기 7단원 정비례와 반비례의 학습시기와 맞물려 있기 때문인 것으로 보인다.

<표 Ⅳ-1> 과제별 비례추론의 발달 단계 명(%)

| 과제 구분 \ 비례추론 단계 | | | I | Q | A | T | P | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 수리적 비교 | 구조화 | 과제1 | 6(15.4) | 3(7.7) | 0(0.0) | 3(7.7) | 27(69.2) | 39(100) |
| | | 과제2 | 3(7.7) | 5(12.8) | 1(2.6) | 4(10.3) | 26(66.7) | 39(100) |
| | 비구조화 | 과제3 | 3(7.7) | 3(7.7) | 3(7.7) | 0(0.0) | 30(76.9) | 39(100) |
| 미지값 문제 | 구조화 | 과제4 | 4(10.3) | 0(0.0) | 0(0.0) | 4(10.3) | 31(79.5) | 39(100) |
| | | 과제5 | 3(7.7) | 0(0.0) | 1(2.6) | 6(15.4) | 29(74.4) | 39(100) |
| | 비구조화 | 과제6 | 5(12.8) | 0(0.0) | 1(2.6) | 1(2.6) | 32(82.1) | 39(100) |
| 전체 | | | 24(10.3) | 11(4.7) | 6(2.6) | 18(7.7) | 175(74.8) | 39(100) |

이러한 결과를 비례문제의 유형 및 비례문제의 비(非)구조화된 정도에 따라 구분하여 살펴보면 <표 Ⅳ-2, 3>과 같다. 먼저 비례문제의 유형에 따라 학생들의 비례추론의 발달 단계를 살펴보면 수리적 비교 문제는 (P)-(I)-(Q)-(T)-(A) 단계 순으로 학생들의 발달 단계가 높게 나타났다. 미지값 구하기 문제의 경우 (Q)단계가 전혀 나타나지 않고, (P)단계 다음 순으로 (I)단계와 (T)단계가 높게 나타났다. 또한 수리적 비교 문제에 비해 미지값 구하기 문제에서 (T)단계나 (P)단계가 높은 비율로 나타났으며 비(非)비례적추론단계는 더 낮은 비율로 나타났다. 이러한 결과는 비례를 학습한 9학년 학생을 대상으로 실시한 연구(Singh, 2000)에서 성취 정도가 [미지값 구하기] > [수리적 비교]로 나타난 것과 일치하는 결과이다. 특히, 현행 우리나라의 교과서에서 비례식의 내항의 곱과 외항의 곱이 같다는 알고리즘을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 미지값 구하기 문제가 대부분의 비례문제로 제시되고 있는 것을 고려할 때 학생들에게 친숙한 미지값 구하기 문제를 학생들이 보다 쉽게 해결하는 것은 당연한 결과이기도 하다. 특히 미지값 문제에서는 질적 추론 단계가 전혀 나타나지 않은

것은 수리적 비교와 같이 많다, 적다, 크다, 작다와 같은 관계 비교만으로는 미지값 문제를 해결할 수 없기 때문에 질적인 추론 단계를 보이지 않은 것으로 보인다.

<표 Ⅳ-2> 비례문제의 유형에 따른 비례추론의 발달 단계 명(%)

| 과제 구분 | I | Q | A | T | P | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 수리적 비교 | 12(10.3) | 11(9.4) | 4(3.4) | 7(6.0) | 83(70.9) | 117(100) |
| 미지값 구하기 | 12(10.3) | 0(0.0) | 2(1.7) | 11(9.4) | 92(78.6) | 117(100) |

두 번째로 문제의 비(非)구조화된 정도에 따라 학생들의 비례추론의 발달 단계를 살펴보면, 구조화된 문제와 비(非)구조화된 문제 사이에서 (I)단계는 동일하게 나타났으며 (Q)단계와 (A)단계의 차이가 크지 않은 반면 (P)단계는 비(非)구조화된 문제에서 다소 높은 비율로 나타났고, (T)단계는 비(非)구조화된 문제에서는 더 낮은 비율로 나타났다(<표 Ⅳ-3> 참조).

<표 Ⅳ-3> 비례문제의 비(非)구조화된 정도에 따른 비례추론의 발달 단계 명(%)

| 과제 구분 | I | Q | A | T | P | 계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 구조화된 문제 | 16(10.3) | 8(5.1) | 2(1.3) | 17(10.9) | 113(72.4) | 156(100) |
| 비(非)구조화된 문제 | 8(10.3) | 3(3.8) | 4(5.1) | 1(1.3) | 62(79.5) | 78(100) |

## 2. 학생별 비례추론의 발달 단계

과제별 비례추론의 발달 단계 분석에 이어 학생별 비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 학생들이 각각의 과제의 문제해결에서 나타낸 비례추론의 발달 단계를 I, Q, A, T, P 5단계로 구분하여 정리하였다(<표 Ⅳ-4> 참조).

<표 Ⅳ-4> 학생별 비례추론의 발달 단계

| 학생구분 | 수리적 비교 문제 | | | 미지값 문제 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 구조화 | 구조화 | 비구조화 | 구조화 | 구조화 | 비구조화 |
| | 과제1 | 과제2 | 과제3 | 과제4 | 과제5 | 과제6 |
| A | I | Q | Q | P | P | P |
| B | P | P | P | T | T | P |
| C | I | A | P | P | T | P |
| D | P | P | P | T | T | P |
| E | P | P | Q | P | P | I |
| F | I | P | A | P | P | I |
| G | P | P | P | P | P | P |
| H | I | I | P | I | I | I |
| I | P | P | P | P | P | P |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

이를 비례문제의 유형에 따라 문제의 비(非)구조화된 정도에 따라 구분하여 살펴본 후 학

생별 사례를 중심으로 비례추론의 발달 단계에서 나타나는 특징을 분석하였다. 학생별 비례추론의 발달 단계를 살펴보면 한 학생에게서 같은 유형의 비례추론의 발달단계가 나타나기도 하지만 같은 학생일지라도 과제별로 상이한 비례추론의 발달 단계를 보이는 경우가 있다. 이처럼 학생들이 보인 비례추론의 발달 단계를 모든 과제에서 동일한 발달 단계를 보이는 학생과 각 과제에 따라 다른 발달 단계를 보이는 학생으로 구분하여 살펴본 결과 <표 Ⅳ-5>와 같은 결과를 얻었다.

<표 Ⅳ-5> 학생별 비례추론의 발달 단계 명(%)

| 단계 | 불완전 · 비논리적추론(I) | 다양한 추론(I~P) | 비례적 추론(P) | 계 |
|---|---|---|---|---|
| 학생 비율 | 1(2.6) | 18(46.1) | 20(51.3) | 39(100) |

모든 과제에서 동일한 발달 단계를 보이는 경우는 (I)단계와 (P)단계 두 경우로만 나타났으며 총 53.9%로 각각의 과제에서 다른 발달 단계를 보이는 학생 수와 비슷한 비율(46.1%)로 나타났다. 특히 동일한 발달 단계를 보이는 학생 중에서 모든 과제에서 (I)단계를 보인 학생의 비율은 매우 낮은 반면 모든 과제에서 (P)단계를 보인 학생의 비율은 매우 높게 나타났다. 그리고 각각의 문제에서 서로 다른 발달 단계를 보인 학생의 경우(다양한 추론 I~P) 비례적 추론을 보이지 않으며 곱셈적 사고를 하지 못하는 학생이나 비례적 추론으로 문제를 해결하나 간혹 과도기적 추론을 보이는 학생, 문제에 따라 불완전 · 비논리적 추론부터 비례적 추론까지 다양한 범위의 발달 단계를 보이는 학생 등 다양한 유형의 학생들로 나타났다. 이는 비와 비율의 개념과 형식적인 비례식의 활용에 대해 학습한 초등학교 6학년 학생들의 비례적 추론의 발달 단계가 대부분 (P)단계에 해당함을 의미한다. 하지만 이는 고정된 불변의 것이 아니며 과제의 특성에 영향을 받아 동일한 학생이라도 서로 다른 비례추론의 발달 단계를 보이기도 하며 반드시 비례추론의 발달 단계가 단계적으로 나타나는 것은 아님을 보여주는 결과이다. 이처럼 학생들의 비례추론의 발달 단계에 대한 순차적인 발달에 대해서는 학자들 간에 서로 다른 의견이 존재한다. Piaget는 학생마다 정도의 차이는 있지만 시간이 걸리더라도 주어진 발달 단계에 따라 순차적으로 발달한다고 본 반면 학생을 가르치는 교사조차 승법적 상황을 잘 이해하지 못하여 비례추론이 부족함을 보여주는 Simon과 Blume(1994)의 연구 결과를 보면 비례추론의 발달 단계가 순차적으로 발전한다는 가정에 의문을 갖게 된다(박정숙, 2009, 재인용). 동일한 학생이 과제에 따라 서로 다른 비례추론의 발달 단계를 보인 본 연구의 결과는 후자의 의견을 더 지지한다고 볼 수 있다.

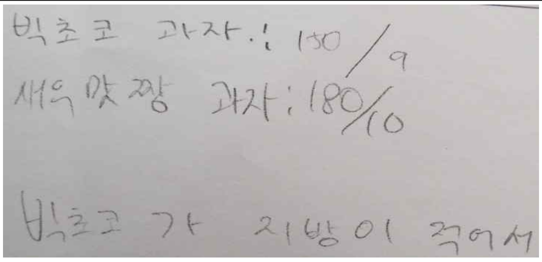
## 3. 비례문제 유형에 따른 학생별 비례추론의 발달 단계의 차이

비례문제의 유형에 따라 학생별 비례추론의 발달 단계에 차이가 있는지 살펴보기 위해 문제의 유형별로 학생들의 발달 단계를 분석하여 문제의 유형이 변하더라도 동일한 발달 단계를 보이는 학생(21명, 53.9%)이나 어느 특정한 발달 단계를 보이지 않고, 다양한 추론을 보이는 학생(11명, 28.2%)을 제외하고 특정한 문제 유형에 있어서만 비례적 추론을 보이는 학생(7명, 18%)을 분석하여 <표 Ⅳ-6>과 같은 결과를 얻었다. 수리적 비교 문제에서는 다양

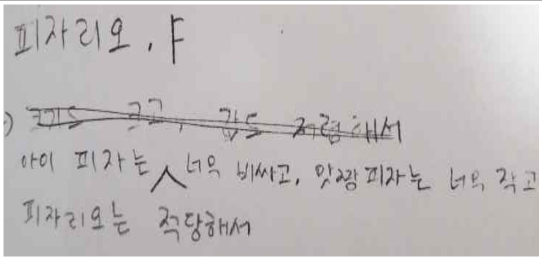
한 추론(I~P)이나 과도기적 추론(T~P)을 보였으나 미지값 문제에서는 비례적 추론을 보인 학생의 비율이 그 반대의 경우보다 높게 나타났다.

<표 Ⅳ-6> 비례문제의 유형에 따른 비례적 추론의 발달 단계의 변화 명(%)

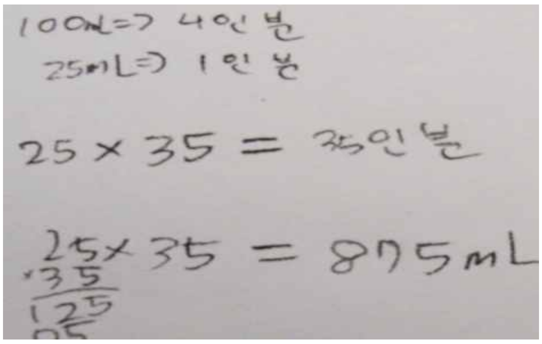
| 비례 추론의 발달 단계의 변화 | Level up (I~P ⇒ P) | |
|---|---|---|
| | 수리적 비교 ⇒ 미지값 문제 | 미지값 문제 ⇒ 수리적 비교 |
| 학생 비율 | 6(15.4) | 1(2.6) |



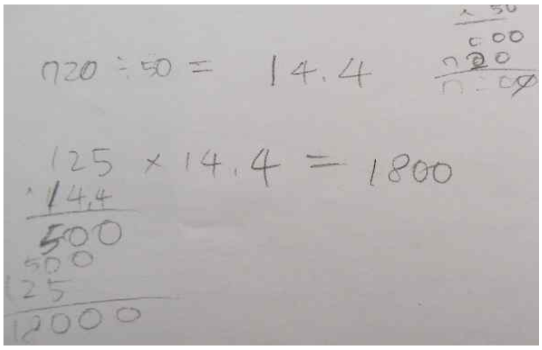
ⓐ 수리적 비교문제[과제2]



ⓑ 수리적 비교문제[과제3]



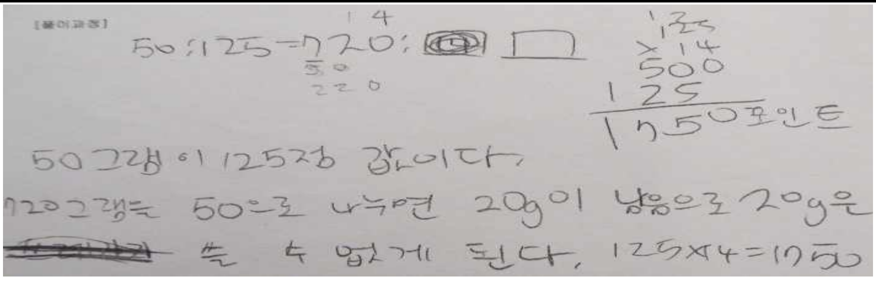
ⓒ 미지값 구하기문제[과제4]



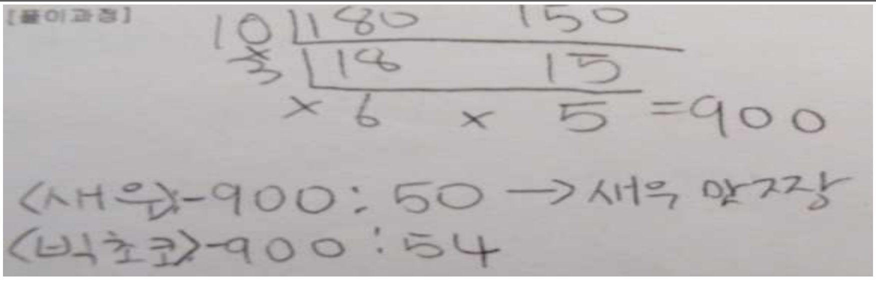
ⓓ 미지값 구하기문제[과제5]

[그림 Ⅳ-1] 학생 A의 비례추론

먼저 수리적 비교 문제와 달리 미지값 문제에서만 비례적 추론 단계를 보인 학생 A의 문제해결 과정을 살펴보면 수리적 비교문제인 과제2와 과제3에서는 두 변수 사이의 관계를 비교하는데 있어서 어느 한 쪽 값의 크고 작음만을 가지고 비교한 결과를 보였다([그림 Ⅳ-1-ⓐ, ⓑ]참조). 이는 비례추론 발달 단계의 질적 추론(Q)에 해당하며 비례추론에 있어서는 오류를 범하는 경우이다. 하지만 학생 A가 미지값 문제를 해결하는데 있어서는 주어진 양의 한 단위의 값을 찾아 문제를 해결하면서 과제 4를 해결하였다([그림 Ⅳ-1-ⓒ]참조). 과제 5의 경우에도 a에 대해 a'이 몇 배에 해당하는지에 주목하며 비례적 추론(P)을 하였다([그림 Ⅳ-1-ⓓ]참조).




ⓐ 미지값 구하기문제[과제5]




ⓑ 수리적 비교문제[과제2]

[그림 Ⅳ-2] 학생 B의 비례추론

학생 A와는 달리 미지값 구하기 문제에서는 비례적 추론(P)을 보이지 못하지만 수리적 비교문제에서는 비례적 추론(P)을 보인 학생 B의 경우를 살펴보면 [그림 Ⅳ-2]와 같다. 학생 B는 미지값 문제(과제5)를 해결하기 위해 비례식을 세웠으나 비례식의 성질을 이용하여 내항과 외항의 곱이 동치임을 이용하여 문제를 해결하지는 못한다. 그리고 a와 a'의 관계를 자연수의 범위 안에서만 몇 배에 해당하는지 찾아내며 나머지에 해당하는 부분을 고려하지 못함으로써 오류를 범하게 된다([그림 Ⅳ-2-ⓐ] 참조]). 이는 주어진 비가 비정수비인 까닭에 정수배에 해당하는 문제만 해결할 수 있는 과도기적 단계(T)에 해당한다. 하지만 수리적 비교문제인 [과제 2]에서는 a와 a'의 관계가 비정수비임에도 불구하고 두 비 사이의 기준량을 최소공배수로 같게 하여 문제를 해결하는 모습을 보인다([그림 Ⅳ-2-ⓑ] 참조]). 이는 학생 B가 비례적 추론의 가장 기본이 되는 곱셈적 사고를 보이나 비정수비의 문제에 있어서는 아직 불완전한 추론을 하는 것으로 여겨진다. 이상의 결과를 통해 볼 때 동일한 학생일지라도 비례추론의 발달 단계가 비례 문제의 유형에 따라 다른 양상으로 나타날 수 있으며 이러한 차이가 나타나는 원인을 규명하는 것은 학생들의 비례 추론의 발달을 도모하기 위해서는 반드시 필요할 것으로 보인다.

## 4. 문제의 비(非)구조화된 정도에 따른 학생별 발달 단계의 차이

문제의 비(非)구조화된 정도에 따른 학생별 발달 단계 차이를 살펴본 결과(<표 Ⅳ-7> 참

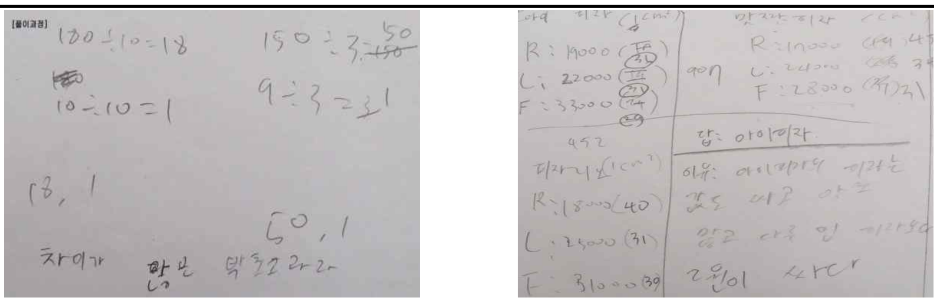
조), 구조화된 문제에서는 비례적 추론을 잘 하였으나 비(非)구조화된 문제에서 어려움을 보인 학생이나 구조화된 문제에서는 어려움을 보였으나 오히려 비(非)구조화된 문제에서 비례적 추론을 보인 학생의 비율이 거의 비슷하게 나타났다. 이는 비(非)구조화된 문제가 비례추론에 도움을 주기도 하지만 비례적 추론을 방해하며 어려움을 줄 수도 있음을 의미한다.

<표 Ⅳ-7> 비례문제의 비(非)구조화된 정도에 따른 비례적 추론의 발달 단계의 변화

명(%)

| 단계의 변화 | Level up (I~P ⇒ P) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 구조화된 문제 ⇒ 비(非)구조화된 문제 | | 비(非)구조화된 문제 ⇒구조화된 문제 | |
| | I~A→P | T→P | I~A→P | T→P |
| 학생 | 2(5.1) | 3(7.7) | 8(10.3) | 0 |
| 비율 | 5(12.8) | | 8(10.3) | |

각각의 경우에 대한 학생 사례를 살펴보면 먼저 학생 C는 구조화된 문제에서는 비례적 추론을 보이지 않았으나 오히려 비(非)구조화된 문제의 해결에 있어서는 비례적 추론을 보인 경우이다. 수리적 비교 문제인 [과제 1]의 경우 비논리적인 추론을 보였으며 [과제 2]의 경우 한 대상의 두 변수를 간단한 정수의 비로 고치며 두 변수인 a와 b사이에 어떠한 수를 곱하거나 나누어도 변하지 않음을 이해하며 비례적 추론을 하는 듯 보였으나 두 변수의 관계를 비교하는데 있어서 a와 b의 차에 집중함으로써 가법적 사고를 보이며 비례적 추론을 하는데 오류를 범하였다([그림 Ⅳ-3-ⓐ] 참조). 그러나 비(非)구조화된 문제를 해결하는데 있어서는 가격과 넓이의 관계를 곱셈적으로 사고하며 넓이 당 가격을 구하여 문제를 해결하는 모습을 보였다([그림 Ⅳ-3-ⓑ] 참조). 동일한 유형의 사례로 구조화된 문제에서는 전혀 문제를 해결하지 못하며 무응답을 보인 학생이 비(非)구조화된 문제에서는 계산기를 이용하며 넓이 당 가격을 비교하며 문제를 성공적으로 해결한 경우도 있었다.

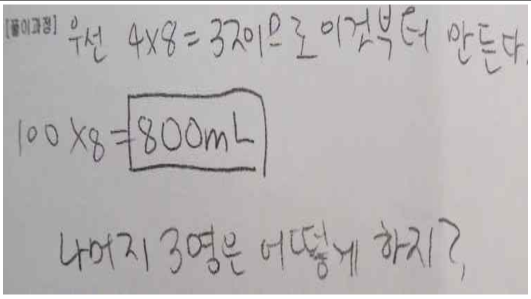



ⓐ 구조화된 문제[과제2]　　ⓑ 비(非)구조화된 문제[과제3]

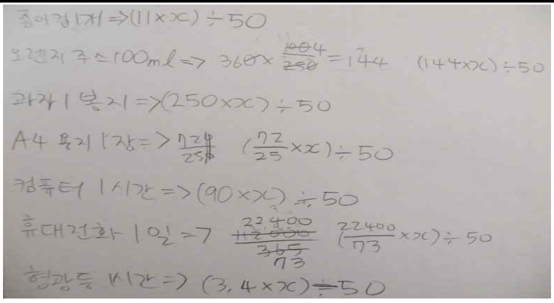
[그림 Ⅳ-3] 학생 C의 비례추론

학생 D도 미지값 문제인 [과제 4, 5, 6]중에서 구조화된 문제인 [과제 4, 5]에서는 비정수비로 이루어진 두 변수의 관계 인식에 어려움을 보이며 문제를 해결하는데 오류를 나타내었

다([그림 Ⅳ-4-ⓐ] 참조). 그러나 비(非)구조화된 [과제 6]을 해결하는데 있어서는 I:K와 같이 정수비로 이루어진 관계뿐 아니라 비정수비로 이루어진 경우에도 250ml를 100ml로 변환하여 100ml당 오렌지 주스의 탄소발자국을 계산하기 위해 비정수비를 분수로 표현하여 관계비를 정확하게 구하며 비례적 추론을 하였다. 그리고 이러한 비정수비를 이용하여 ax=b와 같은 형태의 일차함수 형태의 관계식을 도출하며 문제를 해결하였다([그림 Ⅳ-4-ⓑ] 참조). 이러한 학생들의 사례는 현실 세계에서 경험할 수 있는 문제 상황처럼 다양한 구성요인을 포함하고 있는 비(非)구조화된 문제의 특성이 학생들에게 문제를 해결하는데 도움이 된 것으로 보인다.



ⓐ 구조화된 문제[과제4]

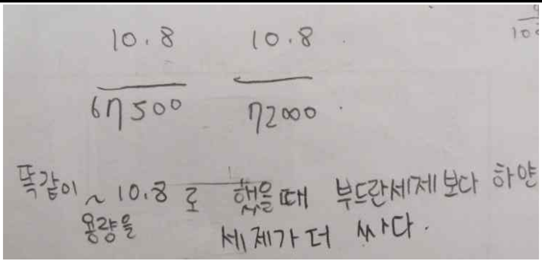


ⓑ 비(非)구조화된 문제[과제6]

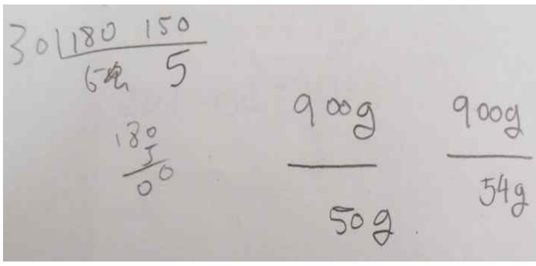
[그림 Ⅳ-4] 학생 D의 비례추론

학생 E와 F는 구조화된 문제에서는 비례적 추론으로 문제를 성공적으로 해결한 반면 비(非)구조화된 문제에서는 더 낮은 단계의 비례추론을 나타낸 경우이다. 학생 E는 수리적 비교문제인 [과제 1, 2, 3]중에서 구조화된 문제인 [과제 1, 2]에서는 비교하고자 하는 대상의 동일 변수 a와 a′의 관계비를 고려하여 두 비 사이의 기준량을 최소공배수를 이용하여 동일하게 해줌으로써 b와 b′의 값을 비교하며 문제를 해결하는 비례적 추론(P)을 보였다([그림 Ⅳ-5-ⓐ, ⓑ]참조). 그러나 [과제 3]의 경우 여러 가지 정보 중에서 피자리오 피자를 두 판 사면 한 판은 50%할인이라는 정보만을 이용하여 피자리오 피자를 선택하는 질적 추론(Q)을 보였다([그림 Ⅳ-5-ⓒ]참조).

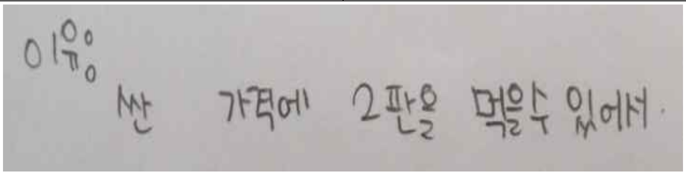
학생 F의 경우에도 미지값 문제인 [과제 4, 5, 6] 중에서 구조화된 문제인 [과제 4, 5]에서는 단위당 값을 구하거나 비교하고자 한 변수의 값이 다른 양의 몇 배인지를 찾아내어 해결하는 비례적 추론을 보였다([그림 Ⅳ-6-ⓐ, ⓑ] 참조). 그러나 비(非)구조화된 문제인 [과제 6]을 해결하는데 있어서는 문제에서 주어진 정보 중 사용량과 탄소배출량을 정확하게 구분하지 못한 까닭에 사용량과 탄소배출량 사이의 관계를 고려하지 못하고, 주어진 정보의 일부인 사용량만을 이용하여 심어야 할 소나무그루의 개수를 구하였다. 그런 까닭에 학생 F는 비례적 추론을 보이지 못하며 비논리적 방법(I)으로 문제를 해결하는 오류를 범하였다([그림 Ⅳ-6-ⓒ] 참조).




ⓐ 구조화된 문제[과제1]

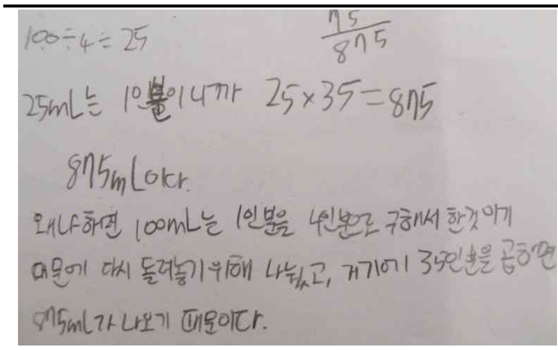



ⓑ 구조화된 문제[과제2]

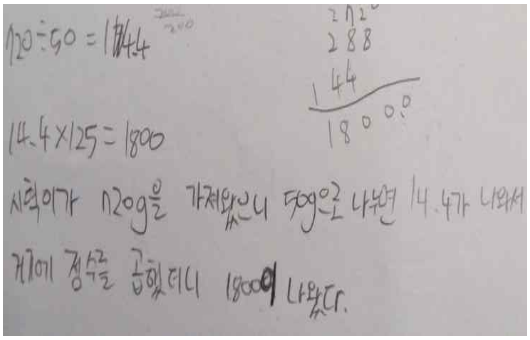



ⓒ 비(非)구조화된 문제[과제3]

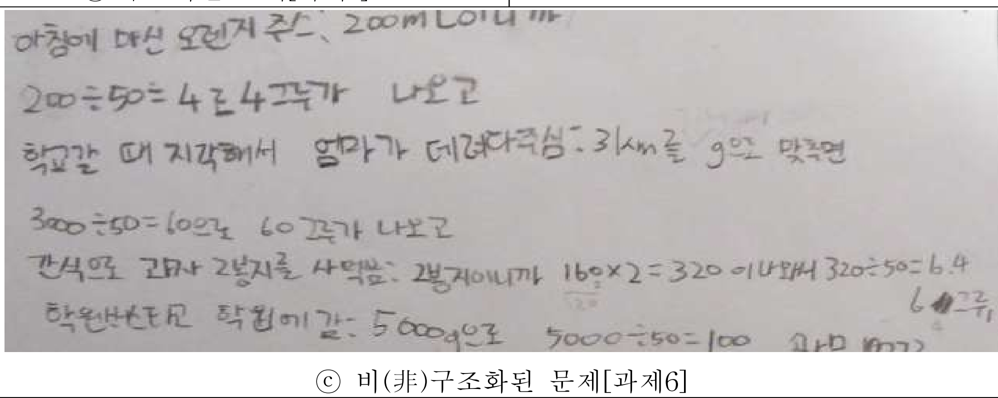
[그림 Ⅳ-5] 학생 E의 비례추론




ⓐ 구조화된 문제[과제4]




ⓑ 구조화된 문제[과제5]




ⓒ 비(非)구조화된 문제[과제6]

[그림 Ⅳ-6] 학생 F의 비례추론

Bransford 외(2000)가 지적한 것과 같이 개방적이고 모호하며 구성요소와 연산자가 명시적이지 않은 비구조화된 문제를 해결하기 위해서는 학생 스스로 문제의 핵심적인 정보를 추출하여 수학적인 문제로 재조직하는 과정을 거쳐야만 한다. 이러한 과정에서의 실패는 비구조화된 문제해결의 실패로 연결된다. 이와 마찬가지로 학생 E와 학생 F도 문제에 필요한 다양한 정보 중에서 문제 해결에 핵심이 되는 요인을 고려하지 못하고, 단편적으로 주어진 정보를 여과 없이 문제 해결에 적용함으로써 문제해결에서 오류를 나타낸 것으로 보인다.

## V. 마치며

학생들의 비례추론의 발달 단계를 분석하기 위해 서로 다른 비례문제를 적용하여 비례추론의 발달단계에 비례문제의 유형과 문제의 비(非)구조화된 정도가 어떠한 영향을 주는지 살펴보았다. 학생들의 문제해결 과정에서 나타난 비례추론의 발달단계를 분석한 결과로부터 도출된 결론은 다음과 같다.

첫째, 학생들의 비례추론의 발달단계를 분석한 결과 51.3%의 학생이 모든 문제에서 비례적 추론 단계(P)를 보였으며 모든 문제에서 불완전 · 비논리적 추론(I)을 보인 2.6%의 학생을 제외하고, 모두 문제에 따라 서로 다른 다양한 비례추론의 발달단계를 보였다. 이는 비례추론에 능숙한 학생들이 비례문제의 영향을 받지 않고, 비례적 추론을 할 수 있는 반면 비례 추론에 능숙하지 못한 학생들은 비례추론을 하는데 비례문제의 특성에 영향을 받은 것으로 보인다. 이는 비례추론을 잘하는 학생들은 문제의 맥락이나 숫자에 영향을 받지 않고 융통성 있게 문제를 해결할 수 있다는 Lesh 외(1988)의 주장과 일치한다. 하지만 비례추론에 능숙하지 못한 학생들의 비례추론의 발달을 위해서는 교과서에 다양한 비례문제 유형을 제시하여 어떠한 유형에서도 비례적 추론을 적용하여 문제를 해결할 수 있도록 해야 할 것이다. 정은실(2003)의 주장과 같이 비와 비율에 대한 이해가 결여된 상태에서 비례식의 사용이 오히려 비례적 추론 능력을 발달시키는데 장애가 될 수 있는 것처럼 학교 수학을 통해 단일한 유형의 비례문제에 대해 절차적 지식의 습득만으로는 결코 비례적 추론의 발달을 가져올 수 없다. 그렇기 때문에 학생들로 하여금 다양한 비례문제에서 비와 비율에 대한 정확한 개념을 갖도록 하는 것은 비례추론의 발달을 위해 꼭 필요할 것으로 보인다.

둘째, 학생들의 비례문제 유형에 따른 비례추론의 발달단계를 분석한 결과 수리적 비교문제보다 미지값 구하기 문제에서 과도기 · 비례적 추론의 발달단계가 더 높은 비율을 보였다. 또한 수리적 비교문제에서 비례추론에 어려움을 보인 학생이 미지값 구하기 문제에서는 비례적 추론을 보이며 문제를 해결하는 경우가 더 많이 나타났다. 이는 Malaysia 학생들을 대상으로 한 Singh(2000)의 연구와 우리나라 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 한 홍수영(2006)의 연구에서 모두 미지값 구하기 문제에서 학생들이 문제해결을 잘 수행했다는 연구결과와 일치한다. 수리적 비교 문제가 비례식을 해결하는 알고리즘을 적용하여 해결할 수

있는 문제가 아니기 때문에 학생들은 미지값 구하기 문제보다 수리적 비교 문제를 어려워하는 것으로 보인다. 또한 Singh(2000)가 지적한 것과 마찬가지로 우리나라도 교과서에 제시된 비례문제의 유형이 비례식의 내항의 곱과 외항의 곱이 같다는 알고리즘을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 미지값 구하기 문제에 치우쳐 있는 것이 학생들의 문제해결에 영향을 주었을 것으로 보인다. 비례추론이 다양한 문제 유형을 해결할 수 있는 능력뿐 아니라 비례적이지 않은 상황과 비례적인 상황을 식별하는 능력까지 포함한다고 볼 때 우리나라 교과서에도 다양한 비례문제 유형을 제시하며 비례적인 상황에 대한 정확한 이해를 통해 비례문제를 해결할 수 있도록 해야 할 것으로 보인다.

셋째, 학생들이 비(非)구조화된 문제와 구조화된 문제에서 나타낸 비례추론의 발달단계를 분석한 결과 구조화된 문제에서는 비례적 추론을 보였던 학생이 비(非)구조화된 문제에서는 불완전・비논리적 추론을 보이며 문제해결 자체를 어렵게 여기는 경우와 반대로 구조화된 문제에서는 비(非)비례적추론을 보이거나 과도기적 추론을 보인 학생들이 비(非)구조화된 문제에서는 비례적 추론을 보인 경우 모두 비슷한 비율로 나타났다. 전자의 경우는 김민경, 허지연, 조미경, 박윤미(2012)의 연구에서 비(非)구조화된 문제 해결 과정에서 나타나는 추론 유형을 분석한 결과 문제 상황을 잘 이해하지 못하여 창의적 추론 보다는 알고리즘의 추론 유형을 보인 것과 같은 맥락이라고 볼 수 있다. 즉, 비(非)구조화된 문제에 대한 학생들의 이해 및 정보의 조직화 능력은 문제해결 뿐만 아니라 추론능력에도 영향을 준다고 볼 수 있다. 후자의 경우는 성창근과 이광호(2012)의 연구에 나타난 것과 같이 학습자가 실생활 속에서 경험할 수 있는 복잡한 문제를 접하면서 도전의식을 갖고, 문제해결에 필요한 정보와 전략을 찾아갈 수 있었던 것으로 보인다. 더불어 비(非)구조화된 문제에 제시된 다양한 관점과 제약들이 단일한 상황 속에서 추론하는 것보다 서로 다른 수준의 정보를 이용하며 학생들의 추론을 더 용이하게 하는 계기가 되었던 것으로 보인다. 이러한 결과는 학생들의 비례추론의 발달을 위해 비구조화된 문제의 적극적인 활용이 필요한 만큼 비구조화된 문제를 학생들이 정확하게 이해하고, 그 안에서 핵심적인 정보를 추출하여 해결할 수 있도록 도움을 주기 위해서는 적절한 교사의 발문이나 협력적인 의사소통 활동과 같은 비구조화 문제를 적용한 교수 학습 측면에 있어서의 보다 활발한 연구가 필요할 것으로 보인다.

## 참고 문헌

김경희, 백희수(2010). 비와 비율 영역에 대한 우리나라와 싱가포르 교육과정 및 교과서 비교 -TIMSS 평가목표와 공개문항을 중심으로, 학교수학, 제12권 4호, 473-491.

김민경, 이지영, 홍지연, 김은경(2011). 초등학교 수학 교과서에서 나타난 “문제”의 비구조성(ill-structured)에 관한 연구, 학습자중심교과교육연구, 제11권 2호, 1-21.

김민경, 이지영, 홍지연, 주현정(2012). 자료분석에 관한 비구조화된 문제해결모형 적용에서 나타

난 초등학교 5학년 학생들의 의사결정에 관한 연구, 수학교육논문집, 제26권 2호, 221-249.

김민경, 허지연, 조미경, 박윤미(2012). 초등학교 4학년 학생들의 비구조화된 문제에서 나타난 해결 과정 및 추론 분석, 수학교육, 제51권 2호, 95-114.

김용익(2009). 비례상황에 기초한 비의 지도 방법 연구. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

박정숙(2009). 학생의 비례추론의 분석 모형과 특성 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

성창근, 이광호(2012). 비례 문제 해결에 영향을 주는 인지적 변인 분석, 수학교육학연구, 제22권 3호, 331-352.

임해미, 김수진, 김경희(2012). 국가수준 학업성취도 평가와 국제 학업성취도 평가의 연계를 통한 우리나라 학생들의 수학 성취 특성 분석, 수학교육학연구, 제22권 1호, 1-22.

정영옥(2006). 초등학교에서 비와 비례식 지도에 대한 고찰 -한국, 미국, 일본, 중국을 중심으로-, 과학교육논총, 제18권, 13-28.

정은실(2003). 비 개념에 대한 교육적 분석, 수학교육학연구, 제13권 3호, 247-265.

홍수영(2006). 초등학교 5학년 학생의 비례 추론 이해. 한국교육대학교 대학원 석사학위논문.

Bransford, J. D., Zech, L., Schwatrz, D., Barron, B., Vye, N., & The Cognition and Technology Group at Vanderbilt University(1996). Fostering mathematical thinking in middle school students: Lessons from research. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), The Nature of Mathematical Thinking (pp.203-250), Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Bulu, S. T., & Pedersen, S.(2010). Scaffolding middle school students' content knowledge and ill-structured problem solving in a problem-based hypermedia learning environment. *Education Tech Research, 58,* 507-527.

Carpenter, T., Gomez, C., Rousseau, C., Steinthorsdottir, O., Valentine, C. & Wagner, L.(1999). An analysis of student construction of ratio and proportion understanding. Paper presented at the American educational Research Association, Montreal, Canada.

Chi, M. T. H., & Glaser, R.(1985). Problem solving ability. In R. J. Sternberg (Ed.), Human abilities: An information processing approach. NY: W. G. Freeman.

Ge, X., & Land, S. M.(2003). Scaffolding students' problem-solving processes in an ill-structured task using question prompts and peer interactions. *Educational Technology Research and Development, 51*(1), 21-38.

Jonassen, D. H.(1997). Instructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes. *Educational Technology Research and Development*, *45*(1), 65-94.

Kaput, J., & West, M.(1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp.235-287).

Albany, NY:Suny Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K.(1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Orlando : Academic Press, Inc

Koellner-Clark, K., & Lesh, R.(2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science & Mathematics, 103*(2), 92-99.

Lamon, S. J.(1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational number: An integration of research* (pp.131-156). Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.629-667). Charlotte, NC : Information Age Publishing.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M.(1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hilbert (Eds.), *Number concepts & operations for the middle grades* (pp.93-118). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Lo, J. J., & Watanabe, T.(1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.

Ng, C. S. L., Cheung, W. S., & Hew, K. F.(2010). Solving ill-structured problem in asynchronous online discussions: Built-in scaffolds vs no scaffolds. *Interactive Learning Environments*, *18*(2), 115-134.

Singh, P.(2000). Understanding the concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 31*(4), 579-599.

Valverde, G., & Castro, E.(2012). Prospective elementary school teachers' proportional reasoning. *PNA, 7(1),* 1-19.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L.(2009). Students. overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 187-211.

# Children's Proportional Reasoning on Problem Type of Proportion according to Ill-Structured Degree[4)]

Kim, Min Kyeong[5)] ☐Park, Eun Jeung[6)]

## Abstract

Proportional reasoning is considered as a difficult concept to most elementary school students and might be connect to functional thinking, algebraic thinking, and mathematical thinking later. The purpose of this study is to analyze the sixth graders' development level of proportional reasoning so that children's problem solving processes on different proportional problem items were investigated in a way how the problem type of proportion and the degree of ill-structured affect to their levels. Results showed that the greater part of participants solved problems on the level of proportional reasoning and various development levels according to type of problem. In addition, they showed highly the level of transition and proportional reasoning on missing value problems rather than numerical comparison problems.

Key Words : Degree of Ill-structured, Problem Type of Proportion, Proportional Reasoning

Received September 17, 2013
Revised December 24, 2013
Accepted December 26, 2013

---

4) This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government (NRF-2010-327-B00570).
5) Ewha Womans University (mkkim@ewha.ac.kr) Corresponding author
6) Ewha Womans University (gloria4004@naver.com)

## <부록 1>

### [과제1] 수리적비교 문제/ 구조화된 문제

민수는 어머니 심부름으로 마트에서 세탁세제를 사려고 합니다. 민수는 여러 가지 세탁세제 중에서 친환경세제 두 가지를 골랐습니다. 민수는 성능이 비슷한 두 개의 세탁세제 중에서 더 저렴한 세제를 사기로 결정했습니다. 어떤 세탁세제가 더 저렴한지 선택하고, 그 이유를 설명하시오.

**세제의 용량과 가격**

| 세제 종류 |  하얀세제 |  부드란세제 |
|---|---|---|
| 용량 | 1.2kg | 1.8kg |
| 가격 | 7500원 | 12000원 |

### [과제3] 수리적비교 문제/ 비(非)구조화된 문제

**현명한 피자 선택**
**※ 모든 가게의 포테이토 피자는 두께와 토핑이 모두 같다고 가정한다. 또한 소수점 이하 반올림한다.**
"다음 주에 있을 우리 반 파티 때 선생님이 피자를 쏜다!"
우리반 친구들이 힘을 모아 수학짱 UCC 공모전에 작품을 출품했는데 대상을 받았답니다. 선생님께서는 무엇보다도 단합된 우리반 친구들이 자랑스럽다며 피자 파티를 하시겠다고 하셨습니다. 우리는 환호성을 지르며 파티에 대한 회의를 했고, 결국 포테이토 피자를 골랐습니다.
"자, 이제 그럼 피자를 시켜볼까? 어느 가게에서 시키면 좋을까?"
그러자 우리반 급식을 늘 1등으로 먹는 현우가 대답했어요.
"저는 '아이피자'가 좋을 것 같아요. 거긴 값에 비해 양이 많거든요. 헤헤."
"어?! '맛짱피자'가 더 싸지 않나? 양도 많고. 지난번 생일 파티 때 거기서 시켰더니 애들이 배부르다고 남겼단 말이야."
민석이가 고개를 갸우뚱하며 말했습니다. 순식간에 교실은 자신이 생각하는 피자 가게가 더 낫다며 웅성대는 아이들의 소리로 시끌벅적해졌습니다.
"피자리오가 새로 오픈해서 레귤러 사이즈 1판을 사면 추가1판은 50%래. 그러니 피자리오가 어때?"
"레귤러 사이즈 여러 개를 시키는 것 보다 패밀리 사이즈 한, 두 판 시키는 게 더 좋나?"

어떤 피자 가게에서, 어떤 사이즈로 구입하면 가장 싸고 양이 많을까요? 무엇을 고려해야할까요? 그리고 그 이유는 무엇인지 우리반 친구들이 납득할만한 근거를 들어 설명해 보세요.


## [과제4] 미지값구하기 문제/ 구조화된 문제

시윤이는 핫케이크를 만들려고 합니다. 시윤이는 핫케이크를 만들 재료를 준비하기 위해 요리책을 찾아보았습니다. 요리책에는 4인분용 기준으로 재료의 양이 나와 있었습니다. 시윤이가 친구들이 모두 먹을 수 있게 35인분으로 핫케이크를 만들기 위해 준비해야 할 우유의 양은 얼마일까요? 그렇게 생각하는 이유는 무엇인가요?

| 4인분용 핫케이크 레시피 |
|---|
| 밀가루 200g |
| 우유 100ml |
| 달걀 2개 |

## [과제6] 미지값구하기 문제/ 비(非)구조화된 문제

### 탄소발자국을 줄어요.

< 어린이 과학 잡지 환경을 살려요>
탄소발자국이란 2006년 영국의회 과학기술처에서 처음 사용한 용어입니다. 이는 소비되는 제품들에 이산화탄소가 얼마나 발생하는지를 표시하도록 하여 생활 속에서 우리가 남기는 탄소량을 알 수 있도록 한 것입니다. 표시 단위는 무게단위인 kg으로 나타냅니다.

평소 환경문제와 기후변화에 관심이 많았던 아림이와 친구들은 과학 잡지에 소개된 탄소발자국 설명을 보았습니다. 그래서 이번 전시회 때 '탄소발자국'에 대한 체험부스를 만들려고 합니다.
" 학생들이 자기 생활 속에서 얼마나 탄소발자국을 남기는지 계산하게 해보면 어떨까?"

“ 그거 좋은 생각인데! 그리고 나서 내가 남긴 발자국을 없애려면 소나무가 몇그루 필요할지도 계산해보면 좋을 것 같다.”

“ 그런데 일일이 계산하게 하면 우리 체험부스는 인기가 없어질거야. 수학 시험같잖아.”

“ 그러면 우리가 미리 엑셀 프로그램으로 ‘탄소발자국 계산기’를 만들어 두면 어때? 우리가 많이 소비하는 생활용품이나 생활 습관 등을 정리해서 그림카드로 제시해주고, 선택된 것들에 대해 자동으로 계산되는 것 말이야.”

“ 그렇다면 탄소발자국 계산기를 위해 우리가 미리 식을 만들어야겠네. 종이컵 계산기, 형광등 사용 계산기.......”

체험부스에서 친구들이 직접 자신의 탄소발자국을 계산할 수 있도록 탄소발자국 계산기를 제시하자는 의견이 모아졌습니다. 탄소발자국 계산기는 학생들의 소비 패턴이나 소비한 용품의 종류와 개수, 시간 등만 입력하면 탄소발자국이 몇 g인지 자동으로 계산되도록 하려 합니다. 친구들에게 보여줄 그림카드 종류를 몇 가지 정리한 표입니다.

| 영역 | 종류 | 이산화탄소 배출량(g) |
|---|---|---|
| 생활용품 | 종이컵 1개 | 11 |
| | 오렌지주스 250ml | 360 |
| | 과자 1봉지(160g) | 250 |
| | A4 용지 250매 | 720 |
| 생활패턴 | 컴퓨터 100시간사용 | 9000 |
| | 휴대전화 1년 사용 | 112000 |
| | 형광등 1000시간사용 | 3400 |
| | 샤워 10분(140L) | 82 |
| 교통수단 | 버스로 1km 이동시 | 27.7 |
| | 지하철로 1km 이동시 | 1.53 |
| | 자가용으로 1km 이동시 | 210 |
| 이산화탄소 50g을 없애기 위해서는 소나무 1그루를 심어야 합니다. | | |

위와 같이 여러 가지 상황에 대한 탄소배출량을 조사하여 체험부스를 운영하기 위한 계획을 세워 보시오.