ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 62, No. 8, pp. 1144~1150, 2013
http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2013.62.8.1144

시간지연을 갖는 특이 섭동 시스템에서 H∞놈과 램버트 W 함수를 이용한 안정화 제어기 설계

Stabilizing Controller Design for Time-delay Singularly Perturbed Systems by H∞ Norm and Lambert W Function

김 범 수*
(Beomsoo Kim)

Abstract - The stabilizing controller design problem of time-delay singularly perturbed systems is considered. The proposed approach is based on the H∞ norm and the composite control method. A sufficient condition for the stability of the time-delay slow subsystem is presented. Using this condition, we can construct the composite control law for the time-delay singularly perturbed system and analysis the system by the matrix Lambert W function. Illustrated examples are presented to demonstrate the validity and applicability of the proposed method.

Key Words : Time-delay singularly perturbed systems, H∞ norm, Lambert W function, Stabilizing control, Composite control

1. 서 론

물리, 공학, 생물학, 개체군 다이내믹스(population dynamics), 경제학, 제어 공학 등 매우 많은 분야의 실 세계(real world)가 시간 지연을 갖는 시스템으로 표현된다[1,2]. 시간 지연 시스템이 지연 미분 방정식(DDE, Delay Differential Equation)으로 모델링 될 때 이 DDE는 초월 특성(transcendental characteristics)에 의해 무수히 많은 고유치를 가질 뿐만 아니라 시간 지연이 안정도에 매우 복잡하게 작용하여 시스템 해석을 어렵게 한다[1,3]. DDE 의 해는 수치 해석 방법, 그래픽적 방법, Pade 근사화 방법 등을 이용해서 구하는 방법과 Lambert W 함수를 이용해서 해석적으로 해를 구하는 방법[3] 등이 연구되어 왔다. Lambert W로 구한 DDE의 해는 일반적인 미분 방정식(ODE)의 해와 유사한 형태를 갖고 해석적으로 표현할 수 있는 장점이 있다. DDE가 스칼라 시스템일 때는 최우측 극점(rightmost pole)을 해석적으로 구할 수 있으나, 벡터-행렬 시간 지연 미분 방정식으로 표현된 시스템인 경우 일부 특수한 경우를 제외하고는 최우측 극점을 해석적으로 구하는 것은 아직 미해결문제로 남아 있다[3]. 그리고 Lambert W 함수를 이용한 극점 배치 기법에서는 궤환 이득을 구할 때 임의의 이득 초기치를 선정한 후 시행착오(trial and error)를 반복적으로 실행해야 하는 어려움이 있다[3].

느린 시간 모드(slow mode)와 빠른 모드(fast mode)가 동시에 존재하는 특이 섭동 시스템은 많은 물리적 시스템에서 나타나며[4], 이 시스템은 조건수(condition number)가 매우 큰 불량 조건(ill conditioned)을 가지므로 시스템 해석을 어렵게 한다. 따라서 이 문제를 회피하기 위해서 Chang 변환이나[5], 전체 시스템을 느린 부시스템(slow subsystem)과 빠른 부시스템(fast subsystem)으로 분리한 후 H_∞ 기반 입력 등 다양한 방법에 의해 각 부 시스템에서 구한 입력을 합성한 제어 방법 등 많은 연구가 진행 되어 왔다[4,6]. [7]에서는 전체 시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리한 후 느린 시스템에서의 제어 입력을 [8]에서 제시한 극점 배치 기법을 이용하여 구한 후 합성제어를 구하는 방법을 제시하였지만, 시스템을 안정화 시킬 수 있는 이득 영역을 알기 어렵고 또한 원하는 극점을 구하기 위해서는 시행착오를 거쳐야 하는 문제점을 안고 있다.

시스템 설계에서 가장 중요한 요소 중 하나는 안정도 문제로서, 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템의 안정도 문제는 시스템을 저차의 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리하여 접근하는 방법과 Lyapunov-Krasovskii 범함수를 이용하는 기법 등이 연구되어 왔다. [9]에서는 다중 시간 지연을 갖는 동차 특이 섭동시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리한 후 각 시스템에서의 안정도 문제를 다루었으며, [10]에서는 시간 지연을 갖는 동차 특이 섭동시스템을 Lyapunov 방법을 이용해서 안정도 문제를 다루었고, 뉴트럴(neutral) 특이 섭동 시스템을 안정화 시킬 충분 조건이 [11]에 제시되었다. [12]에서는 시간 지연 특이 섭동 시스템의 상태 궤환 이득을 Lambert W 함수를 이용하여 구했지만 느린 부 시스템이 스칼라 시스템으로 한정되어 있어서 고차 시스템에서 안정화 시킬 수 있는 이득 범위는 제시되지 않았다.

본 연구에서는 시간 지연이 있는 특이 섭동 시스템을 안정화 시킬 상태 궤환 입력을 구하는데 있어서 특이 섭동 시스템이 안고 있는 불량 조건을 회피하고 시스템을 저차화 시켜 해석을 보다 쉽게 하기 위해 시스템을 느린 부 시스템

* Corresponding Author : Dept. of Mechanical System Engineering, Gyeongsang National University, Korea
E-mail : kimbs@gnu.ac.kr
Received : June 5, 2013; Accepted : July 8, 2013

과 빠른 부 시스템으로 분리한 후 각 부 시스템에서 안정화 제어 입력을 H_∞ 놈을 이용해서 구하고, 이들 제어 입력을 합성하여 전체 시스템을 안정화 시키는 방법을 제시한다. 즉, 느린 부 시스템이 스칼라 시스템일 경우에는 [8]에서 제시된 Lambert W 함수를 이용한 극배치 기법으로 쉽게 안정화 시킬 수 있는 제어 입력을 구할 수 있으나, 시간 지연을 갖는 부 시스템이 고차인 경우에는 안정화 시킬 상태 궤환 입력을 구하는 것이 때로는 실패할 수 있으므로[3], 시간 지연이 있는 부 시스템에서 안정화 시킬 수 있는 궤환 이득 범위를 H_∞ 놈을 이용해서 구한 후 각 부 시스템에서 구해진 입력을 합성하여 전체 시스템에서의 해를 Lambert W 함수를 이용해서 구한다. 그리고 제시된 방법의 타당성을 수치 해석을 통해 보인다.

2. H_∞ 놈을 이용한 시간 지연 특이섭동 시스템의 안정화 궤환 이득

다음과 같이 느린 상태만 시간 지연을 갖는 특이섭동 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \epsilon\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\ \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21}\ \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t)\\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{d1}\\ \boldsymbol{A}_{d2}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t-d)+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$
$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{g}(t),\quad t\in[-d,0),$$
$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0,\quad t=0.$$

여기서 $\boldsymbol{x}_1(t)\in R^{n_1}, \boldsymbol{x}_2(t)\in R^{n_2}$ 는 각각 느린(slow), 빠른(fast) 부 시스템 상태변수이고 $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$은 제어 입력이며, $0<\epsilon\ll 1$ 이고, $d>0$ 는 시간 지연 상수이다. $\boldsymbol{g}(t)$는 초기 함수(preshape function, or history function)이고, $\boldsymbol{x}_0$는 초기값이다. 상수 계수 행렬 $\boldsymbol{A}_{ij}, \boldsymbol{A}_{di}, \boldsymbol{B}_i$, $(i=1,2, j=1,2)$는 각각 알맞은 차원을 갖으며 $\boldsymbol{A}_{22}$ 는 Hurwitz 행렬이라 가정한다.

일반적으로 시간 지연이 없는($\boldsymbol{A}_{di}=0, i=1,2$) 특이섭동 시스템은 Chang 변환을 이용하여 시스템 행렬의 불량 조건 문제를 회피할 수 있지만 시간 지연 항이 있으면 Chang 변환을 적용하여 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 완전히 분리하는 것이 매우 어렵다. 또한 모든 상태 변수가 시간 지연을 갖게 되면 시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로의 분리도 어렵다. 여기서는 느린 상태 변수에만 시간지연이 있는 시스템을 다루며, 제어 입력을 합성제어 기법(composite control)[4]을 사용해서 구한다. (1)로 주어진 특이 섭동 시스템에서 $\epsilon=0$ 으로 가정하여 다음과 같이 전체 시스템을 저차의 빠른 부 시스템과 느린 부 시스템으로 분리한다.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{1s}(t)=\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_{1s}(t)+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_{2s}(t)+\boldsymbol{A}_{d1}\boldsymbol{x}_{1s}(t-d)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_s(t), \tag{2}$$
$$\boldsymbol{x}_{2s}(t)=\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\big(\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_{1s}(t)+\boldsymbol{A}_{d2}\boldsymbol{x}_{1s}(t-d)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_s(t)\big), \tag{3}$$
$$\epsilon\dot{\boldsymbol{x}}_{2f}(t)=\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_{2f}(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_f(t). \tag{4}$$

여기서 $\boldsymbol{x}_1(t)\simeq\boldsymbol{x}_{1s}(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t)\simeq\boldsymbol{x}_{2f}(t)+\boldsymbol{x}_{2s}(t)$, $\boldsymbol{u}(t)\simeq\boldsymbol{u}_f(t)+\boldsymbol{u}_s(t)$, 로서 첨자 s,f 는 각 해당 변수의 느린 부분과 빠른 부분이다. (3)식을 (2)식에 대입하여 정리하면 시간 지연을 갖는 느린 부 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{1s}(t)=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{x}_{1s}(t)+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{x}_{1s}(t-d)+\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{u}_s(t), \tag{5}$$

여기서 계수 행렬은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{F}_1:=\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21},$$
$$\boldsymbol{F}_2:=\boldsymbol{A}_{d1}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{d2},$$
$$\boldsymbol{F}_3:=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{B}_2.$$

보조 정리 1 [10]. 복소 전달함수 $\boldsymbol{H}(s)$가 안정하고, $\|\boldsymbol{H}(s)\|_\infty\le h$, $0\le h<1$이면 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}(s))^{-1}$은 점근적으로 안정하고, $\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}(s))^{-1}\|_\infty\le(1-h)^{-1}$을 만족한다. 여기서 $\|\boldsymbol{H}(s)\|_\infty$는 $\boldsymbol{H}(s)$의 H_∞ 놈 $\sup_\omega\sigma_{\max}(\boldsymbol{H}(j\omega))$ 이고, $\sigma_{\max}$는 $\boldsymbol{H}(j\omega)$의 최대 특이 값(maximum singular value)이다. □

느린 부 시스템에서 상태 궤환 입력을$\boldsymbol{u}_s(t)=\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{x}_{1s}(t)$ 라 하면 (5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{1s}(t)=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{x}_{1s}(t)+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{x}_{1s}(t-d)+\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{x}_{1s}(t). \tag{6}$$

식 (6)을 라플라스 변환한 후 전달함수를 구하면 다음과 같다.

$$X_{1s}(s)=D_s(s)X_s(0). \tag{7}$$

여기서 $D_s(s)=\big(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2e^{-ds}-\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{K}_s\big)^{-1}$ 이다. 느린 부 시스템 (6)을 안정화 시키는 충분조건은 보조 정리 1을 이용하여 구하면 다음과 같다.

보조 정리 2. 시스템 (6)에서 상태 피드백 이득 $\boldsymbol{K}_s$ 가 다음 조건을 만족하면

$$\|(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22})^{-1}\big(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2e^{-ds}+\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{K}_s-\boldsymbol{A}_{22}\big)\|_\infty<h, \tag{8}$$

$D_s(s)\in S(C_+)$을 만족한다. 여기서 $0\le h<1$ 이고, C_+는 복소 우방평면이며 $S(C_+)$는 우방평면에서 해석 가능함을 뜻한다.

(증명) (7) 식에서 $D_s(s)=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_s(s))^{-1}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22})^{-1}$와 같이 놓고, 역행렬 성질 $(\boldsymbol{VY})^{-1}=\boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}$를 이용하여 전달함수를 다음과 같이 표현한 후

$$\begin{aligned}D_s^{-1}(s)&=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_s(s))\\&=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22}-s\boldsymbol{H}_s(s)+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{H}_s(s),\end{aligned}$$

(7)식의 $D^{-1}(s)$ 와 비교하면 $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22}-s\boldsymbol{H}_s(s)+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{H}_s(s)=s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2e^{-ds}-\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{K}_s$ 이므로

$$\boldsymbol{H}_s(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{22})^{-1}\big(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2e^{-ds}+\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{K}_s-\boldsymbol{A}_{22}\big) \tag{9}$$

와 같이 구해지고, $\boldsymbol{H_s}(s)$가 (8)을 만족하면 보조 정리 1 에 의해서 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H_s}(s))^{-1}\in S(C_+)$ 이다. 또한 $\boldsymbol{A_{22}}$는 Hurwitz 행렬이므로 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}})^{-1}\in S(C_+)$이 성립된다. 따라서 $D_s(s)\in S(C_+)$ 이다. □

보조 정리 2 로 구해진 $\boldsymbol{K_s}$ 는 느린 부 시스템을 안정화 시키고 $\boldsymbol{A_{22}}$ 는 Hurwitz 행렬이므로 시스템 (3)도 안정화 시킨다.

빠른 부 시스템 (4)에는 시간 지연이 없고 $\boldsymbol{A_{22}}$가 Hurwitz 행렬이므로 상태 궤환 입력 $\boldsymbol{u_f}(t)=\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{x_{2f}}(t)$ 에서 $\boldsymbol{K_f}$ 는 일반적인 극 배치 기법을 사용하여 쉽게 제어 입력을 구할 수 있다. 또는 다음과 같이 H_∞ 놈을 이용해서 시스템을 안정화 시키는 충분조건으로 $\boldsymbol{K_f}$ 를 구할 수 있다.

보조 정리 3. 시스템 (4)에서 상태 피드백 이득 $\boldsymbol{K_f}$ 가 다음 조건을 만족하면

$$\| (\epsilon s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}})^{-1}\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_f}\|_\infty \le h,\ 0\le h<1. \tag{10}$$

상태 궤환 입력 $\boldsymbol{u_f}(t)=\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{x_{2f}}(t)$는 시스템 (4)를 안정시킨다.

(증명) 입력 $\boldsymbol{u_f}(t)=\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{x_{2f}}(t)$ 를 (4)식에 대입하여 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$X_{2f}(s)=(\epsilon s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}}-\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_f})^{-1}X_{2f}(0).$$

여기서 $D_f(s)=(\epsilon s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}}-\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_f})^{-1}$ 라 하고, 보조 정리 2에서의 증명과 같이 $D_f^{-1}(s)=(\epsilon s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H_f}(s))$ 로 놓으면, $\boldsymbol{H_f}(s)=(\epsilon s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}})^{-1}\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_f}$ 가 되어 (10)을 만족하면 보조정리 1 에 의해서 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H_f}(s))^{-1}\in S(C_+)$ 이다. 또한 $\boldsymbol{A_{22}}$ 는 Hurwitz 행렬이므로 모든 ϵ 에 대해서 $(\epsilon s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A_{22}})^{-1}\in S(C_+)$ 이 성립된다. 따라서 $D_f(s)\in S(C_+)$ 이다. □

보조 정리 2 와 3에 의해 구한 입력을 합성한 제어 입력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t)&=\boldsymbol{u_s}(t)+\boldsymbol{u_f}(t)\\&=\boldsymbol{K_s}\boldsymbol{x_{1s}}(t)+\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{x_{2f}}(t)\end{aligned} \tag{11}$$

합성 제어 입력을 시스템 (1)에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x_1}}(t)\\ \epsilon\dot{\boldsymbol{x_2}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A_{11}}+\boldsymbol{B_1}\boldsymbol{K_1} & \boldsymbol{A_{12}}+\boldsymbol{B_1}\boldsymbol{K_f}\\ \boldsymbol{A_{21}}+\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_1} & \boldsymbol{A_{22}}+\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_f}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}(t)\\ \boldsymbol{x_2}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{A_{d1}}+\boldsymbol{B_1}\boldsymbol{K_2}\\ \boldsymbol{A_{d2}}+\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_2}\end{bmatrix}\boldsymbol{x_1}(t-d).$$

여기서

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K_1}&=\boldsymbol{K_s}+\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{A_{22}^{-1}}\boldsymbol{A_{21}}+\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{A_{22}^{-1}}\boldsymbol{B_2}\boldsymbol{K_s},\\ \boldsymbol{K_2}&=\boldsymbol{K_f}\boldsymbol{A_{22}^{-1}}\boldsymbol{A_{d2}}\end{aligned}$$

이다.

3. Lambert W 함수를 이용한 안정화 제어기 설계

Lambert W 함수 $W(z)$는 $ye^y=z, z\in C$ 의 역함수로 정의되며 초월(transcendental) 함수 특성에 의해 무수히 많은 가지(branch)를 갖는다[13].

$$W_k(z)\in\{y\in C\mid z=ye^y\}, k\in Z.$$

여기서 $k=0$ 일 때, 즉 $W_0(z)$ 를 주가지(principal branch)라 한다.

3-1 느린 부 시스템이 스칼라 시스템인 경우

느린 부 시스템이 스칼라 시스템($x_{1s}(t)\in R^1$)인 경우 상태 궤환 이득을 k_s 라 하면 (6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x_{1s}}(t)=(f_1+f_3k_s)x_{1s}(t)+f_2x_{1s}(t-d). \tag{12}$$

여기서

$$\begin{aligned}f_1&=a_{11}-\boldsymbol{A_{12}}\boldsymbol{A_{22}^{-1}}\boldsymbol{A_{21}},\\ f_2&=a_{d1}-\boldsymbol{A_{12}}\boldsymbol{A_{22}^{-1}}\boldsymbol{A_{d2}},\\ f_3&=b_1-\boldsymbol{A_{12}}\boldsymbol{A_{22}^{-1}}\boldsymbol{B_2},\end{aligned}$$

이고, a_{11}, a_{d1}, b_1 은 (1)의 계수 행렬 원소에 대응되는 스칼라이며, 구간 $t\in[-d,0)$ 에서 초기 함수는 $g(t)$, 초기값은 x_{s0} 이다. 여기서 해를 $x_{1s}(t)=e^{st}x_{s0}$라고 가정하고 이 것을 (12)식에 대입한 후 공통 요소 $e^{st}x_{s0}$를 제거하면 다음과 같다.

$$s-(f_1+f_3k_s)=f_2e^{-ds}. \tag{13}$$

(13)의 양변에 $de^{-d(f_1+f_3k_s)+ds}$ 를 곱하면

$$d(s-(f_1+f_3k_s))e^{d(s-(f_1+f_3k_s))}=df_2e^{-d(f_1+f_3k_s)}, \tag{14}$$

이 되고, 여기서 Lambert W의 인자를 $z=df_2e^{-d(f_1+f_3k_s)}$라 놓으면 (14)식에서 $d(s-(f_1+f_3k_s))=W(df_2e^{-d(f_1+f_3k_s)})$ 이므로 모든 가지에 대한 극점은 다음과 같이 해석적으로 구할 수 있다.

$$s_k=\frac{1}{d}W_k(df_2e^{-d(f_1+f_3k_s)})+f_1+f_3k_s,\ k\in Z. \tag{15}$$

그리고 스칼라 시간 지연 시스템인 경우 최우측 극점(rightmost pole)은 다음과 같이 주가지($k=0$)에 의해 정해지므로[14], 이 경우 시스템을 안정화 시키는 극점을 해석적으로 구할 수 있다.

$$\max(Re(W_k(z)))=Re(W_0(z)). \tag{16}$$

스칼라 시스템일 때 식 (12) 해는 다음과 같이 구해진다[3].

$$x_s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t}C_k^I \tag{17}$$

여기서 C_k^I는 주어진 초기 함수와 초기값으로부터 구해진다.

일반적으로 시간 지연을 갖는 스칼라 시스템인 경우 최우측 극점을 복소 평면상에서 임의의 값을 선정할 수 없고[8], (12)와 같이 주어진 시스템인 경우 최우측 극점은 [8]에 따르면 다음과 같이 범위가 정해진다.

$$Re\left\{\frac{1}{d}W_0\left(df_2e^{-d(f_1+f_3k_s)}\right)+f_1+f_3k_s\right\}\geq-\frac{1}{d}+f_1+f_3k_s. \tag{18}$$

(18)에서 (19)에 해당되는

$$-\frac{1}{d}+f_1+f_3k_s=0, \tag{19}$$

을 만족하는 k_s는 (12) 시스템의 극점이 0 이 되게 하는 제어 이득이므로 안정, 불안정 영역의 경계가 된다. 따라서 스칼라 시스템을 안정화 할 k_s의 범위는 (19)에서 구해진 k_s에 임의의 양의 값 Δ를 더한 $k_s+\Delta$를 (15) 식에 대입한 결과가 양수이면 시스템을 안정화 하는 이득 범위는 k_s 보다 작은 값에서 선택해야 하고, 음수이면 k_s 보다 큰 영역에서 선택해야 한다. 보조 정리 2가 안정화의 충분조건이므로 (19)에서 구해진 k_s를 (8)에 대입한 H_∞는 1 이 된다.

3-2 느린 부 시스템이 벡터-행렬 시스템인 경우

느린 부 시스템이 식 (6)과 같이 벡터-행렬 시간 지연 미분 방정식으로 표현될 때 해는 [3]에 따르면 다음과 같이 구해진다.

$$\boldsymbol{x_s}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\boldsymbol{S_k}t}\boldsymbol{C_k^I}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{S_k}=\frac{1}{d}\boldsymbol{W_k}(d\boldsymbol{F_2}\boldsymbol{Q_k})+\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_3}\boldsymbol{K_s}. \tag{21}$$

여기서 $\boldsymbol{W_k}(\bullet)$는 행렬 Lambert W 함수이고 아래와 같이 미지 벡터 $\boldsymbol{K_s}$ 의 함수인 $\boldsymbol{Q_k}$ 는 수치적으로 구한다.

$$\boldsymbol{W_k}(d\boldsymbol{F_2}\boldsymbol{Q_k})e^{\boldsymbol{W_k}(d\boldsymbol{F_2}\boldsymbol{Q_k})+\boldsymbol{F_1}+\boldsymbol{F_3}\boldsymbol{K_s}}=d\boldsymbol{F_2}. \tag{22}$$

벡터-행렬 시간 지연 미분 방정식에서 최우측 극점과 Lambert W 함수 가지와의 관계는 아직 규명이 안 된 상태이다[3]. 그리고 스칼라 DDE와 달리 벡터-행렬 DDE에서는 $e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}\neq e^{\boldsymbol{A}}e^{\boldsymbol{B}}$와 같이 일반적으로 행렬 지수의 교환법칙이 성립하지 않으므로(두 행렬 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 가 동시 삼각화 하면 교환법칙이 성립함[15]) (22)의 해를 해석적으로 구하기가 매우 어렵다.

(21)에서 구해진 $\boldsymbol{S_k}$의 고유 값은 (20)식으로 표현된 해의 안정성을 결정한다. [3]에서는 식 (22)에서 $\boldsymbol{Q_k}$를 구하기 위해서 임의의 $\boldsymbol{K_s}$를 선정한 후 시행착오를 반복적으로 수행해서 구하는데 때로는 해를 구하지 못하는 경우도 있고 구한 해로 안정성을 담보하기도 어렵다.

여기서는 보조 정리 2에 의해 안정 영역 안에 있는 $\boldsymbol{K_s}$를 선정하여 이를 (21), (22)에 대입하여 $\boldsymbol{Q_k}$, $\boldsymbol{S_k}$를 구하고, $\boldsymbol{C_k^I}$는 [3]에 있는 방법으로 구하여 시스템을 안정화 시키는 해 (20)을 구한다.

4. 수치 예

예제 1. 다음과 같이 느린 상태 변수가 스칼라 시스템인 시간 지연 특이섭동 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \epsilon\dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.1 & -2.3\\ -3.2 & -3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1.3\\ -4.5\end{bmatrix}x_1(t-0.2)+\begin{bmatrix}1.0\\ 0.5\end{bmatrix}u(t) \tag{23}$$

여기서 $\epsilon=0.01$, 초기함수는 $\boldsymbol{g}(t)=[1.0\ \ -0.5]^T$, $t\in[-0.2,0)$, 그리고 초기값은 $\boldsymbol{x}(0)=[1.0\ \ -0.5]^T$ 이다. 시스템 행렬의 고유값은 {3.2442, -342.1442}으로 불안정한 시스템이다. 그림 1에 시스템 (23)을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리 한 후 느린 부 시스템에서 보조 정리 2와 Lambert W 함수를 이용한 극점식 (15)를 비교하였다. 시스템을 안정화 시킬 상태 궤환 이득 k_s의 범위는 H_∞ 놈을 이용했을 때는 -17.8 ~ -7.6에서 $H_\infty<1$이었고, (15) 식으로 했을 때는 -7.6 이하에서 고유 값이 0 보다 작게 구해졌다.

시스템 (23)에서 느린 부 시스템의 안정, 불안정 경계를 결정하는 이득 값은 $k_s=-7.5689$이고 이 값을 (8)에 대입하면 $H_\infty=1$이고, 이때 Bode 선도는 그림 2와 같다.

그림 3은 $k_s=13.5, k_f=-5.2$로서 합성 제어입력을 인가한 경우와 인가하지 않은 경우를 도시하였다. 굵은 실선과 점선은 제어 입력을 인가하지 않은 경우로서 시스템이 발산함을 볼 수 있고, 가는 점선과 실선은 합성 제어를 입력한 결과로서 시스템이 안정됨을 볼 수 있다.

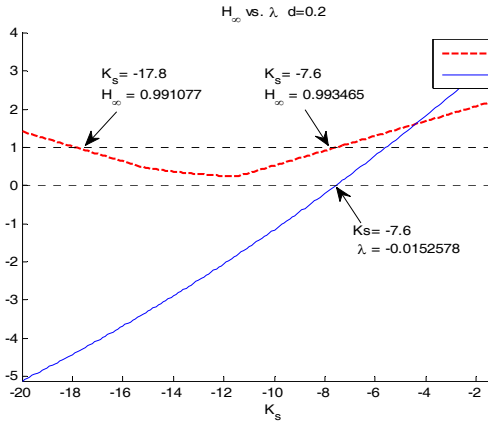

그림 1 상태 궤환 이득과 H_∞ 놈 및 고유값 관계

Fig. 1 State feedback gain vs. H_∞ norm eigenvalues

(23)과 같은 2차 시스템에서는 일반적으로 최우측 극점을 해석적으로 구할 수 없어 [8] 에서는 원하는 최우측 극점을 선정한 후 시행착오 방법을 이용하여 제어 이득을 구하여 제어 입력을 구하는 극배치 방법을 제시하였다. 이 극배치 방법에 의한 시스템의 해를 구한 결과를 그림 4에 도시하였다. 원하는 최우측 극점을 -7 로 선정하였고, 이때 궤환 이득은 $\boldsymbol{K}=[4.051\ -3.518]$ 로 구해졌으며 고유값은 $\lambda\{\boldsymbol{S_0}\}=\{-7.0023,\ -160.0495\}$이다. 그림 3과 4에서 볼 수 있듯이 제안된 방법과 [8]의 방법은 각각 시스템을 안정화 시킨다. 두 그림에서 궤적의 차이점이

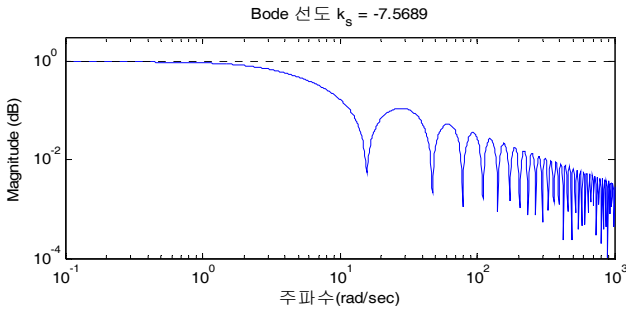

그림 2 $k_s=-7.5689$ 일 때의 Bode 선도

Fig. 2 Bode diagram for $k_s=-7.5689$

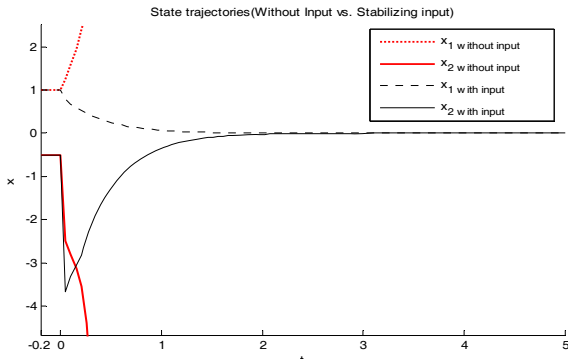

그림 3 상태 궤적 비교 (안정화 시키는 입력이 있을 때와 없을 때)

Fig. 3 State trajectories (with a stabilizing input vs. without an input)

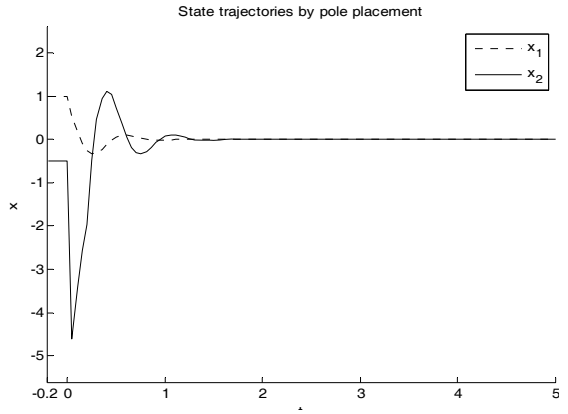

그림 4 극배치 방법[8]을 이용한 상태 궤적

Fig. 4 State trajectories by using pole placement[8]

발생한 것은 [8]의 방법은 최우측 극점을 정해논 상태에서 구한 궤환 이득과 합성 제어 방법을 사용하여 구한 궤환 이득이 상이하기 때문이다.

예제 2. 다음과 같은 벡터-행렬로 표현된 시간 지연 특이 섭동 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \epsilon\dot{x}_3(t)\\ \epsilon\dot{x}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & 0.2 & -0.5 & -1.3\\ 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.7\\ -0.8 & -0.4 & -5.4 & -1.1\\ 0.3 & -1.1 & 1.4 & -3.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2.47 & -1.69\\ -0.3458 & -2.86\\ 0.65 & -1.56\\ 1.69 & -4.55\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-0.4)\\ x_2(t-0.4)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2\\ 0.3\\ 1.0\\ -1.0\end{bmatrix}u(t) \tag{24}$$

여기서 $\epsilon=0.01$, 초기함수는 $\boldsymbol{g}(t)=[1\ \ 0\ \ -1\ \ 2]^T,\ t\in[-0.4,0)$ 그리고 초기값은 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{g}(0)$이다. 시스템 행렬의 고유값은 $0.0051,\ -0.016,\ -439.9\pm i735.5$ 로 느린 부 시스템이 불안정한 시스템이다. 그림 5에 제어 입력을 인가하지 않은 느린 부 시스템의 고유값 스펙트럼($k=0,\pm1,\pm2,\ldots$)을 나타내었다. $k=0$ 일 때 고유값은 $\lambda\{\boldsymbol{S_0}\}=\{-0.8159-i4.354, 0.05986-i3.62\}$로서 불안정한 극점을 갖는다.

주어진 느린 부 시스템에서의 상태 궤환 이득 $\boldsymbol{K_s}=[k_1\ k_2]$에 따른 전달함수의 H_∞ 을 그림 6에 도시하였다. 빗금친 부분이 $H_\infty<1$ 영역이다. 그림에서 폐곡선 1.0, 0.7 등은 각각 폐곡선 내부가 $H_\infty<1.0$, $H_\infty<0.7$ 인 영역이다. 따라서 (18)식으로 주어진 느린 부 시스템을 안정화하는 상태 궤환 입력을 $H_\infty<1$ 영역 안에 있는 값을 선정함으로써 [3]에서 사용한 반복 시행착오에 따른 계산량 문제와 원하는 $\boldsymbol{K_s}$ 를 찾지 못하는 경우, 그리고 최우측 극점을 구하는 문제를 회피할 수 있다.

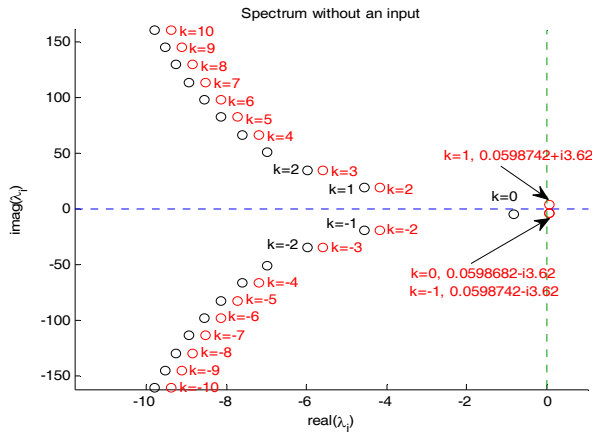

그림 5 느린 부 시스템에서 입력을 인가하지 않았을 때의 스펙트럼

Fig. 5 Spectrum of the slow subsystem without an input

그림 7은 그림 6에서 $H_\infty<1$ 영역 내에 있는 이득 $\boldsymbol{K_s}=[-2\ \ 1]$ 으로 구축된 상태 궤환 제어 입력을 느린 부 시

스템에 인가했을 때의 고유값 스펙트럼을 나타내었다. $k=0$ 일 때 고유값은 $\lambda\{S_0\}=\{-1.52-i5.11, -0.02-i3.83\}$ 로서 그림에서 볼 수 있듯이 모든 극점의 실수 부분이 0 보다 작아 안정해짐을 알 수 있다.

그림 8은 느린 부 시스템에서의 제어 입력을 그림 6의 안정화 영역 내에 있는 이득 $K_s=[-2\ 1]$ 로 구성하고, 빠른 부 시스템의 입력은 극점 배치 기법을 이용하여 구한 후(원하는 극점을 -10, -13으로 했을 때 $K_f=[28.78\ 37.35]$) 이들 두 제어 입력을 합성한 제어입력을 전체 시스템에 인가했을 때의 상태 궤적으로 상태 값들이 수렴함을 볼 수 있다.

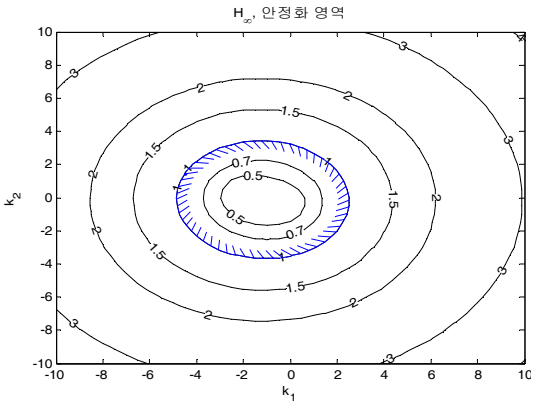

그림 6 H_∞ 놈을 이용한 상태 궤환 이득 영역

Fig. 6 H_∞ norm-based state feedback gain region

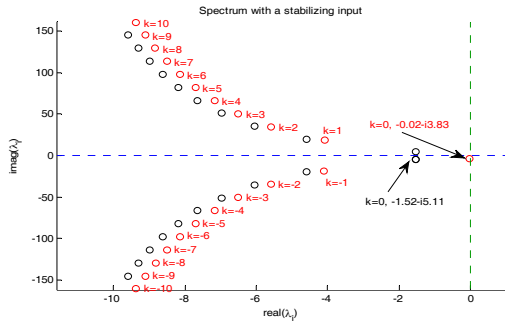

그림 7 느린 부 시스템에서 안정화 입력을 인가했을 때의 스펙트럼

Fig. 7 Spectrum of the slow subsystem with a stabilizing input

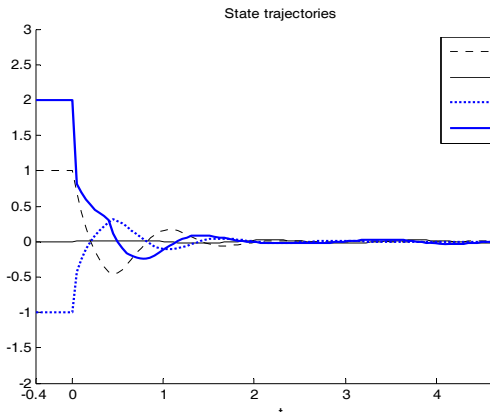

그림 8 예제 2 에 대한 상태 궤적

Fig. 8 State trajectories for the example 2

[8]의 극배치 방법을 사용하여 (24)로 주어진 시스템의 궤환 이득을 원하는 최우측 극점을 -0.1로 하고, K 와 Q_0의 초기치를 다음과 같이 선정하고 Matlab package[3]을 이용하여 구할 때 일차 최적 조건(First-order optimality)의 관계를 표 1에 나타내었다.

$$K_1=[\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],\ K_2=[\ 1\ 1\ \ 1\ \ 1],$$
$$K_3=[-1\ -1\ -1\ -1],\ K_4=[-2\ 1\ 28\ \ 37],$$
$$Q_{0-1}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\ Q_{0-2}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$
$$Q_{0-3}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\ Q_{0-4}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

표 1 일차 최적 조건

Table 1 First-order optimality

	Q_{0-1}	Q_{0-2}	Q_{0-3}	Q_{0-4}
K_1	1.11e+024	2.6e+043	6.35e+043	1.28e+024
K_2	1.16e+021	6.87e+055	2.03e+056	1.32e+021
K_3	6.66e+026	1.3e+032	1.09e+032	7.65e+026
K_4	2.48e+170	NaN	NaN	1.83e+171

원하는 최우측 극점을 -7 로 해도 결과는 표 1과 거의 동일한 일차 최적 조건으로 나타났다. (24) 로 주어진 시스템에 대해서 32 가지 조건하에서 시스템을 안정화 시킬 수 있는 이득이 몇 가지 경우에 대해서 구해지지 못 했다. 따라서 [8]에서도 언급했듯이 시스템이 고차일수록 지연 시간, 시스템 구조 등을 고려해서 다양한 초기 조건하에서 시행착오를 반복해야 하는 어려움이 있다.

5. 결 론

시간 지연 특이 섭동 시스템의 안정화 제어 문제를 시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리한 후 느린 부 시스템에서 인가할 상태 궤환 제어에서의 이득을 놈을 이용해서 구성함으로써 느린 부 시스템의 안정화를 보장하였고, 빠른 부 시스템에서의 제어 입력도 극 배치 기법을 이용해서 구성한 후 이들 두 제어 입력을 합성한 것을 인가하여 시스템을 안정화 할 수 있음을 수치 예를 통해서 보였다. 또한 놈을 이용하여 궤환 이득을 구함으로써 해를 해석적으로 구하는데 유용한 Lambert W 함수 이용을 용이하게 할 수 있음을 보였다.

References

[1] J. Richard, "Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems,"

Automatica, vol. 39, no. 10, pp. 1667-1694, 2003.
[2] Y. Kyrychko and S. Hogan, "On the use of delay equations in engineering applications," *J. Vibrat. Control*, vol. 16, no. 7-8, pp. 943-960, 2010.
[3] S. Yi, P. W. Nelson, and A. G. Ulsoy, *Time-delay systems: Analysis and control using the Lambert W function*, World Scientific Publishing Company, 2010.
[4] P. Kokotovic, H. K. Khali, and J. O'Reilly, *Singular perturbation methods in control: Analysis and design*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
[5] K. W. Chang, "Singular perturbations of a general boundary value problem," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 3, no. 3, pp. 520-526, 1972.
[6] Y. Kim, B. Kim, and M. Lim, "Finite-time composite control for a class of singularly perturbed nonlinear systems via successive Galerkin approximation," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, pp. 507-512, 2005.
[7] N. Abdelkrim, A. Tellili, and M. N. Abdelkrim, "Composite control of a delayed singularly perturbed system by using Lambert-W function," *Systems Signals and Devices (SSD), 2010 7th International Multi-Conference* on, pp. 1-4, 2010.
[8] S. Yi, P. Nelson, and A. Ulsoy, "Eigenvalue assignment via the Lambert W function for control of time-delay systems," *J. Vibrat. Control*, vol. 16, no. 7-8, pp. 961-982, 2010.
[9] S.T. Pan, C.F. Chen, and J.G. Hsieh, "Stability Analysis for a Class of Singularly Perturbed Systems With Multiple Time Delays" , *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 126, pp. 462-466, 2004
[10] Z. Shao and J. Rowland, "Stability of time-delay singularly perturbed systems," *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, pp. 111-113, 1995.
[11] C. Chen, "Stabilization for a class of two-time-scale multiple time-delay neutral systems," *IEEE ICSS2005 International Conference On Systems & Signals*, pp. 849-854, 2005.
[12] N. Abdelkrim, A. Tellili, and M. N. Abdelkrim, "Additive fault tolerant control applied to delayed singularly perturbed system," *Journal of Software Engineering and Applications*, vol. 5, no. 4, pp. 217-224, 2012.
[13] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, "On the Lambert W function," *Advances in Computational Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 329-359, 1996.
[14] H. Shinozaki and T. Mori, "Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function," *Proceedings of the Annual Conference of the Institute of Systems, Control and Information Engineers*, pp. 389-390, 2005.
[15] E. Jarlebring and T. Damm, "The Lambert W function and the spectrum of some multidimensional time-delay systems," *Automatica*, vol. 43, no. 12, pp. 2124-2128, 2007.

저 자 소 개

김 범 수 (金 範 洙)
1987년 고려대학교 전기공학과, 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과 (공학석사), 2002년 동대학원 전기공학과(공학박사), 1989~1998 LG산전연구소, 2005~현재 경상대학교 기계시스템공학과 부교수
E-mail : kimbs@gnu.ac.kr