

확산모형에 대한 누울생성함수의 근사와 가우도 추정법*

이윤동**[†] · 이은경***

An Approximation of the Cumulant Generating Functions of Diffusion Models and the Pseudo-likelihood Estimation Method

Yoon-Dong Lee** · Eun-kyung Lee***

■ Abstract ■

Diffusion is a basic mathematical tool for modern financial engineering. The theory of the estimation methods for diffusion models is an important topic of the financial engineering. Many researches have been tried to apply the likelihood estimation method for estimating diffusion models. However, the likelihood estimation method for diffusion is complicated and needs much amount of computing.

In this paper we develop the estimation methods which are simple enough to be compared to the Euler approximation method, and efficient enough statistically to be compared to the likelihood estimation method. We devise pseudo-likelihood and propose the maximum pseudo-likelihood estimation methods. The pseudo-likelihoods are obtained by approximating the transition density with normal distributions. The means and the variances of the distributions are obtained from the delta expansion suggested by Lee, Song and Lee (2012).

We compare the newly suggested estimators with other existing estimators by simulation study. From the simulation study we find the maximum pseudo-likelihood estimator has very similar properties with the maximum likelihood estimator. Also the maximum pseudo-likelihood estimator is easy to apply to general diffusion models, and can be obtained by simple numerical steps.

Keyword : Diffusion Models, Transition Density, Delta Expansion, The Maximum Likelihood Estimator

논문접수일 : 2013년 01월 23일 논문게재확정일 : 2013년 02월 21일

논문수정일(1차 : 2013년 02월 05일, 2차 : 2013년 02월 18일)

* 본 연구는 2012년도 서강대학교 교내연구비(201210023.01)의 지원에 의하여 수행된 연구임(제1저자).

본 연구는 2009년도 교육과학기술부의 재원에 의한 한국연구재단의 대학중점연구소 지원사업(2009-0093827)으로 수행된 연구임(제2저자).

** 서강대학교 경영학부

*** 이화여자대학교 통계학과

† 교신저자, widylee@gmail.com

1. 서 론

현대 금융공학의 핵심적 요소인 주가지수, 이자율, 환율 등 금융현상을 설명하는 자료들은 모두 시간적 변동성을 갖는다. 특히 근래에 들어서는 이들 자료의 생성과 관측주기가 매우 짧아지고 있고, 이 값들 자체가 시간적으로 연속적인 특성을 갖는 것으로 모형화 되고 있다. 이에 따라 이 값들의 해석을 위해서는 확률미적분학의 개념이 필요하고 또한 이에 대한 추론을 위해서는 통계적 방법의 결합이 필요하다. 금융공학의 문제는 전통적인 경영과학의 범주에서도 중요한 역할을 하고 있다(eg., Park and Jang, 2012; Kwon, 2011), 이에 대한 통계적 추론 문제는 실질적으로 모형의 값을 결정하는 중요한 사항으로 경영과학 전반의 전통적인 주제 중 하나이다(eg., Ko et al., 2008). 본 연구에서는 확률적 특성을 갖는 연속시간 변량들을 모형화하기 위하여 자주 사용되는 확산모형의 추론문제를 다루게 된다. 확산모형의 추론에 관한 이론적 논의에서 가장 기본적이고 중요한 사항은 확산모형에서의 시간은 연속적인 개념이고 극미세 시간 사이의 변동양태를 나타내는 데 반하여 실제 관측되는 자료는 연속적인 값이 아닌 이산적인 시간 간격으로 관측된다는 점이다. 이런 이유로 발생하는 모형과 관측자료와의 관측시간 단위의 괴리를 극복하기 위한 많은 연구가 있어 왔다. Ait-Sahalia(2002)는 허밋직교다항식에 의한 급수확장법을 이용하여 이를 해결하는 방안을 제시하였으나 그 구체적인 일반식을 제시하지 못하였다. 최근 Lee et al. (2012)는 이은경, 최영수, 이윤동(2010)에 제안된 방법을 발전시켜 Ait-Sahalia(2002)에 의하여 제안되었으나 그 일반식이 제시되지 못한 확장법의 일반식을 구하고, 그 확장법을 델타확장법이라 명명하였다. 또한 Lee et al.(2012)은 델타확장법을 이용하여 확산모형의 전이확률분포에 대한 임의차수 적률(moments)을 구하는 법을 제시하였다. Ait-Sahalia는 인터넷에 게시된 자신의 Research page¹⁾에서 이은경 등(2010)에 기반한 확산모형 추정코드를 소

개하고 있기도 하다. 본 연구는 Lee et al.(2012)에서 구해진 적률에 관한 일반식을 누율(cumulants)를 구하는 식으로 전개하고, 이를 이용하여 확산모형에 대한 추정방법을 개선하기 위한 연구이다.

확산모형은 미세입자의 움직임이나 금융자산의 가격변동을 모형화 하기 위하여 사용되는 수리적 모형이다. 확산과정 X_t 는, 추세계수 $\mu_t = \mu(\theta, t, X_t)$ 와 확산계수 $\sigma_t = \sigma(\theta, t, X_t)$ 를 갖는 다음과 같은 확률편미분방정식의 해로서 주어지는 연속시간 마코프 확률과정이다.

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (1.1)$$

이 확률편미분방정식의 해의 존재성에 대한 논의는 Kloeden and Platen(1999, p.36)과, Oksendal(2003, p.68)에서 찾을 수 있다. 추세계수 μ_t 와 확산계수 σ_t 의 형태에 따라 다양한 확산과정이 정의된다. 특히 추세계수와 확산계수가 $\mu_t = \mu(\theta, X_t)$ 이고 $\sigma_t = \sigma(\theta, X_t)$ 인 형태로, 시간변수 t 에 대하여 직접 영향을 받지 않으면서 립쉬츠 연속성 조건(Lipschitz continuity condition)을 만족하는 경우를 이또확산과정(Itô diffusion process)이라 한다(cf. Oksendal, 2003, p.114, p.149). 본 연구에서는 논의의 단순화를 위하여 이또확산과정을 중심으로 서술한다.

최근 확산모형에 대한 연구에서는 금융자산 가격의 특이한 변동 현상을 설명해야 하는 현실적 필요에 의하여 보다 다양한 형태의 확산모형이 제안되고 연구되어 오고 있다. 대표적인 확산모형으로는 Ornstein-Uhlenbeck(OU) 확률과정에 해당하는 Vasicek(1977) 모형, Cox et al.(1985)에 의해 제안된 CIR 모형, Cox(1975)가 제안한 Constant Elasticity of Variance 모형(CEV 모형) 등이 있다. 이자율 기간구조 연구 등에서 자주 사용되는 Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders 모형(CKLS 모형)은 선형적인 추세계수를 갖는 CEV 모형으로 다음 확률편미분방정식을 만족하는 확산확률과정으로 정의된다.

1) <http://www.princeton.edu/~yacine/closedformmle.htm>.

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t \quad (1.2)$$

OU 모형은 $\gamma=0$ 인 경우의 CKLS 모형에 해당하고, CIR 모형은 $\gamma=1/2$ 인 경우이다. 또 기하브라운 운동 (Geometric Brownian Motion; GBM) 확률과정은 Black-Scholes 옵션가격산정 모형에 사용되어 매우 잘 알려진 확산모형으로, 위 식 (1.2)에서 $\beta=0$ 이고 $\gamma=1$ 인 경우에 해당한다. 이 외에도 이중우물잠재모형(Double-Well Potential model; DWP 모형) 등을 포함한 다양한 확산모형이 금융현상의 모형화에 자주 고려되고 있고, Chan et al.(1992)에는 이에 대하여 잘 정리되어 있다.

확률편미분방정식 식 (1.1)의 추세계수 μ_t 와 확산계수 σ_t 는 특정 모수들을 포함하는 형태로 정의된다. 예를 들어 CKLS 모형은 모수 $\theta=(\alpha, \beta, \sigma, \gamma)$ 를 포함하고 있고, Vasicek 모형은 모수 $\theta=(\alpha, \beta, \sigma)$ 를 포함하고 있다. 추세계수와 확산계수에 모형모수가 개입되어 있음을 명시적으로 나타내기 위하여 $\mu(\theta, \cdot)$ 혹은 $\sigma(\theta, \cdot)$ 와 같이 표현한다.

확산확률과정 X_t 를 정의하기 위하여 사용하는 확률편미분방정식 (1.1)은 미세입자의 움직임이나 금융자산의 가격변화에 대하여 극한적으로 짧은 시간 사이의 동적관계를 규정하는 모형이다. 이에 반하여 실제에서 확산과정을 관측하여 얻게 되는 자료는 상당한 시간간격을 두고 관측되게 된다. 즉, 확산과정을 관측하여 얻은 값을 $\{X_{t_i}\}_{i=0}^n$ 이라 하면 관측시점 t_i 들은 이산적인 특성을 갖는다. 규칙적인 시간간격으로 관측이 이루어진 경우를 가정하면 $\Delta=(t_{i+1}-t_i)$ 이다($\Delta>0$). 결국 확산모형의 확률적 특성을 정의하는 확률편미분방정식은 연속시간 모형인데 반하여, 관측되는 자료는 이산적인 시간간격으로 관측되는 것이므로, 관측시점 사이의 모든 값들이 결측치가 되는 상황이다. 이런 이유로 확산모형의 추정을 위해서는 우도추정법(likelihood estimation method)이나 베이즈추정법(Bayesian estimation method) 같은 통계학적으로 잘 연구된 추정방법이 적용되는 대신에, 오일러근사법(Euler approximation scheme)이나 일반화적률법(Gene-

ralized Method of Moment; GMM)과 같은 확산모형에 특화되어 개발된 방법들 혹은 다양한 통계적모형에 대한 적용편의성이 높은 특이방법들이 주로 사용되어 왔다.

최근에 제안되는 확산모형들은 그 모형의 형태가 점점 더 복잡해지고 모형에 사용되는 모수도 많아지는 경향이 있다. 그에 맞추어 추정방법 측면에서도 이전에 자주 사용되던 방법들보다 정교하고 효율적 추정이 가능한 방법들에 대한 관심이 커지고 있다. 이런 이유로 근래에 들어 확산모형에 대하여 우도추정법이나 베이즈추정법을 적용하려는 시험적 연구가 계속되고 있다(ref. Pederson, 1995; Durham and Gallant, 2001; Elerian et al., 2001; Eraker, 2001; Ait-Sahalia, 2002; Nicolau, 2002; Beskos et al., 2006; Ait-Sahalia, 2008). 확산모형의 추정을 위하여 우도추정법이나 베이즈추정법을 적용하기 위해서는 가장 먼저, 관측시간간격 Δ 사이에 확산과정의 확률적 변화를 규정하는 전이확률밀도(transition density)를 구하여야 한다. 그러나 OU 모형이나 CIR 모형과 같이 비교적 단순한 모형들의 경우를 제외하고는 확산모형의 전이확률밀도가 잘 알려져 있지 않고 간단한 형태로 주어지지 않기 때문에 많은 연구들에서 확산모형의 전이확률밀도를 근사하기 위한 다양한 방법들을 제시하고 있다. 전이확률밀도를 구하기 위한 방법들은 크게 세 가지 방법으로 구분해 볼 수 있다 : 확률편미분방정식에서 직접 얻어지는 Fokker-Planck 편미분방정식의 해를 구하는 방법, 수리적 근사법을 이용하는 방법, 컴퓨터 모의실험(simulation)을 통하는 방법.

이에 따라 확산모형의 추정법으로 최근 개발되는 방법들은 대부분 그 이론이 매우 난해하기도 하고, 이를 이용하여 실제 추정을 하고자 하는 경우에도, 적용 모형의 범용성이 결여되어 있거나, 소프트웨어로 구현이 어렵거나, 그 결과의 정확성을 신뢰하기 어려운 경우들도 발생하는 등 실용성에 대한 의문이 제기되어 왔다. Hurn et al.(2007)은 확산모형에 대한 다양한 추정법들에 대하여 잘 정리하여 설명

하고 있고, 각 추정법들의 성능을 비교하는 실험 결과를 제시하고 있다. Hurn et al.(2007)이 제시한 모의실험 결과에 의하면, OU 모형이나 CIR 모형을 기준으로 시험된 경우들에 대하여 오일러근사법이나 Shoji and Ozaki(1998)가 제안한 국소선형근사법(New Local Linearization; NLL)과 같이 비교적 단순한 형태의 근사법이 예상과 달리 통계적으로 상당히 정확성이 높은 추정결과를 보여주고 있다. 또한 이들 방법은 그 원리가 단순한 이유로 구현이 쉽고 계산 속도 또한 다른 방법들에 비하여 빠르다는 장점을 보여주고 있다.

비교 대상이 되는 다른 추정법들은 정확한 우도를 계산하기 위하여 전이확률밀도를 추정하는 과정에 많은 노력을 기울이는 것과 달리, 오일러근사법과 NLL 방법은 전이확률밀도를 단순하게 정규분포로 가정하고 추정을 한다는 특징을 가지고 있다. 이 점은 매우 중요한 시사점을 가진 것으로 해석된다. 개개의 관측자료가 비정규분포적 특성을 가지고 있는 경우라 하더라도, 모수의 추정을 위하여는 반복적으로 관측된 자료를 사용하게 되는데, 이 과정에서 비정규분포의 특성은 모수 추정의 효율성에 그다지 큰 영향을 미치지 못한다는 점이다. 본질적으로는 중심극한정리에서 모평균의 추정량인 표본평균의 효율성은, 표본의 크기가 적당히 크기만 하면, 개개의 관측치들이 갖는 분산에 영향을 받기는 하지만, 정규분포나 비정규분포나 하는 것과 같은 분포의 형태와 같은 분포의 다른 특성에는 거의 영향을 받지 않는다는 점과 동일한 의미로 받아들일 수 있다.

본 연구에서는 이런 인식하에서, 개개의 확산모형에 대하여 가능한 정확한 전이확률밀도를 계산하여 우도법을 적용하려는 틀에서 탈피하여, 정규분포 형태의 가우도(pseudo-likelihood)를 잡는 다양한 방법을 제시하고 이들을 이용하여 우도법을 준용하는 경우에 각 추정 방법들이 보여주는 통계적 성능을 다른 방법들과 비교 시험하게 될 것이다. 이은경 등(2010)은, Ait-Sahalia and Yu(2006)에 의하여 제안된 확산모형의 전이확률밀도를 안정점

근사법으로 근사하는 방법을 이용하여, 전이확률밀도를 정규분포로 근사하는 방법을 제시하고 OU 모형의 경우에 대한 추정을 중심으로 검토하였다. 또한 Lee et al.(2012)은 일반적인 확산모형들에 대하여 그 임의차수 적률(moments)을 구하는 확장방법을 보였다. 본 연구에서는 이 연구들의 결과를 이용하여 일반적인 확산모형에 대하여 정규분포 형태의 가우도를 설정하는 방법에 대하여 연구하게 된다.

다음 제 2장에서는 확산모형의 전이확률밀도를 근사하기 위한 기본적인 방법들을 살펴본다. 그 다음 제 3장에서는 확산모형에 대한 누울생성함수의 확장방법을 제안하여, 그로부터 전이확률밀도의 평균과 분산을 확장전개하는 결과를 얻는다. 제 4장에서는 전이확률밀도를 정규분포 형태로 가정하고 평균과 분산만을 근사하여 가우도를 잡고 그로부터 가우도를 최대화하여 추정량을 얻기 위한 수치적 최적화 방법에 대하여 살펴볼 것이다. 제 5장은 제안된 가우도를 사용하는 최대가우도추정방법들과 기존에 잘 알려진 추정방법들과의 통계적 성질을 시뮬레이션을 통하여 비교하게 된다.

2. 전이확률밀도와 안정점근사법

전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 는, 확률과정 $X_0 = x_0$ 인 조건으로부터 $X_\Delta = x$ 로 변화될 조건부 확률밀도를 의미한다. 즉,

$$\Pr(X_\Delta \in dx | X_0 = x_0) = p^\Delta(x_0, x)d\lambda(x)$$

이다. 여기서 $\lambda(\cdot)$ 는 르베그측도(Lebesgue measure)이다. 확산계수가 $\sigma(x)$ 와 같이 x 의 함수로 주어진 경우, $1/\sigma(u)$ 에 대한 부정적분으로 주어지는 Lamperti 변환,

$$h(x) = \int^x \frac{du}{\sigma(u)}$$

을 이용하여 정의되는 확산과정 $Y_t = h(X_t)$ 는 확산계수가 1인 단위확산과정이 된다. 즉,

$$dY_t = a(Y_t)dt + dW_t \quad (2.1)$$

이다. 여기서

$$a(h(x)) = \frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\sigma'(x) \quad (2.2)$$

이다. 이때 확산과정 X_t 에 대한 전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 와 변환된 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$p^\Delta(x_0, x) = \frac{q^\Delta(h(x_0), h(x))}{\sigma(x)} \quad (2.3)$$

이와 같이 확산과정 X_t 에 대한 전이확률밀도는 Lamperti 변환을 통하여 얻어진 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 에 대한 식으로 표현되므로, 확산과정의 전이확률밀도를 구하는 과정의 주 관심은 단위확산과정 식 (2.1)에 대한 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 를 구하는 과정에 집중되게 된다.

Rogers(1985)와 Dacunha-Castelle and Florens-Zmirou(1986)는 확산모형 식 (2.1)에 대한 전이확률밀도를 다음과 같이 제시하였다.

$$q^\Delta(y_0, y) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \phi\left(\frac{y-y_0}{\sqrt{\Delta}}\right) \cdot e^{A(y)-A(y_0)} \cdot E\left[e^{-\frac{1}{2}\int_0^\Delta g(\tilde{W}_t)dt}\right] \quad (2.4)$$

여기서 $A(y) = \int_0^y a(v)dv$ 이고 $g(y) = a^2(y) + a'(y)$ 이며 $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 확률밀도이다. 또 브라운 다리(Brownian bridge) 확률과정 $\tilde{W}_t, t \in (0, \Delta)$ 는 $\tilde{W}_0 = y_0$ 이고 $\tilde{W} = y$ 인 조건을 만족한다. 식 (2.4)를 이용하여 전이확률밀도를 구할 때의 가장 큰 어려움은 브라운다리 확률과정의 경로적분의 함수로 주어지는 값에 대한 기대치를 구해야 한다는 점이다. 이에 대한 다양한 해결책이 연구되고 제안되고 있다.

Ait-Sahalia and Yu(2006)는 안장점 근사법을

통하여 전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 를 구하는 방법을 제시하였다. 안장점근사법은 허미트시리즈(Hermite series) 확장법이나 에지워스(Edgeworth) 확장법보다 정교하게 분포를 근사하여야 할 때 사용되는 방법이다. 안장점근사법에 대하여는 Daniels(1954), Barndorff-Nielsen and Cox(1989), Goutis and Casella(1999) 등에 잘 소개되어 있다. Edgeworth 확장법은 분포의 중앙부근에서는 상대적으로 높은 정확도를 보이는데 비하여, 분포의 중앙에서 많이 떨어진 곳에서는 상대적으로 부정확한 값을 주는 것으로 알려져 있다. 이에 반하여 안장점근사법은 지수적 기울임(exponential tilting) 방법을 이용하여, 분포의 중앙에서 많이 떨어진 곳에서의 근사값도 정확하게 구해 주는 장점이 있다.

안장점근사법은 어떤 확률변수 Z 의 누울생성함수 $K_Z(s) = \log E[\exp\{sZ\}]$ 가 주어진 경우 푸리에역 변환을 이용하여 확률밀도함수 $f(z)$ 를 근사한다. 즉, 임의의 τ 에 대하여

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} e^{K_Z(s)-zs} ds \quad (2.5)$$

임을 이용한다. 이때 적분경로를 $s = \tau + (iv)\{K_Z''(\tau)\}^{-1/2}$ 이라 잡고, $C_i(\tau) = K_Z^{(i)}(\tau)[K_Z''(\tau)]^{-i/2}, i = 3, 4, \dots$ 이라 치환한다고 하자. 여기서 $K_Z(s) - zs$ 을 다음과 같이 Taylor 전개에 의하여 근사하고, 이를 식 (2.5)에 대입한다고 하자.

$$K_Z(s) - zs \approx (K_Z(\tau) - \tau z) + (K_Z'(\tau) - z) \{K_Z''(\tau)\}^{-1/2}(iv) - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3!}C_3(\tau)(iv)^3 + \frac{1}{4!}C_4(\tau)(iv)^4$$

이때 특히 어떤 특정값 τ 에 대하여 $K_Z'(\tau) = z^*$ 가 된다고 하면,

$$K_Z(s) - zs \approx (K_Z(\tau) - \tau z) - \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3!}C_3(\tau)(iv - \delta)^3 + \frac{1}{4!}C_4(\tau)(iv - \delta)^4$$

이다. 여기서 $\delta = (z^* - z)\{K_Z''(\hat{\tau})\}^{-1/2}$ 이다. 이때 만약 $z^* = z$ 이어서 τ 가 안장점 조건 $K_Z'(\hat{\tau}) = z$ 을 만족하는 안장점 $\hat{\tau}$ 과 동일해 진다면, 즉 $t = \hat{\tau}$ 라면, s 에 대한 함수 $K_Z(s) - zs$ 가 최대값 $K_Z(\hat{\tau}) - \hat{\tau}z$ 를 갖게 되고, $\delta = 0$ 이 되어, 푸리에역변환 식 (2.5)가 다음과 같이 간단히 전개된다.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= e^{K_Z(\hat{\tau}) - \hat{\tau}z} \{2\pi K_Z''(\hat{\tau})\}^{-1/2} \quad (2.6) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v) \exp\left\{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} C_k(\hat{\tau})(iv)^k\right\} dv \\
 &= e^{K_Z(\hat{\tau}) - \hat{\tau}z} \{2\pi K_Z''(\hat{\tau})\}^{-1/2} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} C_k(\hat{\tau})(iv)^k\right)^m dv \\
 &\approx e^{K_Z(\hat{\tau}) - \hat{\tau}z} \{2\pi K_Z''(\hat{\tau})\}^{-1/2} \\
 &\quad \left(1 + \frac{3}{24} C_4(\hat{\tau}) - \frac{5}{24} C_3^2(\hat{\tau}) - \frac{1}{48} C_6(\hat{\tau}) + \dots\right)
 \end{aligned}$$

여기서 $\phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 밀도함수이다.

본 연구에서는 Ait-Sahalia and Yu(2006)에서 고려한 방법과 같이 X_t 에 대한 전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 를 직접 안장점근사법으로 근사하는 대신에, Ait-Sahalia(2002)에서 고려한 방법에 따라, 먼저 Lamperti 변환을 적용하여 Y_t 를 얻고, 다음으로 함수

$$z(y) = \Delta^{-\frac{1}{2}}(y - y_0)$$

를 이용하여 다시 Y_Δ 를 변환하여 얻은 $Z_\Delta = z(Y_\Delta)$ 에 대한 전이확률밀도 $q_Z^\Delta(y_0, z)$ 를 대상으로 안장점 근사법을 적용하게 된다. 이때 $q_Z^\Delta(y_0, z)$ 와 $q^\Delta(y_0, y)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$q_Z^\Delta(y_0, z) = \Delta^{1/2} q^\Delta(y_0, y_0 + \Delta^{1/2} z)$$

본 연구에서 Ait-Sahalia and Yu(2006)의 경우와 달리 $q_Z^\Delta(y_0, z)$ 에 대한 안장점근사법을 고려하는 이유는, 수식의 전개과정에서 X_t 의 확산계수 $\sigma(x)$ 가 주는 번거로움을 피할 수 있고, 본 논문의 연구주

제가 전이확률밀도의 정규분포로의 근사성을 따지는 것과 관계가 있으므로 Z_Δ 로 변환하여 보는 것이 그 근사성을 판단하는데 더 유리하기 때문이다.

3. 누울생성함수의 근사와 가우도

Ait-Sahalia(2002)와 Ait-Sahalia and Yu(2006)에서 적용한 동일한 절차에 따라 Z_Δ 에 대한 적률생성함수 $\varphi_Z(\Delta, s) = E[\exp\{sz(Y_\Delta)\} | Y_0 = y_0]$ 를 Itô-Taylor 확장법으로 근사하고, 이를 logarithm 확장법에 따라 다시 전개하여, 누울생성함수 $K(\Delta, s) = \log \varphi_Z(\Delta, s)$ 에 대한 확장전개를 구하면 다음과 같다. 전개과정은 Lee et al.(2012)에서 제시한 확산 모형의 전이확률밀도 함수에 대한 적률함수의 확장법에 일반적인 로그확장법(logarithm expansion)을 적용하여 쉽게 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 K(\Delta, s) &= \frac{1}{2}s^2 + \left\{a_0 + \frac{1}{2!}(a_0 a_0' + \frac{1}{2} a_0''_0)\Delta\right\} \Delta^{1/2} s \quad (3.1) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left\{a_0' + \frac{2}{3} \left((a_0')^2 + a_0 a_0''_0 + \frac{1}{2} a_0'''_0\right)\Delta\right\} \Delta s^2 \\
 &+ \frac{1}{3!} a_0''_0 \Delta^{3/2} s^3 + \frac{1}{4!} a_0'''_0 \Delta^2 s^4 + \dots
 \end{aligned}$$

여기서 a_0, a_0', a_0'' 등은 각각 $a(y_0), a'(y_0), a''(y_0)$ 등을 의미한다. 위의 식 (3.1)은 Ait-Sahalia and Yu(2006, p5.22)에서 제시된 근사식 $K^{(2)}(\Delta, u|x)$ 와 일치한다. 다만 본 논문에서는 Y_t 가 단위확산과정이 되도록 하였으므로, Ait-Sahalia and Yu(2006)가 제시한 근사식에서 $\sigma(x)$ 에 관련된 항들이 사라진 것이다. 또한 본 논문에서 사용된 변수 s 와 Ait-Sahalia and Yu(2006)에서 사용된 변수 u 사이에 $s = \Delta u$ 인 관계가 있으므로, 위의 식 (3.1)에 나타난 $O(s^3 \Delta^{3/2}), O(s^2 \Delta^2), O(s^4 \Delta^2)$ 항들이 Ait-Sahalia and Yu(2006)에서는 오차항 $O(\Delta^3)$ 에 포함되어 나타나지 않은 것이다. 위 식 (3.1)에서 s 의 4차항까지 전개한 이유는 Easton and Ronchetti(1986)의 연구 등에서도 같이 누울생성함수(cumulant generating function)의 근사적 전개가 필요한 경우 보통 4차

함수까지 전개하는 경우가 자주 사용되어 왔고, Itô-Taylor 확장법을 적용하는 경우에 있어서 보통 Δ^2 항까지의 전개만으로도 현실적으로 필요한 범위에서 충분한 정확성을 확보할 수 있다고 보았기 때문이다.

앞서 전개된 안장점근사 식 (2.6)에서 $C_i(\hat{\tau})$, $i = 3, 4, \dots$ 들로 이루어진 무한급수의 유한항을 선택하는 과정은 $C_i(\hat{\tau})$ 들이 갖는 Δ 에 대한 근사정확성에 따라 달라진다. 누울생성함수 $K(\Delta, s)$ 의 Δ 에 대한 전개식 (3.1)을 고려하여 살펴보면 $C_i(s)$, $i = 3, 4, \dots$ 들은 $O(\Delta^{i/2})$ 인 차수를 갖는다. 그러므로 $C_4(s) = O(\Delta^2)$ 이고, $C_3(s)$ 과 $C_6(s)$ 는 $O(\Delta^3)$ 이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f(z) = e^{K(\hat{s}) - \hat{s}z} \{2\pi K''(\hat{s})\}^{-1/2} (1 + O(\Delta^2))$$

여기서 C_i 항들을 선택하는 방법과 근사 정도의 평가가 Ait-Sahalia and Yu(2006)와 차이를 보이는 이유는 Ait-Sahalia and Yu(2006)의 경우 X_Δ 가 갖는 분포를 대상으로 한 것인데 반하여 본 논문에서는 Z_Δ 가 갖는 분포를 대상으로 한 것이라는 점이 있고, 또한 본 논문에서 사용한 변수 s 와 Ait-Sahalia and Yu(2006)에서 사용한 변수 u 사이에 $s = \Delta^{1/2}u$ 인 관계가 있기 때문이다.

이상에서는 안장점근사를 통하여 누울생성함수를 확장하고 전이확률밀도를 근사하는 과정에 대하여 살펴보았다. 이후에서는 전이확률밀도의 전체적인 형태를 잘 근사한다는 관점을 떠나서, 2차 이하의 누울(마찬가지로 적률)을 보존하면서, 전이확률밀도를 정규분포의 형태로 근사하여 가우도를 설정하기 위한 방법을 살펴본다. 누울생성함수 $K(\Delta, s)$ 에 대한 근사식을 $K_{d,k}(\Delta, s)$ 형태로 $\Delta^{1/2}$ 변수에 대한 차수 d 와 s 변수에 대한 차수 k 를 명시하기로 하자. 예를 들어 $K_{3,2}(\Delta, s)$ 은 s 에 대한 2차 함수가 되면서 Δ 에 대한 차수로 $O(\Delta^{3/2})$ 이하인 항들을 모아 다음과 같이 구성한 누울생성함수가 된다.

$$K_{3,2}(\Delta, s) = \frac{1}{2}s^2 + \left\{ a_0 + \frac{1}{2!}(a_0 a'_0 + \frac{1}{2} a''_0) \Delta \right\} \Delta^{1/2} s + \frac{1}{2!} a'_0 \Delta s^2$$

일반적으로 누울생성함수에 대한 근사식 $K_{d,k}(\Delta, s)$ 는 다음과 같다.

$$K_{d,k}(\Delta, s) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \eta_i^d s^i = \frac{1}{2}s^2 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \xi_i^d (\Delta^{1/2} s)^i$$

여기서 η_i^d 는 전이확률밀도 $q_Z^\Delta(y_0, z(y))$ 의 i 차 누울 η_i 를 $O(\Delta^{d/2})$ 항까지를 포함하여 전개한 것이고, 누울생성함수 확장식의 특성을 살펴보기 위하여 도입된 ξ_i^d 들은 $\xi_1^d = \Delta^{-1/2} \eta_1^d$, $\xi_2^d = \Delta^{-i/2} \eta_2^d$, $i = 3, 4, \dots$ 이고, $\xi_2^d = \Delta^{-1}(\eta_2^{d-1})$ 이다. 구체적으로 $d=4$ 이하인 경우는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_1^3 &= \left\{ a_0 + \frac{1}{2!} \left(a_0 a'_0 + \frac{1}{2} a''_0 \right) \Delta \right\} \\ \xi_2^4 &= \left\{ a'_0 + \frac{2}{3} \left((a'_0)^2 + a_0 a''_0 + \frac{1}{2} a'''_0 \right) \Delta \right\} \\ \xi_3^3 &= a_0'' \\ \xi_4^4 &= a_0''' \end{aligned}$$

각각의 ξ_i^d 들에 있어서 Δ 항이 $\Delta^{d/2}$ 인 형태가 아니고 Δ^d 인 형태로 개입되기 때문에, i 가 홀수인 경우는 $\xi_i^d = \xi_i^d$ 이고, i 가 짝수인 경우는 $\xi_i^d = \xi_i^d$ 와 같다. ξ_3^3 과 ξ_4^4 를 $O(\Delta)$ 항을 추가하여 확장하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_3^5 &= \left\{ a_0'' + \frac{3}{4} \left(3a'_0 a''_0 + a_0 a'''_0 + \frac{1}{2} a_0^{(4)} \right) \Delta \right\} \\ \xi_4^6 &= \left\{ a'''_0 + \frac{4}{5} \left(15a_0^4 a'_0 + \frac{15}{2} a_0^3 a''_0 + 3(a_0'')^2 \right) \Delta \right. \\ &\quad \left. + 4a'_0 a_0^{(3)} + a_0 a_0^{(4)} + \frac{1}{2} a_0^{(5)} \right\} \end{aligned}$$

관측시간간격 Δ 가 매우 짧아진다면, 즉 $\Delta \rightarrow 0$ 이면, $\xi_i^d \rightarrow a_0^{(i-1)}$ 이므로, 이로부터 단순하게 ξ_i^d 대신에 $\xi_i^0 = a_0^{(i-1)}$ 을 사용하여 누울생성함수 $K(\Delta, s)$ 에 대한 근사식으로 다음과 같은 $K_{0,\infty}(\Delta, s)$ 가 구성된다.

$$K_{0,\infty}(\Delta, s) = \frac{1}{2}s^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} a_0^{(i-1)} (\Delta^{1/2} s)^i$$

즉, 이는 Z_Δ 에 대한 i -차 누울을 $\Delta^{i/2} a_0^{(i-1)}$ 로 근사

하는 경우에 해당된다.

정규분포에 대한 누울생성함수는 s 에 대한 2차 함수이므로, 본 연구의 주 관심사항은 $k=2$ 인 경우, 즉 $K_{d,2}(\Delta, s)$ 인 경우들이다. 누울생성함수에서 s 에 대한 1차항의 계수는 근사된 전이확률밀도의 평균을 의미하고 2차항의 계수는 분산의 1/2을 의미하므로, 전이확률밀도를 정규분포로 근사하게 되는 $K_{d,2}(\Delta, s)$, $d=1, 2, 3, 4$ 각각은 $Y_\Delta = y_0 + \sqrt{\Delta}Z_\Delta$ 에 대한 분포를 평균 $m(\Delta) = m(\Delta, y_0)$ 이고 분산이 $s^2(\Delta) = s^2(\Delta, y_0)$ 인 정규분포로 근사하겠다는 의미이다. 즉,

$$Y_\Delta \sim N(m(\Delta), s^2(\Delta))$$

이다. 여기서 평균과 $m(\Delta)$ 와 분산 $s^2(\Delta)$ 각 경우로 다음과 같이 정의된 $m_d(\Delta)$, $d=1, 2, 3$ 와 분산 $s_d^2(\Delta)$, $d=1, 2, 3$ 을 고려하기로 하자.

$$\begin{aligned} m_1(\Delta) &= y_0 + a_0\Delta, \\ m_2(\Delta) &= y_0 + a_0\Delta + \frac{1}{2!}a_0a'_0\Delta^2, \\ m_3(\Delta) &= y_0 + a_0\Delta + \frac{1}{2!}(a_0a'_0 + \frac{1}{2}a''_0)\Delta^2 \\ s_1^2(\Delta) &= \Delta, \\ s_2^2(\Delta) &= \Delta + a'_0\Delta^2, \\ s_3^2(\Delta) &= \Delta + a'_0\Delta^2 + \frac{2}{3}\left((a'_0)^2 + a_0a''_0 + \frac{1}{2}a'''_0\right)\Delta^3. \end{aligned}$$

누울생성함수 $K_{1,2}(\Delta, s)$ 는 평균이 $a_0\Delta^{1/2}$ 이고 분산이 1인 정규분포를 Z_Δ 에 대한 분포로 고려하겠다는 의미이므로, Y_Δ 에 대한 분포는 평균이 $y_0 + a_0\Delta$ 이고 분산이 Δ 인 정규분포에 대응된다. 즉 $m(\Delta) = m_1(\Delta)$ 이고 $s^2(\Delta) = s_1^2(\Delta)$ 인 경우로 결국 오일러근사법을 적용하는 경우와 같다. 위에서 정의된 $m_2(\Delta)$ 는 $K_{3,2}(\Delta, s)$ 에서 $\Delta^{3/2}s$ 항의 계수 중 일부분만을 포함하도록 만든 경우로, 다음에서 설명할 NLL 추정방법의 설명을 위하여 도입한 것이다.

Shoji and Ozaki(1998)가 제안한 NLL 추정방법은 Hurn et al.(2007)의 비교 시험 연구에서 그 단순성에 비하여 예상과 달리 좋은 성질을 보여주고 있다. NLL 추정방법은 확산모형 식 (2.1)에 대한

전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 를 구하기 위하여 확산모형의 추계수를,

$$a(Y_t) \approx a_0 + a'_0(Y_t - y_0) + \frac{1}{2}a''_0t \tag{3.2}$$

라고 근사하여 그 전이확률밀도를 구한 것이다. 이때 $a'_0 \neq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} \Delta_1(a'_0) &= (e^{a'_0\Delta} - 1)/a'_0 \\ \Delta_2^2(a'_0) &= 2(e^{a'_0\Delta} - 1 - a'_0\Delta)/(a'_0)^2 \end{aligned}$$

라 하고, $a'_0 = 0$ 일 때는 $\Delta_1(a'_0) = \Delta$ 이고 $\Delta_2^2(a'_0) = \Delta^2$ 이라 정의하면, OU 모형 $dY_t = \alpha(\beta - Y_t)dt + dW_t$ 의 경우 Y_Δ 의 분포가 평균이 $y_0 + a_0\Delta_1(a'_0)$ 이고 분산이 $\Delta_1(2a'_0)$ 인 정규분포가 된다. 이를 이용하여 NLL 방법에서는 일반적인 확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 를 평균 $m_L(\Delta)$ 과 분산 $s_L^2(\Delta)$ 가 각각

$$\begin{aligned} m_L(\Delta) &= y_0 + a_0\Delta_1(a'_0) + \frac{1}{4}a_0''\Delta_2^2(a'_0), \\ s_L^2(\Delta) &= \Delta_1(2a'_0) \end{aligned}$$

와 같이 정의되는 정규분포로 근사한다. 결국 Shoji and Ozaki(1998)가 제안한 NLL 추정방법은 전이확률밀도의 평균과 분산을 $m_2(\Delta)$ 와 $s_2^2(\Delta)$ 로 근사하는 대신에, $\Delta^{k/2}$, $k=3, 4, \dots$ 이후 항들에 대하여 a'_0 가 미치는 영향을 고려하여 Δ 를 $\Delta_1(a'_0)$ 나 $\Delta_2^2(a'_0)$, $\Delta_1(2a'_0)$ 으로 변형하여 적절히 대입하는 방법으로 $m_L(\Delta)$ 와 $s_L^2(\Delta)$ 을 이용하여 전이확률밀도를 근사하겠다는 의미이다.

마찬가지 방법을 적용하여 $s_3^2(\Delta)$ 를 변형하면, 다음에서 정의하는 $s_A^2(\Delta)$ 나 $s_B^2(\Delta)$ 과 같은 대안을 고려할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_A^2(\Delta) &= \Delta_1(2a'_0) \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{3}\left(a_0a''_0 + \frac{1}{2}a'''_0\right)\Delta_2^2(2a'_0) \right\}, \\ s_B^2(\Delta) &= \Delta_1(2a'_0) \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{3}\left(a_0a''_0 + \frac{1}{2}a'''_0\right)\Delta_2^2(2a'_0) \right\}. \end{aligned}$$

정규분포형태의 가우도를 설정하는 방법은 그 평균과 분산(동일한 의미로 표준편차)를 설정하는 방법에 따라 달라진다. 가우도를 잡는 여러 가지 방법에

그 평균으로 $m_i(\Delta)$ 를 사용하고 분산으로 $s_i^2(\Delta)$ 을 사용하는 경우를 P[i, j]와 같은 방법으로 나타내기로 하면, P[1, 1]은 오일러근사법과 같은 의미가 된다. 이후에서는 확산과정 Y_t 의 전이확률밀도를 정규분포로 근사하여 가우도를 설정할 때, 그 평균 $m(\Delta) = m(\Delta, y_0)$ 와 표준편차 $s(\Delta) = s(\Delta, y_0)$ 를 잡는 방법으로 다음과 같은 방법을 주로 고려한다.

$$\begin{aligned} Euler & : m(\Delta) = m_1(\Delta), \quad s^2(\Delta) = s_1^2(\Delta), \\ P[3, 3] & : m(\Delta) = m_3(\Delta), \quad s^2(\Delta) = s_3^2(\Delta), \\ NLL & : m(\Delta) = m_L(\Delta), \quad s^2(\Delta) = s_L^2(\Delta), \\ P[L, A] & : m(\Delta) = m_L(\Delta), \quad s^2(\Delta) = s_A^2(\Delta), \\ P[L, B] & : m(\Delta) = m_L(\Delta), \quad s^2(\Delta) = s_B^2(\Delta). \end{aligned}$$

이 이외의 다양한 가우도들, 예를 들면 P[1, 2] 혹은 P[2, 3] 등등의 가우도도 고려하는 것이 가능하기는 하나, 사전 모의실험 연구에서 다른 방법들에 비하여 큰 장점이 없었으므로 이들에 대하여는 굳이 고려하지 않기로 한다. 특히 P[2, 2]의 경우는 그 정의형태만으로도 NLL방법에 비하여 장점을 가질 수 없는 형태라는 것을 쉽게 알 수 있다.

4. 확산모형에 대한 가우도와 최대 가우도추정량

단위확산과정 Y_t 에 대한 전이확률밀도 $q^\Delta(y_0, y)$ 를 정규분포로 $N(m(\Delta, y_0), s^2(\Delta, y_0))$ 로 근사하게 되면, 확산과정 X_t 에 대한 전이확률밀도 $p^\Delta(x_0, x)$ 는 식 (2.3)으로부터 다음과 같이 정의되는 $\tilde{p}^\Delta(x_0, x)$ 로 근사된다.

$$\tilde{p}^\Delta(x_0, x) = \frac{1}{\sigma(x)s(\Delta, y_0)} \phi\left(\frac{y - m(\Delta, y_0)}{s(\Delta, y_0)}\right)$$

여기서 $y = h(x)$ 이고 $y_0 = h(x_0)$ 이다. 따라서 확산과정 X_t 에 대하여 매 Δ 시간 간격으로 관측하여 얻은 관측치 $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 가 있고, 이에 대하여 추계수가 $\mu(\theta, x)$ 이고 확산계수가 $\sigma(\theta, x)$ 인 확산모형의 모수 θ 를 추정하고자 하는 경우 다음과 같이 평균이 $m(\theta, \Delta, y_0)$ 분산이 $s^2(\theta, \Delta, y_0)$ 인 정규분포의 경우로부터 얻게 되는 로그가우도 $l(\theta) = l(\theta, \Delta, \mathbf{x})$ 를

최대로 하는 값 $\hat{\theta}$ 를 θ 에 대한 추정치로 잡는다.

$$l(\theta, \Delta, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{y_i - y_{i-1} - u(\theta, y_{i-1})}{s(\theta, \Delta, y_{i-1})} \right)^2 + \log\{2\pi s^2(\theta, \Delta, y_{i-1}) \sigma^2(\theta, x_i)\} \right\} \quad (4.1)$$

여기서 $y_i = h(\theta, x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots$ 이고 $u(\theta, y_{i-1}) = m(\theta, \Delta, y_{i-1}) - y_{i-1}$ 이다. 이때 Lamperti 변환 $h(x)$ 가 확산계수 $\sigma(\theta, x)$ 의 부정적분으로 표현되어 역시 θ 의 함수가 되므로 이를 명시적으로 나타내기 위하여 $h(\theta, x)$ 라고 표현하였다. 결국 확산계수 $\sigma(\theta, x)$ 에 추정모수가 개입된 경우 y_i , $i=0, 1, \dots, n$ 또한 θ 의 함수로 표현된다. 즉, $y_i = y_i(\theta)$ 이다. 여기서 $u(\theta, y_{i-1})$ 와 $s(\theta, \Delta, y_{i-1})$ 은 $a^{(k)}(\theta, y)$ 와 y_{i-1} 그리고 Δ 의 함수이다. 또한 식 (2.2)와 같이 $a(\theta, y)$ 는 $\mu(\theta, x)$ 와 $\sigma(\theta, x)$ 의 함수이다. 구체적으로

$$\begin{aligned} a(y) & = \left[(\mu/\sigma) - \frac{1}{2}\sigma' \right](\theta, x) \\ a'(y) & = \left[\mu' - \sigma'(\mu/\sigma) - \frac{1}{2}\sigma\sigma'' \right](\theta, x) \\ a''(y) & = \left[\sigma\mu'' - \mu'\sigma' + \{(\sigma')^2 - \sigma\sigma''\}(\mu/\sigma) - \frac{1}{2}\sigma\sigma'\sigma'' - \frac{1}{2}\sigma^2\sigma^{(3)} \right](\theta, x) \end{aligned}$$

이다. 결국 $u(\theta, y_{i-1})$ 와 $s(\theta, \Delta, y_{i-1})$ 는 x_{i-1} , μ , σ 의 식으로 표현된다. 즉, $u(\theta, y_{i-1}) = \tilde{u}(\theta, x_{i-1})$ 이고 $s(\theta, \Delta, y_{i-1}) = \tilde{s}(\theta, \Delta, x_{i-1})$ 이다. 이로부터 위 식 (4.1)의 형태로 정의되는 가우도를 최대화하는 추정량 $\hat{\theta}$ 를 얻기 위하여, 우도함수 식 (4.1)을 다음과 같이 두 개로 분리한다.

$$l^+(\theta, \Delta, \theta^{(0)}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{y_i(\theta^{(0)}) - y_{i-1}(\theta^{(0)}) - \tilde{u}(\theta, x_{i-1})}{\tilde{s}(\theta, \Delta, x_{i-1})} \right)^2 + \log\{2\pi(\tilde{s}(\theta, \Delta, x_{i-1}))^2\} \right\}$$

$$l^*(\theta, \Delta, \theta^{(0)}, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{\tilde{s}(\theta^{(0)}, \Delta, x_{i-1})} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\sigma(\theta, u)} du - \tilde{u}(\theta^{(0)}, x_{i-1}) \right) \right)^2 + \log\{2\pi\sigma^2(\theta, x_i)\} \right\}$$

여기서 $\theta^{(0)}$ 는 모수 θ 의 한 값으로 그 값이 알려져 있는 경우라고 하자. 결국 로그우도함수 $l^+(\theta) = l^+(\theta, \Delta, \theta^{(0)}, \mathbf{x})$ 는 y_i 값들이 주어졌을 때 θ 를 추정하기 위한 우도함수이고, $l^*(\theta) = l^*(\theta, \Delta, \theta^{(0)}, \mathbf{x})$ 는 $\tilde{s}(\theta) = \tilde{s}(\theta^{(0)}, \Delta, x_{i-1})$ 와 $\tilde{u}(\theta) = \tilde{u}(\theta^{(0)}, \Delta, x_{i-1})$ 가 주어졌을 때, $\sigma(\theta, x_i)$ 와 $y_i(\theta)$ 를 통해서 개입되는 모수 θ 를 추정하기 위한 식이다. 결국 모수 θ 는 다음과 같은 방법으로 추정된다.

- (1) 먼저 모수 θ 에 대한 초기값 θ_0 를 잡고 이를 $\theta^{(i)}$ 라 한다.
- (2) 위의 $l^+(\theta)$ 를 최대화하는 값 θ^+ 를 구한다.
- (3) $\theta^{(i)} = \theta^+$ 라 하고 $l^*(\theta)$ 를 최대화하는 값 θ^{**} 를 구한다.
- (4) $\theta^{(i+1)} = \theta^{**}$ 라 한다.
- (5) 수렴조건에 이를 때까지, i 를 증가시키면서, 위의 (2)-(4)를 반복한다.

위의 과정에서 $l^+(\theta)$ 와 $l^*(\theta)$ 를 최대화하는 과정에 Fisher's scoring 방법을 적용하면 다음과 같다.

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + I(\theta^{(i)})\dot{l}^{+*}(\theta^{(i)})$$

위에서 $\dot{l}^{+*}(\theta)$ 는 위의 반복과정에서 (2)의 경우에는 $\dot{l}^+(\theta)$ 이고, (3)의 경우에는 $\dot{l}^*(\theta)$ 이다. 또 $\dot{l}^{+*}(\theta) = (\partial/\partial\theta)\dot{l}^{+*}(\theta, \Delta, \mathbf{x})$ 이고 $I(\theta) = \{E[\dot{l}^{+*}(\theta)(\dot{l}^{+*}(\theta))^T]\}^{-1}$ 이다. 여기서

$$z_i = z_i(\theta_1, \theta_2) = \frac{y_i(\theta_1) - y_{i-1}(\theta_1) - \tilde{u}(\theta_2, \Delta, x_{i-1})}{\tilde{s}(\theta_2, \Delta, x_{i-1})}$$

이고 $\dot{d}_i(\theta) = \{(\partial/\partial\theta)\tilde{s}(\theta, \Delta, x_{i-1})\}[\tilde{s}(\theta, \Delta, x_{i-1})]^{-1}$ 이고 $\dot{v}_i(\theta) = \dot{\sigma}(\theta, x_i)[\sigma(\theta, x_i)]^{-1}$ 이라 하자, 또 $\dot{z}_i(\theta_1, \theta) = (\partial/\partial\theta)z_i(\theta_1, \theta)$ 이고 $\dot{z}_i(\theta, \theta_2) = (\partial/\partial\theta)z_i(\theta, \theta_2)$ 라 하자. 그러면

$$\dot{l}^+(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_i(\theta_1, \theta)\dot{z}_i(\theta_1, \theta) + \dot{d}_i(\theta)\}$$

이고

$$\dot{l}^*(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{z_i(\theta, \theta_2)\dot{z}_i(\theta, \theta_2) + \dot{v}_i(\theta)\}$$

이다. 또

$$g(\theta, x_i, x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\sigma(\theta, u)} \left(\frac{\dot{\sigma}(\theta, u)}{\sigma(\theta, u)} - 1 \right) du$$

라 하면,

$$\dot{z}_i(\theta_1, \theta) = -\frac{\dot{u}(\theta, \Delta, x_{i-1})}{\tilde{s}(\theta, \Delta, x_{i-1})} - z_i(\theta_1, \theta)\dot{d}_i(\theta)$$

$$\dot{z}_i(\theta, \theta_2) = z_i(\theta, \theta_2) + \frac{\dot{g}(\theta, x_i, x_{i-1})}{\tilde{s}(\theta_2, \Delta, x_{i-1})}$$

이고,

$$E[\dot{l}^+(\theta)(\dot{l}^+(\theta))^T] \approx \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{u}\dot{u}^T + 2\dot{u}\dot{s}^T}{(\tilde{s})^2} \right) (\theta, \Delta, x_{i-1}),$$

$$E[\dot{l}^*(\theta)(\dot{l}^*(\theta))^T] \approx$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{\dot{g}(\theta, x_i, x_{i-1})(\dot{g}(\theta, x_i, x_{i-1}))^T}{(\tilde{s}(\theta_2, \Delta, x_{i-1}))^2} + (1 - \dot{v}_i(\theta))(1 + \dot{v}_i(\theta))^T \right)$$

이다.

위에서 구한 일반적인 확산모형에 대하여 가우도를 설정하는 방법과 이로부터 가우도 추정량을 효율적으로 찾기 위한 수치적 방법을 OU 모형, CIR 모형, CKLS 모형들의 경우에 적용하기 위하여 각 모형들에 대하여 $a(y)$, $a'(y)$, $a''(y)$ 가 각각 어떻게 되는 지 살펴보면 다음과 같다. OU 모형에서는, $\mu(\theta, x) = \alpha(\beta - x)$ 이고 $\sigma(\theta, x) = \sigma$ 이므로, $a(y) = (\alpha/\sigma)(\beta - x)$, $a'(y) = -\alpha$ 이고 $a''(y) = 0$ 이다. CIR 모형에서는, $\mu(\theta, x) = \alpha(\beta - x)$ 이고 $\sigma(\theta, x) = \sigma x^{1/2}$ 이므로,

$$a(y) = (\alpha/\sigma)(\beta - x)x^{-1/2} - \frac{1}{4}\sigma x^{-1/2},$$

$$a'(y) = -\frac{1}{2}\alpha + (\alpha\beta - \frac{1}{4}\sigma^2)x^{-1},$$

$$a''(y) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha\beta - \frac{1}{4}\sigma^2)x^{-3/2},$$

$$a'''(y) = -\frac{3}{4}\sigma^2(\alpha\beta - \frac{1}{4}\sigma^2)x^{-2}$$

이고, CKLS 모형에서는, $\mu(\theta, x) = \alpha(\beta - x)$ 이고 $\sigma(\theta, x) = \sigma x^\gamma$ 이므로,

$$\begin{aligned}
 a(y) &= (\alpha/\sigma)(\beta-x)x^{-\gamma} - \frac{1}{2}\sigma\gamma x^{\gamma-1}, \\
 a'(y) &= \alpha(\gamma-1) - \alpha\beta\gamma x^{-1} - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma-1)x^{2\gamma-2}, \\
 a''(y) &= \sigma\alpha\beta\gamma x^{\gamma-2} - \sigma^3\gamma(\gamma-1)^2x^{3\gamma-3}, \\
 a'''(y) &= \sigma^2\alpha\beta\gamma(\gamma-2)x^{2\gamma-3} - 3\sigma^4\gamma(\gamma-1)^3x^{4\gamma-4}
 \end{aligned}$$

이다.

5. 추정량들의 비교

앞 절에서 제시된 다섯 개의 추정량 Euler, P[3, 3], NLL, P[L, A], P[L, B]들의 성질을 비교하기 위하여, OU 모형, CIR 모형, CKLS 모형들에 대한 모의실험 연구를 수행한다. 특히 OU 모형에 대하여는 NLL이 최대우도추정량과 동일한 것이 알려져 있고, OU 모형의 경우 $a_0'' = a_0''' = 0$ 이므로 당연히 P[L, A]와 P[L, B]도 최대우도추정량과 일치하는 결과를 주게 된다. 특히 CIR 모형의 경우에 있어서 전이확률밀도함수는 비중심카이제곱분포(non-central chi-square distribution)의 형태로 표현이 되어 정확한 최대우도추정량을 구하는 것이 가능하다. CIR 모형의 경우는 Euler, P[3, 3], NLL, P[L, A], P[L, B]를 이용한 추정방법들과 최대우도추정방법을 직접적으로 비교하여 각각의 근사적 추정방법에 의하여 얻은 추정량들의 정확성을 최대우도추

정량과 직접 비교하는 것이 가능하다. CIR 모형에서 구해지는 정확한 최대우도(exact likelihood) 추정법은 XLE이라고 약칭하여 부르기로 한다. CKLS 모형의 경우에 대하여는 정확한 전이확률밀도함수의 형태가 알려져 있지 않으나, Lee et al.(2012)이 제시한 델타확장법을 이용하여 매우 정확한 정도로 전이확률밀도함수를 근사하는 방법이 알려져 있다.

모의실험에서 OU 모형에 대하여는 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ 가 (0.5, 2, 1)인 경우를 시험하였고, CIR 모형에 대하여는 $\theta = (2, 1, 1)$ 인 경우, CKLS 모형에 대하여는 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \gamma)$ 가 (2, 1, 1, 0.5)인 경우를 시험하였다. 보통 이자율 모형화 등에서 고려되는 모수는 매우 작은 값을 갖게 되는데, 이런 값들은 모의실험 결과 방법론들의 차이를 식별하기 어려운 점이 있어서, 본 연구에서는 모의실험 결과에서 차이의 비교가 쉬운 모수 값들을 선택하였다. CIR 모형의 경우 정의되는 확산과정이 유방성(Ergodic)을 만족하기 위해서는 $2\alpha\beta > \sigma^2$ 이어야 한다. $\gamma = 1/2$ 인 CKLS 모형의 경우 만약 γ 가 0.5임을 알고 있다고 가정한다면, 그 정확한 최대우도추정량은 CIR 모형에서와 같은 방법으로 구하는 것이 가능하므로 이런 가정을 통하여 구한 정확한 최대우도추정량(XLE*라 표시함)과 다른 추정법을 통하여 얻어진 추정량들을 비교하여 추정법들의 성능을 평가할 수 있다.

<표 1> OU 모형에 대한 시뮬레이션 결과(Mean, RMSE, RMSD)

표본의 크기 n 은 100과 400, 관측시간 간격 Δ 는 1/12과 1/4. $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ 의 참값은 (0.5, 2, 1).

Δ	n	Estimator	Mean			RMSE			RMSD		
			α	β	σ	α	β	σ	α	β	σ
1/12	100	Euler	1.075	2.054	0.963	0.829	0.579	0.079	0.112	0.000	0.054
		P[3, 3]	1.150	2.054	1.009	0.947	0.579	0.075	0.013	0.000	0.001
		P[L, A]	1.145	2.054	1.009	0.937	0.579	0.076			
	400	Euler	0.618	1.984	0.976	0.240	0.349	0.043	0.023	0.001	0.028
		P[3, 3]	0.637	1.984	1.002	0.261	0.349	0.037	0.001	0.001	0.000
		P[L, A]	0.636	1.984	1.002	0.261	0.349	0.037			
1/4	100	Euler	0.619	2.004	0.925	0.270	0.382	0.100	0.086	0.000	0.087
		P[3, 3]	0.690	2.004	1.004	0.362	0.382	0.076	0.015	0.000	0.002
		P[L, A]	0.683	2.004	1.005	0.349	0.382	0.076			
	400	Euler	0.504	1.998	0.938	0.100	0.202	0.070	0.040	0.000	0.066
		P[3, 3]	0.543	1.998	1.002	0.125	0.202	0.038	0.003	0.000	0.000
		P[L, A]	0.541	1.998	1.002	0.123	0.202	0.038			

<표 2> CIR 모형에 대한 시뮬레이션 결과(Mean, RMSE, RMSD)

표본의 크기 n 은 100과 400, 관측시간 간격 Δ 는 1/12과 1/4. $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$ 의 참값은 (2, 1, 1).

Δ	n	Estimator	Mean			RMSE			RMSD		
			α	β	σ	α	β	σ	α	β	σ
1/12	100	Euler	2.337	0.994	0.923	0.883	0.177	0.104	0.422	0.005	0.100
		P[3,3]	2.585	0.993	1.008	1.150	0.177	0.077	0.221	0.013	0.011
		NLL	2.621	0.993	1.013	1.186	0.177	0.080	0.062	0.002	0.002
		P[L,A]	2.622	0.993	1.014	1.188	0.177	0.081	0.059	0.002	0.002
		P[L,B]	2.606	0.992	1.013	1.172	0.177	0.080	0.070	0.003	0.002
	400	XLE	2.638	0.994	1.014	1.202	0.177	0.081			
		Euler	1.946	1.001	0.932	0.349	0.087	0.076	0.216	0.001	0.073
		P[3,3]	2.088	1.001	1.000	0.425	0.088	0.037	0.138	0.012	0.007
		NLL	2.118	1.000	1.003	0.413	0.087	0.038	0.030	0.001	0.001
		P[L,A]	2.121	1.000	1.003	0.415	0.087	0.038	0.025	0.001	0.001
1/4	100	P[L,B]	2.113	0.999	1.003	0.412	0.087	0.038	0.032	0.002	0.001
		XLE	2.132	1.001	1.003	0.420	0.087	0.038			
		Euler	1.699	1.000	0.818	0.460	0.105	0.195	0.630	0.002	0.209
		P[3,3]	1.829	1.080	1.063	0.391	0.148	0.143	0.718	0.117	0.118
		NLL	2.133	0.991	1.005	0.562	0.106	0.090	0.161	0.010	0.019
	400	P[L,A]	2.143	0.992	1.010	0.564	0.106	0.092	0.145	0.009	0.015
		P[L,B]	2.042	0.984	0.998	0.502	0.107	0.086	0.269	0.019	0.028
		XLE	2.244	1.000	1.016	0.644	0.105	0.097			
		Euler	1.606	0.999	0.825	0.432	0.051	0.178	0.480	0.000	0.184
		P[3,3]	1.840	1.115	1.124	0.314	0.137	0.141	0.428	0.128	0.131
1/4	400	NLL	1.969	0.991	0.997	0.262	0.052	0.045	0.112	0.009	0.013
		P[L,A]	1.980	0.992	1.001	0.261	0.052	0.045	0.098	0.008	0.009
		P[L,B]	1.894	0.984	0.990	0.276	0.054	0.045	0.199	0.016	0.023
		XLE	2.067	0.999	1.007	0.286	0.051	0.047			

<표 3> CKLS 모형에 대한 시뮬레이션 결과(Mean, RMSE, RMSD)

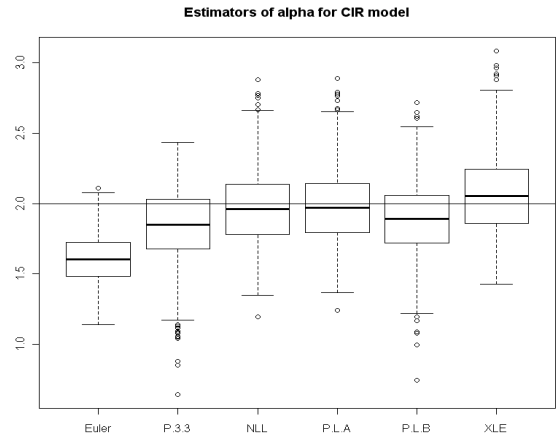
표본의 크기 n 은 100과 400, 관측시간 간격 Δ 는 1/12과 1/4. $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \gamma)$ 의 참값은 (2, 1, 1, 0.5).

Δ	n	Estimator	Mean				RMSE				RMSD			
			α	β	σ	γ	β	σ	α	γ	σ	α	β	γ
1/12	100	Euler	2.248	1.002	0.909	0.442	0.814	0.185	0.117	0.173	0.410	0.011	0.113	0.173
		P[3,3]	2.508	1.000	1.004	0.516	1.094	0.185	0.078	0.145	0.260	0.011	0.030	0.145
		NLL	2.524	1.001	1.006	0.508	1.099	0.184	0.080	0.139	0.210	0.010	0.028	0.139
		P[L,A]	2.520	1.001	1.008	0.510	1.096	0.184	0.081	0.140	0.210	0.010	0.028	0.140
		P[L,B]	2.503	1.000	1.007	0.512	1.079	0.185	0.081	0.141	0.214	0.011	0.028	0.141
	400	XLE*	2.544	1.001	1.009	0.500	1.100	0.183	0.077	0.000				
		Euler	1.955	1.000	0.924	0.441	0.350	0.088	0.085	0.094	0.215	0.002	0.084	0.094
		P[3,3]	2.112	0.998	1.002	0.508	0.428	0.089	0.039	0.071	0.127	0.011	0.011	0.071
		NLL	2.127	0.999	1.003	0.503	0.433	0.089	0.040	0.065	0.093	0.002	0.009	0.065
		P[L,A]	2.127	0.999	1.004	0.507	0.433	0.088	0.040	0.066	0.092	0.002	0.009	0.066
1/4	100	P[L,B]	2.114	0.998	1.004	0.509	0.427	0.089	0.040	0.066	0.095	0.003	0.009	0.066
		XLE*	2.144	0.999	1.004	0.500	0.428	0.088	0.039	0.000				
		Euler	1.678	0.999	0.788	0.348	0.484	0.105	0.223	0.228	0.632	0.005	0.238	0.228
		P[3,3]	1.787	1.075	1.037	0.540	0.469	0.167	0.131	0.168	0.727	0.134	0.110	0.168
		NLL	2.121	0.991	1.001	0.515	0.600	0.106	0.088	0.134	0.235	0.010	0.023	0.134
	400	P[L,A]	2.118	0.992	1.007	0.525	0.597	0.106	0.090	0.138	0.231	0.009	0.021	0.138
		P[L,B]	2.011	0.984	0.999	0.540	0.537	0.110	0.087	0.148	0.325	0.026	0.029	0.148
		XLE*	2.226	0.999	1.013	0.500	0.667	0.104	0.094	0.000				
		Euler	1.609	0.999	0.802	0.345	0.427	0.051	0.201	0.174	0.475	0.002	0.208	0.174
		P[3,3]	1.647	1.117	1.099	0.584	0.462	0.159	0.132	0.163	0.561	0.148	0.122	0.163
1/4	400	NLL	1.965	0.991	0.997	0.507	0.268	0.053	0.044	0.065	0.134	0.008	0.013	0.065
		P[L,A]	1.967	0.993	1.003	0.518	0.267	0.052	0.045	0.068	0.131	0.007	0.009	0.068
		P[L,B]	1.869	0.985	0.994	0.541	0.285	0.054	0.044	0.081	0.229	0.015	0.018	0.081
		XLE*	2.068	0.999	1.007	0.500	0.282	0.051	0.047	0.000				

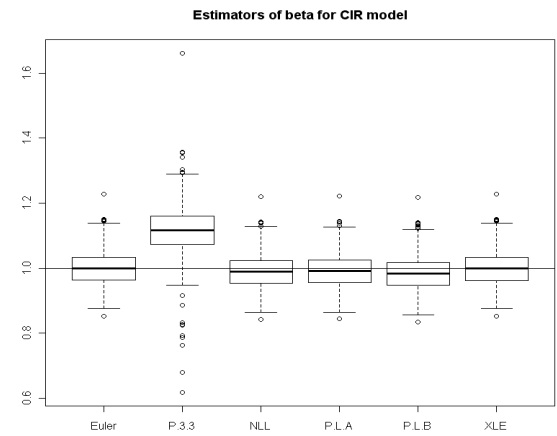
표본 생성을 위해서는 각 관측치들 사이의 시간 간격 혹은 Δ 를 1/4인 경우와 1/12인 경우를 상정하였고, 연속시간 확률과정을 모사하여 생성하기 위하여 Δ 시간간격을 Hurn et al.(2007)에서와 마찬가지로 방법으로 더욱 작은 시간단위로 분할하여 오일러근사법에 따라 확산과정을 생성하고 그 중에서 일정간격으로 표본의 관측값을 취하는 방법을 사용하였다. 본 연구의 모의실험에서는 시간단위를 100개의 작은 시간단위로 분할하여 관측값을 생성하였다. 또한 표본의 크기는 100인 경우와 400인 경우를 시험하였다.

<표 1>~<표 3>은 각각 OU 모형, CIR 모형, CKLS 모형 각 경우들에 대하여 1000회의 시뮬레이션 결과를 요약한 표들이다. 표에서 제시된 값은 각 모형에서 사용된 모수 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma)$, 혹은 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma, \gamma)$ 에 대한 추정량 $\hat{\theta}$ 의 시뮬레이션 평균값, 또 오차 제곱평균의 제곱근(Root Mean Square Error; RMSE), 즉 $(\hat{\theta} - \theta)^2$ 에 대한 시뮬레이션 평균의 제곱근, 그리고 차이제곱평균의 제곱근(Root Mean Square Difference; RMSD)이다. RMSD는 OU 모형과 CIR 모형의 경우는 정확한 최대우도추정방법(XLE)을 사용하여 얻은 추정량 $\hat{\theta}_{XLE}$ 와 각 추정방법에서 얻은 추정량 $\hat{\theta}$ 의 차이의 제곱($\hat{\theta}_{XLE} - \hat{\theta}$)²에 대하여 시뮬레이션 평균을 구하고 제곱근을 취한 값이다. CKLS 모형의 경우는 $\hat{\theta}_{XLE}$ 대신에, γ 의 참값이 0.5임을 알고 있다고 가정하고 얻어진 최대우도추정량 $\hat{\theta}_{XLE^*}$ 을 사용하여 계산한 값이다. CKLS 모형에 대한 XLE*를 구하는 과정에서 모수 γ 에 대한 참값을 아는 것으로 가정하고 추정량을 구한 것이므로 γ 에 대한 RMSE는 항상 0으로 나타난다.

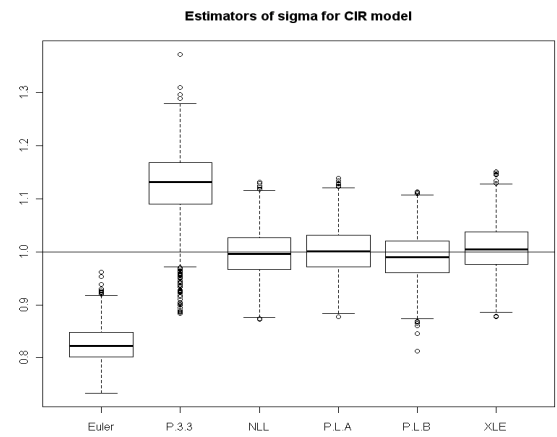
시뮬레이션 결과를 살펴보면 전반적으로 Euler 근사 추정법이나 P[3, 3] 추정법은 다른 방법들에 비하여 RMSE가 대체적으로 큰 값을 갖는다. 특히 확산계수에 관여되는 모수 σ 나 γ 의 추정에 있어서 Euler 근사 추정법이나 P[3, 3] 추정법은 다른 방법들에 비하여 더 큰 RMSE를 갖고 상대적으로 열등한 성질을 갖는 점이 확인된다. OU 모형, CIR 모형, CKLS 모형 각 모형들에 대하여, XLE 혹은 XLE*를 제외하고 전반적으로 가장 작은 RMSE를



[그림 1] 각 추정법들에 따르는 α 의 추정량에 대한 시뮬레이션 결과(CIR 모형, $\Delta=1/4$, 표본크기 400). 모수 α 의 실제 값은 2.0

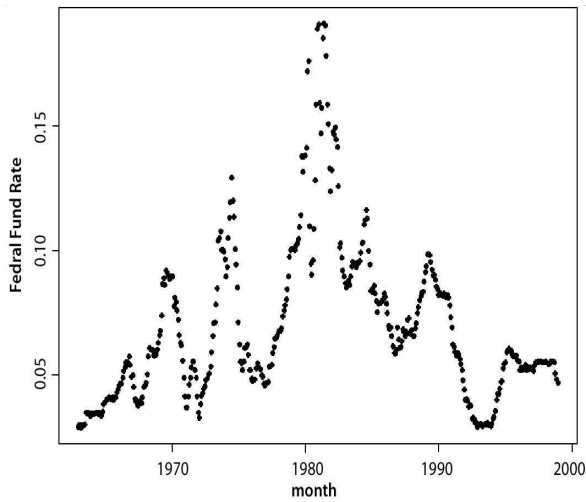


[그림 2] 각 추정법들에 따르는 β 의 추정량에 대한 시뮬레이션 결과(CIR 모형, $\Delta=1/4$, 표본크기 400). 모수 β 의 실제 값은 1.0



[그림 3] 각 추정법들에 따르는 σ 의 추정량에 대한 시뮬레이션 결과(CIR 모형, $\Delta=1/4$, 표본크기 400). 모수 σ 의 실제 값은 1.0

보이는 추정방법은 P[L, A] 추정방법이다. 특히 P[L, A] 추정법은 정확한 최대우도추정방법 XLE 혹은 가정된 최대우도추정방법 XLE*와 매우 근소한 차이를 보여주고 있고, RMSD도 다른 어떤 추정량보다 작다는 것을 알 수 있다. 이는 P[L, A] 추정법의 경우 정확한 최대우도추정법과 거의 차이가 없는 좋은 성질의 추정량을 제공한다는 것을 의미한다. 이와 같은 사실은 CIR 모형에서 표본의 크기가 400이고, 자료의 관측시간간격이 $\Delta=1/4$ 인 경우에 대하여 얻어진 각각의 추정량을 상자그림(box-plot)으로 비교한 [그림 1]~[그림 3]을 통하여 쉽게 확인이 가능하다. 그림들에서 상자그림들의 라벨로 사용된 P.3.3, P.L.A 혹은 P.L.B는 각각 P[3, 3], P[L, A], 또는 P[L, B]를 의미한다. 그림을 그리는데 사용한 소프트웨어인 R에서 상자그림의 라벨문자에 “[”와 “]”를 허용하지 않기 때문에 대체하여 표현한 것이다.



[그림 4] 미국연방금리 자료 (3개월 금리), 1963년 1월부터 1998년 12월까지)

<표 4> 미연방금리 자료에 CIR 모형을 적합했을 때, 각 추정법에 따른 추정결과

	α	β	σ
Euler	0.1455	0.0732	0.0652
p[3,3]	0.2193	0.0720	0.0667
NLL	0.2199	0.0720	0.0667
P[L,A]	0.2193	0.0720	0.0667
P[L,B]	0.2193	0.0720	0.0667
XLE	0.2189	0.0721	0.0666

[그림 4]는 1963년 1월부터 1998년 12월까지 월별로 기록된 미국연방금리(US federal fund rate)의 변동모습이다. <표 4>는 미국연방금리자료에 대하여 CIR 모형을 적합하는 경우에 각 추정방법에 따른 추정모수 값을 정리한 것이다. 이때 관측시간간격 Δ 는 1/12이라 하였다. 관측시간간격 Δ 의 단위는 임의로 결정할 수 있으나 최근의 연구들에서 관측시간의 단위를 1년으로 잡고, 월별 관측자료의 경우 $\Delta=1/12$ 분기별로 관측된 자료의 경우 $\Delta=1/4$ 이라고 설정하는 경우들이 많아 이에 따른 것이다. CIR 모형을 선택한 이유는 모형의 단순성, 범용성과 적합성이 높을 뿐만 아니라, 특히 CIR 모형의 경우 최대우도추정량을 구할 수 있다는 장점이 있어서 각 추정방법들을 최대우도추정량과 비교하기 용이하기 때문이다. 시험된 미국연방금리자료의 경우에 오일러근사법을 제외한 나머지 추정량은 거의 대체로 최대우도추정량과 비슷한 값을 주고 있다. β, σ 값들의 경우는 오일러근사법을 제외한 다른 가우도추정법의 결과와 NLL의 결과가 거의 차이가 없으나, α 값에 대한 추정에 있어서 P[3, 3], P[L, A], P[L, B] 추정방법들이 NLL 추정방법보다 최대우도추정량에 보다 가까운 값을 보이고 있다.

6. 결 론

확산모형은 연속시간 모형이다. 그에 반하여 확산모형의 추정을 위하여 사용될 자료는 일정간격을 두고 이산 시간적으로 얻어지는 자료이다. 그러므로 확산모형에 대하여 최대우도방법론을 적용시키기 위해서는, 이산적인 시간간격에 따라 확산과정의 확률적 성질의 변화를 설명하는 전이확률밀도를 구해야 한다. 전이확률밀도를 구하기 위한 여러 연구들이 진행되어 왔다. 그러나 이들 방법들은 상대적으로 많은 계산량이 필요하고 그 적용방법이 복잡하다. 최근까지 개발된 방법들 중에서 오일러근사법이나 NLL 추정방법만큼 단순하여 적용이 쉬우면서도 최대우도추정법에 버금갈 만큼의 좋은 통

계적 성질을 가진 추정방법은 제안되지 못하였다.

본 연구에서는 최근 Lee et al.(2012)이 제안한 전이확률밀도의 적률확장방법을 이용하여, 확산모형의 전이확률밀도를 그 평균과 분산만을 이용하여 근사하는 방법으로 가우도를 얻는 방법을 제안하고, 그 가우도를 최대화 하는 추정량의 사용을 제안하였다. 대안이 될 수 있는 몇 개의 가우도를 설정하였고 이들 추정량들의 성질을 기존에 제안된 다른 추정방법들과 비교하여 제안된 최대가우도추정량의 통계적성질이 우수함을 보였다. 특히 본 연구에서 제안된 가우도추정법 P[L, A]는 기존에 제안된 다른 근사적방법들에 비하여 성질이 우수하고 정확한 우도를 이용한 최대우도추정량과 매우 비슷하면서도, 오일러근사법이나 NLL 방법과 마찬가지로 상대적으로 단순한 절차에 따라 다양한 확산모형에 대하여 동일하게 적용할 수 있는 활용성이 높은 추정방법임을 확인하였다. 그에 더하여 P[L, A]를 따르는 가우도추정법은 그 수치적 성질도 우수하여 가우도의 최대화 과정에서도 안정적인 추정량을 제공하였다.

확산모형에 대하여 우도 혹은 가우도를 이용한 추론방법은 앞으로 확산모형에 대한 다양한 형태의 가설검정 방법론의 개발 등에 유용하게 사용될 것이고, 금융현상에 대한 다양한 가설을 검정하기 위한 현실적 방법론으로도 매우 중요한 역할을 하게 될 것이다.

참 고 문 헌

- [1] 이은경, 최영수, 이운동, “확산모형 전이확률밀도의 급수전개법과 그 계수”, 『응용통계연구』, 제 23권, 제2호(2010), pp.383-392.
- [2] Ait-Sahalia, Y., “Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions,” *Journal of Finance*, Vol.54(1999), pp.1361-1395.
- [3] Ait-Sahalia, Y., “Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions : A closed-form approximation approach,” *Econometrica*, Vol.70(2002), pp.223-262.
- [4] Ait-Sahalia, Y., “Closed-form Likelihood Expansions for Multivariate Diffusions,” *The Annals of Statistics*, Vol.36, No.2(2008), pp. 906-937.
- [5] Ait-Sahalia, Y. and J. Yu, “Saddlepoint approximations for continuous-Time Markov processes,” *Journal of Econometrics*, Vol. 134(2006), pp.507-551.
- [6] Barndorff-Nielsen, O.E. and D.R. Cox, *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman and Hall, New York, (1989).
- [7] Beskos, A., O. Papaspiliopoulos, G.O. Robert, and P. Fearnhead, “Exact and computationally efficient likelihood-based estimation for discretely observed diffusion processes,” *The Journal of the Royal Statistical Society, series B*, Vol.68(2006), pp.333-383.
- [8] Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff, and A.B. Sanders, “An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate,” *Journal of Finance*, Vol.47(1992), pp.1209-1227.
- [9] Cox, J., “Notes on option pricing I : Constant elasticity of variance diffusions,” Working paper, Stanford University reprinted in *Journal of Portfolio Management*, Vol.22(1996), pp.15-17.
- [10] Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross., “A theory of the term structure of interest rates,” *Econometrica*, Vol.53(1985), pp.385-407.
- [11] Dacunha-Castelle, D. and D. Florens-Zmirou, “Estimation of the Coefficients of a Diffusion from Discrete Observations,” *Stochastics*, Vol.19(1986), pp.263-284.
- [12] Daniels, H., Saddlepoint approximations in statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol.25(1954), pp.631-650.

- [13] Durham, G. and R. Gallant, Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Diffusion Processes, *Technical report*, (2001).
- [14] Easton, G.S. and E. Ronchetti, "General Saddlepoint Approximations with Applications to L Statistics," *Journal of the American Statistical Association*, Vol.81(1986), pp.420-430.
- [15] Elerian, O., S. Chib, and N. Shephard, "Likelihood Inference for Discretely Observed Non-linear Diffusions," *Econometrika*, Vol.69(2001), pp.959-993.
- [16] Eraker, B., "MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance," *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.19(2001), pp.177-191.
- [17] Goutis, C. and G. Casella, "Explaining the Saddlepoint Approximation," *The American Statistician*, Vol.53(1999), pp.216-224.
- [18] Hurn, A., J. Jeisman, and K. Lindsay, "Seeing the wood for the trees : A critical evaluation of methods to estimate the parameters of stochastic differential equations," *Journal of Financial Econometrics*, Vol.5(2007), pp. 390-455.
- [19] Kloeden, P. and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, (1999).
- [20] Ko, Y., S.P. Hong, and C. Jun, "On Parameter Estimation of Growth Curves for Technological Forecasting by Using Non-linear Least Squares," *International Journal of Management Science*, Vol.14, No.2(2008), pp.89-104.
- [21] Kwon, O., "Uncertainty, View, and Hedging : Optimal Choice of Instrument and Strike for Value Maximization," *International Journal of Management Science*, Vol.17, No.2(2011), pp.99-129.
- [22] Lee, Y.D., S. Song, and E. Lee, "The Delta Expansion for the Transition Density of Diffusion Models," *Technical Report*, (2012).
- [23] Nicolau, J., "A new technique for simulating the likelihood of stochastic differential equations," *Econometrics Journal*, Vol.5(2002), pp.91-102.
- [24] Oksendall, B., *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, Springer, (2003).
- [25] Park, S. and B. Jang, "Stock Returns and Market Making with Inventory," *Management Science and Financial Engineering*, Vol.18, No.2(2012), pp.1-4.
- [26] Pederson, A.R., "A New Approach to Maximum Likelihood Estimation for Stochastic Differential Equations based on Discrete Observations," *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol.22(1995), pp.55-71.
- [27] Rogers, L., "Smooth Transitional Densities for One-Dimensional Diffusions," *Bulletin of the London Mathematical Society*, Vol.17(1985), pp.157-161.
- [28] Shoji, I. and T. Ozaki, "Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method," *Stochastic Analysis and Applications*, Vol.16(1998), pp.733-752,
- [29] Vasicek, O., "An equilibrium characterization of the term structure," *Journal of Financial Economics*, Vol.5(1977), pp.177-188.