The Korean Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 2-3 (May 2013), 131–148

A Study on Learning Environments for Euler's formula with activities

'오일러 공식과 오일러 표수' 탐구 활동을 위한 학습 환경 연구

Song Min Ho 송민호

Euler's formula provides the topological characteristics of geometrical objects including polyhedra, and so an important mathematical concept. Descriptions on Euler's formula had been in the textbooks according to the 3rd through 7th National Mathematics Curriculum. However, they are gone after that. In this study, we focus on Euler characteristic and Euler's formula as an educational material for educations for the gifted or after-school educations. We first look at the mathematical history and the applications of Euler's formula and national curriculums to search for its mathematical and educational meaning. We further make a suggestion for a learning environment which provides a better education relying on search activities, not just depending on memorization, illuminated from the education of Euler's formula.

Keywords: Euler polyhedron formula, Euler Characteristic, informal education, technology; 오일러 공식, 오일러 표수, 비형식적 교육, 공학적 도구.

MSC: 1A05, 01A20, 97–00 ZDM: A14

1 서론

다면체는 중요한 수학적 대상으로서 역사적으로 많은 수학자들이 다면체에 관한 내용을 다루었다. 피타고라스, 플라톤, 유클리드, 아르키메데스 등의 그리스 수학자들은 다면체에 관한 이론적인 연구와 체계적인 분류를 제시하였다.

케플러는 그림 1[1)]과 같이 태양계 시스템을 다면체의 합으로 파악하였고, 우주를 상징하는 정다면체 모형을 통하여 천문을 연구하였다. 데카르트는 다면체에 관한 이론적인 부분과 실제적인 대상을 연결하는 해석법을 도입하여 수학의 발전을 이끌었다. 그러나 이들 수학자들은 다면체에 관하여 매우 단순하면서도 근본적인 역할을 할 수 있는 다면체의 기본

본 연구는 숙명여자대학교 2012년도 교내연구비 지원에 의해 이루어졌음.
Receiveded on Mar. 2, 2013, revised on Apr. 6, 2013, accepted on Apr. 20, 2013.

1) 출처 : `http://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler`

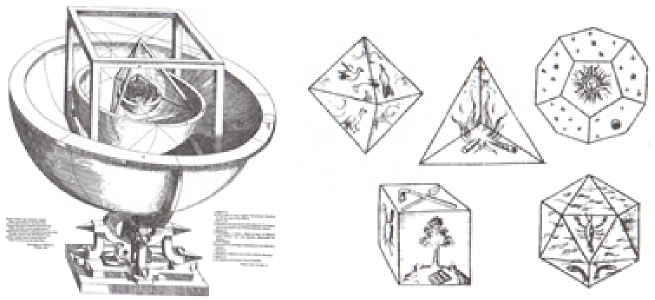


그림 1: 케플러의 태양계 모형과 정다면체

성질을 주목하지 못하였다.[2] 이후 1750년에 이르러서야 오일러[3]에 의해 발표된 이 기본 성질에 관한 식은 오일러 공식 (Euler's polyhedron formula)[4]으로 불리게 된다. 오일러 공식은 다양한 다면체에 대하여 위상 불변량에 해당하는 값을 제시하고 있어서 발표 이후로 많은 연구가 이루어졌고 이후 위상수학의 발전과 연결되었다 [25].

오일러 공식은 어린 학생들도 이해할 수 있을 정도로 간단하며 직관적인 의미와 표현을 가지면서 위상수학에서 매우 중요한 역할을 한다. 그래서 대학 수학의 조기 도입이라는 관점에서 새수학운동 시기에 학교 수학에 도입되었다. 우리나라에는 새수학운동의 영향을 본격적으로 받게 된 3차 교육과정부터 오일러 공식이 중학교 3학년에 도입되었고, 이후 6차 교육과정까지 중학교 1학년 수학 교과서에 등장하다가 7차 교육과정에서는 심화과정으로 축소되었고, 2007 개정 교육과정 이후로 교육과정에서 완전히 삭제되었다 [10, 16].

본 연구에서는 영재교육이나 방과후교실과 같은 비교과 탐구 활동의 소재로 오일러 공식과 오일러 표수에 주목하였다. 우선 오일러 공식과 오일러 표수가 가지는 의미를 수학사와 그 응용 분야에서 찾아본다. 이를 위해 오일러 공식과 오일러 표수의 역사를 살펴보고 다양한 수학 분야에서 어떻게 발전되어 왔는지를 알아본다. 그리고 교육과정에 도입된 오일러 공식에 관한 내용을 살펴보고 그 도입 취지 및 교육과정으로써 오일러 공식의 의미에 관하여 살펴본다. 나아가 공식 암기가 아닌 탐구 활동의 대상으로 오일러 공식을 새롭게 조명할 수 있는 학습 환경을 제안하고 이를 이용한 활동을 예를 들어 살펴보고자 한다.

2) 데카르트는 1625년에 이 기본 성질을 발견하지만 증명하지는 못하였고, 발표하지도 않았다.

3) Leonhard Euler (1707–1783): 866편의 논문을 작성한 스위스의 수학자로 현대 수학의 발전에 지대한 영향을 끼쳤다. 오일러 수 (e), 오일러 공식 ($e^{\pi i}+1=0$) 등이 알려져 있다.

4) 일반적으로 오일러 공식은 $e^{\pi i}+1=0$를 의미하고, 이와 구분하기 위하여 $v-e+f=2$는 '오일러의 다면체 공식'으로 불린다. 그러나 표기상의 용이 및 교육과정과의 용어 통일성을 고려하여 본 논문에서는 '오일러 공식'을 $v-e+f=2$를 지칭하는 용어로 사용한다.

2 오일러 공식, 오일러 표수와 위상수학

이 절에서는 오일러 공식과 오일러 표수가 가지는 교육적 의미를 수학사에서 찾아본다. 이를 위해서 먼저 오일러 공식과 오일러 표수가 어떻게 발전되어왔는지 그 발전 과정을 살펴본다. 그리고 오일러 공식과 오일러 표수가 수학의 발전에 기여한 부분과 여러 수학적 문제 상황에 응용될 수 있음을 실제 예를 들어 살펴본다.

1750년 11월, 오일러는 골드바흐에게 보낸 편지[5)]에서 다면체의 한 가지 성질에 관하여 다음과 같이 언급하였다. “어느 누구도 언급하지 않았던 다면체의 일반적인 성질을 발견하였는데 매우 놀랍습니다” [29]. 그리고 1년 뒤에 이를 증명하여 발표하였는데 이것이 바로 다음의 ‘오일러 공식(Euler’s polyhedron formula)’ 이다.

오일러공식. 어떤 다면체에서 점의 개수를 v, 선의 개수를 e, 면의 개수를 f라 하면 다음이 성립한다.

$$v - e + f = 2$$

오일러가 공식을 발견하기 이전, 데카르트는 1619∼1628년에 해석기하학을 연구하던 도중 이 공식을 발견하였다 [17, 25]. 해석기하학이 기하적 대상에 대한 산술화라는 점을 생각해보면 이 시기에 데카르트가 다면체와 관련된 산술적 수치 공식을 발견한 것은 우연이 아닌 필연의 결과로 생각되어진다. 데카르트는 이 내용을 발표하지 않았기 때문에 공식 발견의 명예는 오일러에게 돌아갔다. 훗날 이러한 사실이 밝혀지면서 이 공식은 ‘데카르트-오일러 공식’ 으로 불리기도 한다.

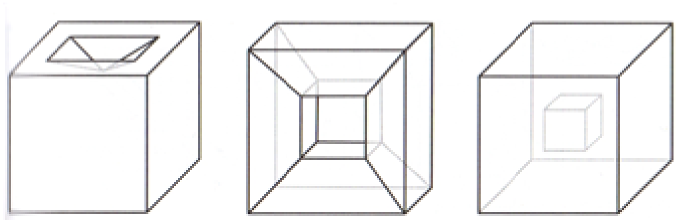


그림 2: L’huilier의 예외 다면체들

오일러 공식이 발표된 이후, 일반적으로 많이 다루어지는 다면체들(주로 볼록 다면체)에 대해서 오일러 공식이 성립함이 확인되었고 동시에 오일러 공식이 성립하지 않는 다면체들이 L’Huilier, Hessel 등의 수학자들에 의해서 발견되었다. L’Huilier가 제시한 그림 2와 같은 다면체는 기존의 다면체와 유사하지만 오일러 공식이 성립하지 않음을 알 수 있다 [25]. 이것은 위상의 관점에서 중요한 예시가 된다. 왜냐하면 유사한 구조를 가진, 즉 동형인 두

5) http://www.eulerarchive.org/에서 오일러의 연구 결과 및 편지 원본을 확인 할 수 있다.

다면체가 다른 성질을 가지는 예가 되기 때문이다. 예를 들어, 정육면체는 오일러 공식을 만족하지만, 이와 유사해 보이는 그림 2 왼쪽의 다면체는 오일러 공식을 만족하지 않는다. 또한 Hessel이 제시한 그림 3와 같은 다면체에 대해서도 오일러 공식이 적용되지 않음을 알 수 있다 [25]. 그림 3의 다면체는 정육면체를 붙이거나 묶어서 두 영역으로 나눈 것으로 볼 수 있는데 이는 정육면체와 근본적으로 다르게 여겨지고, 오일러 공식도 정육면체와 다르게 작용함을 알 수 있다. 이러한 예외들의 등장은 다면체, 나아가 기하적 대상에 대한 동형성 연구로 이어지게 된다.

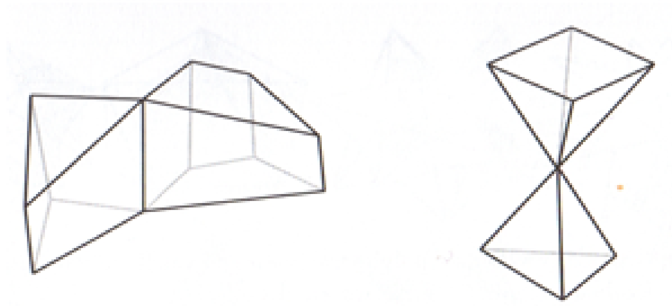


그림 3: Hessel의 예외 다각형들

이후 다양한 다면체에 관하여 오일러 공식 성립 유무에 관한 연구가 이루어지며 $v - e + f$의 값이 2가 아닌 다양한 값이 나올 수 있음을 확인하고, 이 값을 오일러 표수(Euler Characteristic)[6)]라고 부르게 된다. 또한 오일러 표수가 다르다는 것은 다면체가 가진 성질이 근본적으로 다름을 의미한다는 인식이 생겨나기 시작하였다. 즉, 오일러 표수가 다면체에 대한 불변량의 하나로 인식되기 시작한 것이다. 이러한 관점은 결국 위상적 불변량으로써 오일러 표수를 접근하게 되는 학문적 발전의 토대가 되었고 포앙카레는 이러한 내용을 보다 발전시켜 위상수학의 기초를 다지게 된다 [17, 25].

다음에서는 오일러 공식 또는 오일러 표수가 영향을 준 수학의 발전 내용 및 다양한 수학적 현상에의 응용을 소개한다. 여기에서 오일러 공식과 오일러 표수가 의외의 다양한 분야에 활용될 수 있는 기본적인 성질이 됨을 확인할 수 있다.

2.1 오일러-포앙카레 정리 (Euler-Poincare's Theorem)

곡면에 대한 연구가 점차 중요하게 여겨지면서 수학자들은 곡면을 위상적으로 분류하기 위한 도구, 즉 충분조건이 필요하게 되었다. 두 개의 곡면이 주어졌을 때, 서로 같은지 혹은

6) 오일러 표수는 오일러의 수로 불리기도 하는데, 오일러의 수는 e를 의미하는 경우가 많기 때문에 본 논문에서는 $v - e + f$를 '오일러 표수' 로 표기한다. 일반적으로 오일러 표수는 그리스 문자 χ(chi)를 사용하여 나타낸다.

다른지를 파악하는 것이 수학적으로 중요한 의미를 가지게 된 것이다. 예를 들어 모서리의 개수는 유클리드 평면의 다각형을 위상적으로 구분할 수 있는 충분조건이다. 포앙카레는 오일러 공식보다 더 발전된 위상수학의 기초를 구축하였다. 그는 일반적으로 많이 다루어지는 볼록 다면체를 위상적으로 구와 동형인 것으로 파악하였다. 이것은 역으로 오일러 공식을 만족하지 않는 다면체는 위상적으로 구와 동형이 아닌 것으로 파악할 수 있는 것이다. 이러한 내용을 담은 오일러-포앙카레 정리는 다음과 같다.

오일러-포앙카레 정리. 만약 v개의 꼭지점, e개의 모서리, f개의 2차원 면을 갖는 S^2(구)와 위상동형인 직선으로 둘러싸인 다면체[7)]라면 $v - e + f = 2$ 이다.

오일러-포앙카레 정리 이후 여러 곡면을 구분하는 연구가 활발히 이루어졌고, 특히 리만에 의해서 크게 발전하였다 [25]. 곡면을 구분하는 조건으로 언급된 것 중에 가향성(orientability)이 있다. 가향성을 적용하면 몇몇 곡면(구, 원기둥, 뫼비우스의 띠 등)의 구분이 가능해진다. 그리고 오일러 표수를 이용하면 구와 토러스의 구별까지 가능해진다. 이후 가향성, 오일러 표수는 위상적으로 동치가 아닌 두 곡면을 구분하기 위한 충분조건이 된다는 사실이 19세기에 밝혀지는데 이것은 수학의 위대한 업적 중 하나이다. 표 1은 몇몇 곡면에 대한 오일러 표수, 가향성, 경계선이다 [25].

곡면 S	오일러 표수 $\chi(S)$	가향성(Orientable)	경계선(Boundaries)의 수
구	2	O	0
토러스	0	O	0
2홀 토러스	-2	O	0
g홀 토러스	2-2g	O	0
원기둥	2	O	2
클라인 병	0	X	0
사영 평면	1	X	0
뫼비우스 띠	0	X	1

표 1: 여러 곡면의 오일러 표수, 가향 유무, 경계선

2.2 픽의 정리

그림 4의 왼쪽과 같이 일정한 간격의 격자무늬 점들을 연결한 다각형의 면적은 다음과 같이 구할 수 있는데, 이것을 픽의 정리(Pick's Theorem)이라 부른다.

7) 그림 2의 왼쪽 다면체는 이 성질을 만족하지 않는데, 이러한 예외들은 다면체의 재정의로 이어지게 된다. 새롭게 정의된 다면체는 임의의 두 꼭지점은 그 두 점을 포함한 회로를 가진다는 조건이 추가되었다. 오일러-포앙카레 정리에서 언급하는 구와 위상동형인 다면체는 새롭게 정의된 다면체를 대상으로 성립한다.

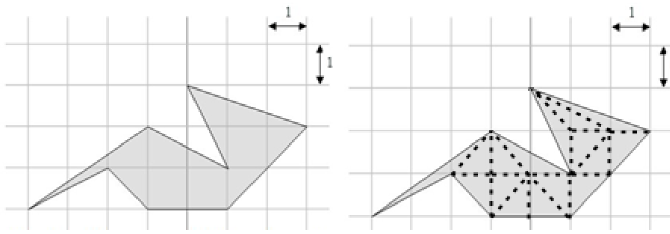


그림 4: Pick의 이론과 다각형 넓이

픽의 정리. 만약 다각형의 경계면에 B개, 다각형의 내부에 I개의 점이 포함된다면 면적의 넓이 A는 $I + \frac{B}{2} - 1$이다.

그림 4의 다각형은 다각형 내부에 4개의 점을 포함하고 있고, 다각형의 경계에는 10개의 점이 포함되어 있으므로 이 다각형의 면적은 $8\left(= 4 + \frac{10}{2} - 1\right)$이다. 이 정리는 다음과 같이 오일러 공식을 이용해서 증명할 수 있다.

증명. 먼저 그림 4의 오른쪽과 같이 격자점을 이용하여 더 이상 나눌 수 없을 때까지 다각형을 작은 삼각형으로 나누고 작은 삼각형의 개수를 T라 한다(그림 4에서 $T = 16$). 그러면 작은 삼각형은 모두 넓이가 $\frac{1}{2}$이므로 전체 다각형의 넓이 A는 $\frac{1}{2}T$와 같다. 만약 다각형의 외부 면을 하나의 면으로 본다면 위 다각형을 포함한 평면의 면의 개수 F는 $T + 1$이다. 각각의 삼각형은 3개의 변을 가지고 있는데 $3T$는 다각형 경계면의 선분은 1번, 다각형 내부의 선분은 2번 세기한 결과와 같다. 즉, 다각형의 선분의 개수를 E라 하면 $2E = 3T + B$가 성립한다. 그리고 다각형의 점의 개수 V는 $I + B$와 같다. 따라서 오일러 공식에 V, E, F를 각각 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$V - E + F = 2$$
$$(I + B) - \left(\frac{3T}{2} + \frac{B}{2}\right) + (T + 1) = 2$$
$$T = 2I + B - 2$$

따라서 다각형의 넓이 $A = \frac{T}{2} = I + \frac{B}{2} - 1$이 된다. □

2.3 히우드의 정리

평면 지도가 있을 때, 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠한다는 조건 하에 4가지 색만을 써서 지도를 칠할 수 있느냐는 문제가 4색 문제다. 이는 프란시스 구스리(Francis Guthrie)가 영국 지도를 색칠하던 중 착안하였고 이것이 당대의 유명한 수학자 드 모르강에게 전해지면서 이 문제를 '4색 문제' 라 부르게 되었다. 이 문제를 해결하기 위해서 많은 수학자들이 도전하였고, 히우드(Heawood)는 오일러 표수를 이용하여 특정한 곡면 위의 국가를 채색하

는데 필요한 색의 최솟값을 구하는 방법을 제시하였다. 다음은 히우드의 정리 (Heawood's Theorem) 인데, 임의의 곡면의 오일러 표수를 라 하였을 때, 이 곡면 위의 국가들을 채색하는데 필요한 색의 가짓수의 최솟값을 나타낸다.

히우드의 정리. 오일러 표수가 χ 인 임의의 곡면 위의 임의의 국가들에 대하여, 국가별로 인접한 영역은 서로 다른 색으로 구분해서 칠하려고 할 때 필요한 색의 최소 가짓수는 다음과 같다.

$$\left\lfloor \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor$$

예를 들어 토러스의 오일러 표수는 0 이므로, 토러스 위의 국가들을 구분하기 위해서 필요한 최소 색은 7가지이다. 하지만 이 정리의 적용에는 한계가 있는데, 오일러 표수의 값이 양수인 경우에는 적용할 수 없다. 즉, 표 2[8] 과 같이 오일러 표수의 값이 0 또는 음수인 곡면 위에 그려진 지도에서는 국가를 구분하기 위한 색의 가짓수를 찾을 수 있지만, 지구와 같이 오일러 표수의 값이 2 인 경우에는 성립하지 않는다.

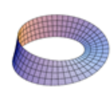
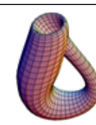
곡면	토러스	이중 토러스	삼중 토러스	뫼비우스 띠	클라인 병
모양					
오일러표수	0	-2	-4	0	0
채색수	7	8	9	7	7

표 2: 다양한 곡면에서의 오일러 표수와 채색 수

이 외에도 포앙카레-호프의 정리[9], 데카르트의 정리[10], 가우스 보넷 정리 [11]등이 오일러 표수와 관련된 중요한 수학 업적으로 언급된다. 이상에서 살펴보았듯이, 오일러 공식과 오일러 표수는 그 간단한 표현 방식과 직관적인 의미를 넘어서서 다양한 수학 분야에 적용되었음을 알 수 있다. 그리고 위상수학이라는 새로운 학문 분야를 발전시키는데 도움을 주었으며, 여러 수학적 현상을 관찰하고 탐구하기 위한 하나의 지표가 됨을 알 수 있다.

8) 그림 출처 : `http://ko.wikipedia.org/wiki/`오일러_표수

9) 닫힌 곡면 S 위의 어떤 벡터장이라도 유한 개의 제로 지점을 가지며, 제로 지점의 개수는 $\chi(S)$ 와 같다. 이것을 적용하면 지구의 오일러 표수는 2 이므로, 지구상에 바람이 불지 않는 지점이 적어도 하나 존재한다는 사실을 증명한다.

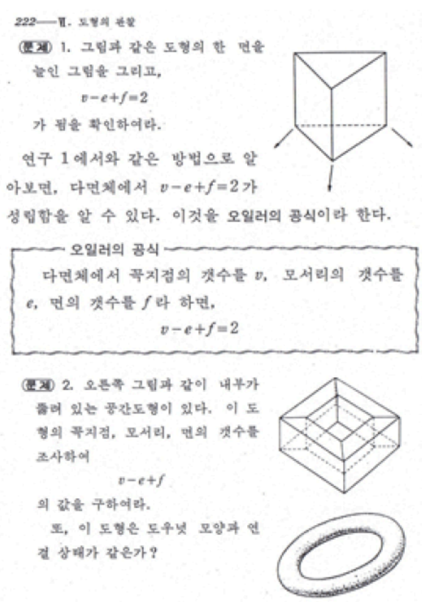
10) 어떤 다각형 P 의 결손각 (angle deficit) 의 총합은 $2\pi\chi(P)$ 이다.

11) 가향적 (orientable) 곡면 S 의 총 곡률 (curvature) 은 $2\pi\chi(S)$ 이다.

3 오일러 공식과 교육과정

라카토스는 오일러 공식의 간단함과 강력함, 모순을 일으킬 수 있는 다양한 실제 예시 등에 주목하여 교육을 위한 소재로 오일러 공식에 주목하였다 [20]. 라카토스는 과학의 지식이 패러다임의 전환을 거치면서 반박되고 보완하여 발전되어 가듯이 수학의 지식도 그런 과정을 거치면서 발달한다고 생각하였다. 라카토스의 준경험주의에 따른 교육의 예시로 제시된 것이 바로 오일러 공식을 활용한 학습자들의 탐구 활동이다. 비록 라카토스가 제시한 학생들의 활동은 복잡하고 긴 과정을 거치기 때문에 교육에 바로 도입되기에는 어려움이 있다. 하지만, 오일러 공식을 교육적인 관점에서 바라보았다는 점에서 의미를 가진다. 즉, 쉽게 이해하고 적용할 수 있는 간단한 지식을 다양한 실제와 반례를 경험하고 극복하며 수정, 보완, 발전시키는 의미 있는 활동의 소재로서 오일러 공식을 조명하고 있다.

교육과정에 나타난 오일러 공식은 이보다 간단한 형식으로 새수학운동과 함께 교육과정에 도입되기 시작하였다. 그것은 대학 수준의 수학 내용을 미리 교육과정에 도입한다는 기본 취지와 오일러 공식의 단순함과 강력함이 어우러져 이루어졌다. 우리나라에는 새수학운동이 본격적으로 도입되기 시작한 3차 교육과정부터 오일러 공식이 도입되었고 이는 7차 교육과정까지 이어진다. 본 절에서는 교육과정에 나타나는 오일러 공식의 도입 과정 및 내용을 살펴보고 교육과정에서 사라지게 된 이유에 관하여 논한다.


222—Ⅱ. 도형의 관찰

問題 1. 그림과 같은 도형의 한 면을 늘인 그림을 그리고,

$$v-e+f=2$$

가 됨을 확인하여라.

연구 1에서와 같은 방법으로 알아보면, 다면체에서 $v-e+f=2$가 성립함을 알 수 있다. 이것을 오일러의 공식이라 한다.

오일러의 공식

다면체에서 꼭지점의 갯수를 v, 모서리의 갯수를 e, 면의 갯수를 f라 하면,

$$v-e+f=2$$

問題 2. 오른쪽 그림과 같이 내부가 뚫려 있는 공간도형이 있다. 이 도형의 꼭지점, 모서리, 면의 갯수를 조사하여

$$v-e+f$$

의 값을 구하여라.

또, 이 도형은 도우넛 모양과 연결 상태가 같은가?

그림 5: 3차 교육과정 중3 도형의 관찰

3차 교육과정에서 오일러의 공식이 도입된 부분은 중학교 3학년 도형 단원이다. 여기에서는 '점, 선, 면의 연결 관계에 의하여 도형을 관찰하고, 위상적 성질을 알아보게 한다.'

는 단원 목표와 함께 단일 폐곡선과 오일러 공식을 다루고 있다. '위상적 성질' 이라는 용어에서 대학 수준의 위상수학에 대한 조기 도입이라는 새수학운동의 영향을 짐작해볼 수 있으며, '위상적 성질' 이라는 용어는 1981년의 4차 교육과정에도 나타난다. 특히 3차 교육과정에서는 오일러 공식의 활용에 대한 예로 정다면체의 종류가 다섯 가지임을 증명하는 내용이 포함되어 있다. 그림 5는 3차 교육과정에 따른 중학교 3학년 교과서에 나타난 오일러 공식 부분이다. 수형도를 통해서 평면도형에 관한 오일러 표수를 먼저 도입하고, 이후 그림 5와 같이 다면체에 관한 오일러 공식을 제시하고 있다. 이러한 내용 전개 및 사용되는 다면체 종류는 6차 교육과정까지 크게 변하지 않고 유지된다. 4차 교육과정부터 위상적 불변량에 대한 관찰이 강조되며 오일러 공식은 중학교 1학년으로 이동하게 된다. 그리고 5차 교육과정부터 '위상적 성질' 이라는 용어 대신 '도형의 간단한 성질' 을 사용한다. 이는 오일러 공식이나 위상적 성질이라는 수학적 지식을 강조하지 않기 위한 고려로서 교사용 지도서에도 암기 위주로 지도하지 말 것을 '지도상의 유의점' 으로 제시하였다. 이것은 6차 교육과정까지 유지된다 [3].

7차 교육과정에서는 오일러 공식이라는 용어 및 내용을 교육과정에서 제외하였으며, <교수 학습 상의 유의점> 에 심화 과정의 일환으로 제시하고 있다. 교과서에는 '오일러의 공식' 이라는 용어는 사용하고 있지 않으며 교사용 지도서에서도 '오일러 공식' 이라는 용어는 사용하지 않아도 무방하다는 내용이 나타난다 [1, 2]. 이후 2007년 개정 교육과정에서 <교수 · 학습 상의 유의점> 에서도 삭제되며 교육과정 전체에서 사라지게 되었다 [16]. 표 3은 오일러 공식이 교육과정에 나타난 시기와 특징을 정리한 것이다.

교육과정	학년(중학교)	주요내용
1∼2차(∼1963년)		해당 내용 없음
3차(1973년)	3학년	단일폐곡선의 성질, 오일러의 공식
4차(1981년)	1학년	단일폐곡선, 한붓그리기, 뫼비우스의 띠, 오일러 공식
5차(1987년)	1학년	단일폐곡선, 꼭지점과 변으로 이루어진 도형, 오일러 공식
6차(1992년)	1학년	단일폐곡선, 꼭지점과 변으로 이루어진 도형, 오일러 공식
7차(1997년)	1학년	<학습 지도상의 유의점> "다면체에서 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수 사이의 관계를 알아본다"
2007 개정 이후 ∼		해당 내용 없음

표 3: 오일러 공식과 교육과정

정경호와 양승갑 [10]은 오일러 공식이 포함된 중학교 1학년 도형의 관찰 영역이 7차 교육과정에서 삭제된 이유가 학습 부담 경감 때문이라고 말하고 있다. 3차 교육과정에서는 학문 중심 교육과정을 강조하며 수학 내용의 조기 도입, 수학의 구조와 엄밀성 강조 등이 특징이었다. 이에 따라 많은 양의 학습내용이 유입되었고, 이후 교육과정에서 지속적으로 강조해 온 것은 학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소이다. 이것은 가장 최근의 2009 개정 교육과정에서도 여전히 큰 특징으로 부각되고 있다. 오일러 공식이 포함된 도형의 관찰 영역이 학습량 경감 대상이 된 이유는 해석기하 위주의 고등학교 교육과정과 연계성이 떨어지기 때문으로 분석된다 [16].

오일러 공식은 단일폐곡선, 한붓그리기 등과 함께 다면체의 성질을 관찰하여 불변량을 찾아내는 기하 탐구 활동 수업을 위해 도입되었음을 알 수 있다 [4, 6, 12, 14]. 또한 교사용 지도서에 제시된 내용도 오일러 공식에 관한 수학적 지식과 증명법, 또는 수형도 그려보기 활동 등 수학적 지식이나 계산 기술의 전수에 초점이 맞추어져 있고, 다면체를 대상으로 하는 조작 활동은 제시하지 못하고 있다 [5, 7, 13, 15]. 학생들이 직접 조작하고 변형해보는 활동으로 제시하는 것도 필기구로 가능한 수형도 그려보기 정도에 불과하며 다면체는 지면상의 그림들로 다양성을 보일 수밖에 없는 매체의 한계는 제한적인 교수법을 사용할 수밖에 없음을 나타낸다. 이처럼 다양한 다면체를 역동적으로 다룰 수 있는 교수법의 부재는 오일러 공식이 성립하는 볼록 다면체를 대상으로 확인 위주의 지식 주입 교수 방법을 강요하게 되었다. 또한 고등학교 교육과정과의 연계성이 미약한 내용 요소는 교육과정에서 삭제되는 결정적인 계기가 되었다 [16]. 고등학교 교육과정에 나타난 기하가 대부분 해석기하의 영역이라는 점을 생각해보면 중학교 기하 영역에서 단일폐곡선, 한붓그리기, 오일러 공식 등이 포함된 도형의 관찰 영역은 고등학교 교육과정과 연계성이 떨어질 수밖에 없다.

지금까지의 내용을 종합하면 오일러 공식이 교육과정에서 사라지게 된 이유는 오일러 공식을 교육과정에 도입한 의미를 제대로 학습자가 받아들일 수 있는 교육 환경의 부재, 그리고 고등학교 교육과정과의 연계성 미비로 생각할 수 있다. 즉, 교육과정에서 오일러 공식을 삭제하게 된 이유는 학생들의 인지발달 단계에 적절하지 않거나 혹은 학습할 가치가 없어서가 아니라 교육 환경이 가지는 한계, 교육과정 개정의 방향성 등이 중요한 요인으로 작용하였음을 알 수 있다. 이것은 적절한 학습 환경이 제공되고, 교육과정의 틀을 벗어난다면 오일러 공식에 관한 탐구 활동이 학생에게 의미 있는 학습이 될 수 있음을 의미한다.

4 공학적 도구를 통한 오일러 표수 탐구

수학교육은 단순한 문제풀이 기술을 전수하는 것을 넘어, 학습자가 수학적 개념과 사고방식을 이용하여 다양한 현상을 해석하고 또한 창의적이고 논리적인 방법으로 문제를 해결하는 것을 추구한다. 이를 위해서 수학적 지식을 암기하고 문제에 적용하기보다 학습자가 수학적

지식을 자신에게 의미 있는 형태로 받아들여 내적 도구화할 수 있도록 돕는 교수법이 최근 많이 연구되고 있다. 앞에서 살펴본 오일러 공식과 관련된 내용은 학습자의 활동폭이 적고 대상도 제한되어 있는 것을 알 수 있다. 또한 그림 6과 같이 몇몇 다면체를 그림으로 제시하는 방식으로 다양성을 제공하고 있음을 알 수 있다. 김화경 [8]은 구성주의(Constructionism) 관점에 따라 정신적 조작 활동을 위한 물리적 구성 경험의 중요성을 강조하였다. 이 관점에 따르면 학습자가 오일러 공식을 내면에서 구성하려고 할 때, 다양한 오일러 표수를 학습자가 경험하고, 직접 구성하는 과정 속에서 그 규칙성을 찾아보는 활동이 중요한 역할을 할 수 있음을 짐작할 수 있다.

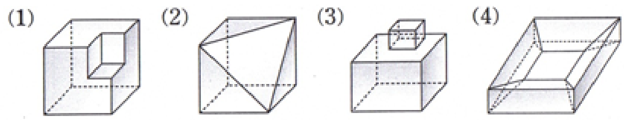


그림 6: 6차 교육과정 중1 교과서에 제시된 다면체들

그러나 단지 학습자의 구성 활동이 가능한 학습 환경을 제공하는 것만으로 수학적 지식이 내면화될 수는 없을 것이다. 앞에서 살펴본 그림 2나 그림 6의 (3) 번에서 볼 수 있듯이 위상적으로 동일한 것으로 간주되지만 오일러 표수가 다르게 나타나는 예외 다면체들이 존재한다. 이런 예외들은 오일러 표수에 관한 경험이 없는 학습자에게는 오일러 표수 탐구 활동에 오히려 방해요소가 될 수 있다. 즉, 학습자가 조작하는 환경에서 예외 다면체가 나타난다면 학습자는 혼란을 겪을 수밖에 없다. 이러한 혼란을 방지하려면 학습자가 그러한 예외가 나타나는 조작을 하지 못하도록 제어하거나, 그러한 예외가 발생하였을 때 이를 배제하는 교사의 개입이 필요하다. 또는 그런 예외가 발생하지 않는 조작 환경을 제공함으로써 문제를 해결할 수 있다. 공학적 도구를 적절히 설계하면 이러한 예외들을 제거하고 학습자가 직접 다면체를 구성하면서 탐구 활동이 가능한 학습 환경을 구성하는데 사용될 수 있다. 본 절에서는 먼저 수학교육에 의미 있는 학습 환경을 구성하기 위한 공학적 도구의 특징을 살펴본다. 그리고 공학적 도구를 사용하여 오일러 표수를 탐구하는 학습 환경에 관하여 알아본다.

최근 학교교육의 패러다임은 기호적 중재와 스마트 교육이라 할 수 있다. 기호적 중재는 수학교육의 이론적인 연구가 수학을 표현하는 근본적인 도구인 기호에 다다랐음을 보여준다. 또한 스마트 교육은 정부에서 적극적으로 주도하고 있는 새로운 교육 형태로서 정보사회로 급격히 접어든 현대 사회의 공학적 측면을 보여준다. 이러한 두 패러다임을 동시에 다루는 연구들 중에는 일정한 기호를 조작하고 이에 대한 결과물을 공학적 도구를 통하여 보여줌으로써 학생의 사고 과정을 돕고 나아가 사고 도구로 자리매김하려는 시도가 있다 [19, 21, 22, 24, 26–28]. 이러한 연구들에 공통적으로 포함된 내용은 학생이 쉽게 접

근하고 받아들일 수 있는 기호 체계, 이에 대한 적당한 외적 피드백을 제시하는 학습 환경, 그리고 학습 환경에서의 도움을 받아 기호 체계를 학습자의 내적 도구로 발전시켜 나가는 교육 구성이 있다. Cho et al [18]는 학습자의 내면 심리, 외면의 의사소통에 모두 작용할 수 있다는 특징을 강조하고자 이러한 기호 체계를 'executable expression' 이라고 표현하며, 학습자의 내적 작용과 학습 환경이라는 외적 작용의 조화를 강조하고 있다. 본 연구에서 제안하는 오일러 공식 탐구를 위한 공학적 도구인 쌓기나무 거북명령도 executable expression의 일종이라 할 수 있다. 쌓기나무 거북명령은 Papert [23]가 제안한 LOGO의 체화된 인지 관점을 입체에 적용시킨 공학적 도구이다.

그림 7: 쌓기나무 교구들

쌓기나무 거북명령에 대하여 살펴보기 전에, 이와 유사하게 사용할 수 있는 쌓기나무 교구의 활용에 관하여 알아보자. 그림 7과 같은 쌓기나무 교구의 사용은 점, 선, 면이 시각적, 촉각적으로 명확하게 드러난다는 점에서 장점을 가진다. 또한 손으로 직접 만지고 구성한다는 점에서 정의적인 측면의 학습을 기대할 수 있고, 컴퓨터 환경을 갖추고 기호 체계를 입력하는 등의 쌓기나무 거북환경보다 더 직관적이고 손쉬운 이용이 가능하다. 이에 반하여 쌓기나무 교구는 활용에 몇 가지 단점을 가지고 있다. 그림 7의 좌측은 일반적으로 사용되는 목재 쌓기나무인데, 다면체가 가진 점, 선, 면이라는 기본적인 특징만을 부각시키고 있지만 결합이 어렵다는 단점이 있다. 그림 7의 중앙은 자석이 내장되어 있어서 손쉽게 결합할 수 있지만 무거운 무게 때문에 복잡한 구조물을 쌓기에는 힘들고, 다면체의 점과 자석이 혼동을 일으킬 수 있다. 그림 7의 우측은 플라스틱으로 만들어져서 가볍고 별도의 도구 없이 결합이 가능하다는 장점이 있으나, 다면체의 요소 외에 다른 부분이 많고 결합이 단방향이라는 단점이 있다. 그리고 이러한 쌓기나무 교구들은 공통적으로 점, 선, 면이 하나로 합쳐지거나 혹은 사라진다는 점이 명확하게 나타나지 않는데, 실제 사물에서는 두 개의 쌓기 나무를 결합하여도 여전히 두 개의 점이나 선이 보이게 된다. 또한 다양한 모형을 만들기가 어렵다. 교구의 특성상 실제 존재하기 힘든 불안정한 구조물의 경우는 만들 수 없다. 만들기 측면뿐만 아니라 결과물 공유라는 측면에서도 문제점이 있다. 학습자가 만든 쌓기나무 모형은 결국 교실 환경이라는 로컬 커뮤니티에서만 한시적으로 공유할 수 있다. 과제물로 제출이나 교사의 확인도 어렵다. 오일러 표수 탐구 활동이라는 측면보다는 쌓기

나무 교구라는 물리적인 대상이 강조될 수밖에 없기 때문에 발생하는 현상이라 할 수 있다.

이와 비교하여 쌓기나무 거북명령은 웹-기반 게시판과 결합하여 인터넷을 통해서 공유될 수 있다[12)]. 학습자가 만든 과정을 기호 체계 분석을 통해서 파악할 수 있고, 다양한 형태의 쌓기나무 모형을 손쉽게 만들 수 있다. 또한 기존에 갖춰진 컴퓨터 환경을 이용하면 교구 구입이라는 추가적인 비용 문제도 해결된다. 쌓기나무 거북명령에서 제공되는 결과물은 오일러 표수 탐구 활동에 적합한 형태로 이루어진다. 두 개의 쌓기나무가 결합한 경우 정확하게 점과 점, 선과 선은 겹쳐져서 표현된다. 그림 8은 쌓기나무 거북명령으로 만들어진 쌓기나무 모형과 그것을 생성하는 기호를 보여준다[13)]. 그림 8의 다면체는 총 32개의 점과 60개의 선, 그리고 30개의 면이 존재하고 오일러 표수의 값이 2인 다면체이다.

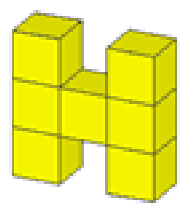
생성기호	χ	v	e	f	쌓기나무모형
suudssudd	2	32	60	30	

그림 8: 쌓기나무 거북명령으로 만든 모형

쌓기나무 거북명령은 매우 다양한 다면체를 학습자 스스로 구성해보는 것이 가능하다. 이것은 쌓기나무 거북명령이 기호로 조작되기 때문이다. 앞에서 살펴보았듯이 교육과정에서 오일러 정리의 탐구 활동이 어려운 이유 중 하나는 오일러 표수를 손쉽게 탐구할 수 있는 환경의 부재를 들 수 있다. 오일러 표수에 주목하면서 여러 가지 쌓기나무 모형을 만들고, 그 과정에서 오일러 표수의 변화 규칙을 찾아가는 활동이 가능하다면 오일러 공식이 단순한 수학적 지식이 아니라 다면체를 바라보는 하나의 지표가 될 수 있을 것이다. 그림 9는 각각의 오일러 표수에 대하여 만들 수 있는 쌓기나무 모형의 예이다.

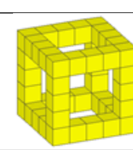
쌓기나무 모형				
오일러 표수	3	2	1	-8

그림 9: 다양한 쌓기나무 모형과 오일러 표수

12) 본 연구에서는 쌓기나무 거북명령과 웹-기반 게시판이 결합된 형태를 오일러 표수 탐구를 위한 학습 환경으로 제안한다. 학습 환경에 관한 자세한 내용은 송민호 [9] 참고.

13) 쌓기나무 거북명령에 관한 자세한 내용은 송민호 [9], 조한혁 외 [11] 참고.

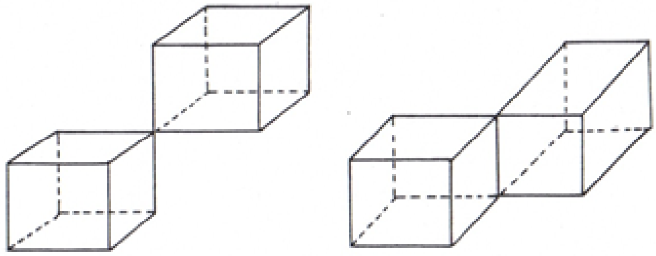


그림 10: 4차 교육과정 중1 교과서에 제시된 다면체들

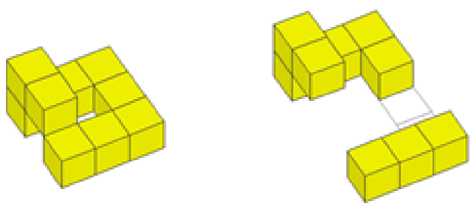


그림 11: 분해로 오일러 표수 구하기

쌓기나무를 활용한 오일러 표수의 탐구 활동은 학습자에게 규칙성을 찾아가는 수학적 경험을 제공할 수 있다. 4차 교육과정에서는 그림 10과 같은 형태의 다면체를 제시하고 있다. 이것은 앞에서 살펴본 Hessel의 예외 다면체들과 동형이다. 그런데 이러한 형태의 쌓기나무 결합은 오일러 표수를 변화시키는 가장 간단한 방법에 해당한다. 이는 쌓기나무 거북명령을 조작하는 학습자가 손쉽게 찾을 수 있는 규칙성 중 하나에 해당한다. 표 4는 쌓기나무의 결합 방식에 따른 오일러 표수 변화 규칙이다. 여기에서 제시한 변화 규칙은 어린 학습자도 약간의 시간을 들이면 찾아낼 수 있다는 점에서 탐구 활동으로서 가능성을 확인할 수 있다[14]. 즉, 대상의 규칙적인 변화에 따라 그에 대응하는 일정한 수치의 변화는 기하적 대상에 관한 성질 탐구, 규칙성 찾기, 나아가 함수 교육이라는 관점에서 중요한 활동이 될 것이다. [표 4]에서 제시된 규칙은 낮은 단계에 해당하는데, 학습자의 수준에 더 많은 경우를 찾거나, 혹은 보다 많은 경우를 포괄하는 일반화된 규칙을 찾아낼 수 있다. 심지어 대학생의 경우 모든 경우에 적용할 수 있는 규칙을 제시하기도 하였다.

이러한 규칙성은 임의의 주어진 다면체를 분석하여 오일러 표수를 찾아내는 활동에서 중요한 도구로 작용할 수 있다. 또한 결합이라는 관점뿐만 아니라 분해라는 관점에서도 오일러 표수를 찾아낼 수 있다. 이는 쌓기나무 결합이라는 조작 활동을 통해서 누적된 경험이 문제 상황에 대한 새로운 문제 해결 방법을 찾아낼 가능성이 있음을 보여준다.

그림 11은 분해를 통하여 오일러 표수를 찾아내는 사고 작용을 나타낸 것이다. 그림 11

14) 이것은 연구자의 개인적인 경험에 기초한 것으로, 학생의 수준이나 활동 방식에 따라 차이가 있을 수 있다.

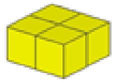
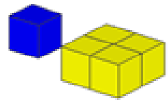
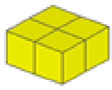
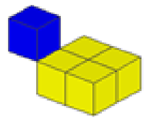
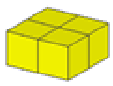
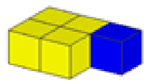
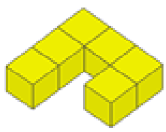
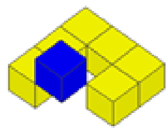
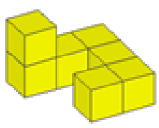
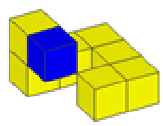
결합방식	변화 전 다면체	쌓기나무 추가로 변화된 다면체	오일러 표수의 변화 규칙
한 점 공유			1 증가
한 선분 공유			1 증가
한 면 공유			변화 없음
한 점과 한 선분 공유			변화 없음
한 점 한 면 공유			1 감소

표 4: 쌓기나무의 결합 방식에 따른 오일러 표수 변화 규칙

왼쪽 다면체의 오일러 표수를 구해보자. 왼쪽 다면체는 오른쪽과 같은 두 개의 다면체로 분해하여 생각할 수 있다. 이때 오른쪽 두 다면체의 오일러 표수는 각각 2 이므로 더한 값은 4가 된다. 그리고 겹쳐지는 부분을 생각해보면 계산 과정에서 제외되는 점, 선, 면은 각각 6개, 5개, 2개 이다. 따라서 결합하는 부분의 오일러 표수 변화량은 –3 이 되므로, 왼쪽 다면체의 오일러 표수는 $1(= 4 - 3)$ 이 된다.

5 결론

본 연구에서는 비형식적 교육과정의 소재라는 관점에서 오일러 공식과 오일러 표수를 다루고 있다. 이를 위해서 오일러 공식이 가지고 있는 의미를 수학사, 응용분야, 교육과정에서 찾아보았다. 오일러 공식과 오일러 표수는 개념의 발달에 따라 여러 수학 분야에 영향을 주었으며 특히 위상수학의 기초 개념을 생성하는데 영향을 주었음을 확인할 수 있었다. 오일러 공식의 단순함과 학문적 위상은 새수학운동과 함께 교육과정에 기하적 대상의 위상적 불변량이라는 위상수학의 내용을 도입하게 만들었다. 교육과정 분석을 통하여 우리나라 교육과정에서는 3차 교육과정에는 중학교 3학년, 4∼6차 교육과정에는 중학교 1학년에

도입되었음을 알 수 있었다. 이후 7차 교육과정에서는 심화 과정으로 약화되었으며, 2007 개정 교육과정 이후에는 교육과정에서 완전히 삭제되었다. 삭제된 주요 요인으로는 학습량 감축, 고등학교 교육과정과의 연계성 미비를 찾을 수 있었으며, 보다 근본적인 원인은 오일러 공식의 탐구 가능성을 제대로 살릴 수 있는 매체의 부재에 따른 지식 암기 위주 교육 내용으로 유추해볼 수 있다. 아울러 오일러 공식과 오일러 표수가 가진 기호체계로써의 단순함과 강력함은 여전히 의미를 가지는 학습내용임을 확인할 수 있었다.

본 연구에서는 학습자가 직접 다면체를 조작하고, 구성하는 경험을 통하여 다면체를 바라보는 내적 도구로 오일러 표수를 의미 있게 받아들일 수 있는 학습 환경으로 쌓기나무 거북명령과 웹-기반 게시판이 결합된 형태를 제안하였다. Papert가 제시한 LOGO가 체화된 인지 개념을 내포하고 있으며, 여기에 3차원을 표현할 수 있는 은유와 기호를 도입하여 기호적 중재의 관점에서 쌓기나무 거북명령이라는 공학적 도구를 소개하였다. 쌓기나무 거북명령을 이용하여 오일러 표수에 대한 탐구 활동이 가능하며, 특히 자유로운 조작을 통하여 다양한 오일러 표수를 가진 다면체를 만들 수 있음을 확인하였다. 나아가 쌓기나무를 결합하는 방식에 따라 오일러 표수의 규칙성을 탐구하는 활동이 가능하며, 학습자의 수준에 따른 활동 가능성도 살펴보았다. 그리고 오일러 표수를 구하는 문제를 해결하기 위해서 결합의 규칙성뿐만 아니라 분해 등을 통한 다양한 사고 활동이 가능함을 살펴보았다.

교육과정에서는 다음과 같이 기하 교육의 중요성과 의의를 설명하고 있다.

> "평면이나 공간에서 도형에 관한 기본적인 성질의 이해는 자연, 예술, 건축, 그래픽, 공간 탐험, 지도 읽기 등 실생활 상황의 문제를 해결하는 데 기초가 되며, 도형의 성질에 대한 증명은 고대 그리스 이래로 연역적 추론의 전형으로 인식되어 왔다. 또한, 여러 가지 도형의 개념과 성질은 수학의 다른 여러 분야의 개념과 밀접하게 관련되어 있다. 기하 문제는 해결 방법이 다양하기 때문에 문제해결 능력과 수학적 창의성을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이다. 특히 도형에 관한 명제는 그에 대한 일반화나 유추, 조건의 변형 등을 통해 새로운 문제를 만들 수 있는 경험을 제공할 수 있어 학생의 문제 만들기 능력을 신장시킬 수 있는 좋은 소재이기도 하다 [16]".

쌓기나무 거북명령과 같은 적절한 공학적 도구를 활용하여 학습 환경을 구성한다면 오일러 공식과 오일러 표수와 같은 수학적 지식을 계산 규칙으로 암기하는 것이 아니라 다양한 활동을 통하여 기하 교육의 의의를 실현할 수 있는 탐구활동으로 학습자에게 다가갈 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. 강옥기, 정순영, 이환철, 「중학교 수학 7-나」, (주)두산, 2000a.

2. 강옥기, 정순영, 이환철, 「중학교 수학 7-나 교사용 지도서」, (주)두산, 2000b.
3. 교육부, 「초·중·고등 학교 수학과 교육 과정 기준」, 2000.
4. 김연식, 김흥기, 「중학교 수학 1」, (주)동아출판사, 1988a.
5. 김연식, 김흥기, 「중학교 수학 1 교사용 지도서」, (주)동아출판사, 1988b.
6. 김연식, 김흥기, 「중학교 수학 1」, (주)동아출판사, 1994a.
7. 김연식, 김흥기, 「중학교 수학 1 교사용 지도서」, (주)동아출판사, 1994b.
8. 김화경, 「컴퓨터와 수학교육 학습지도 환경에 관한 연구」, 박사학위논문, 서울대학교, 2006.
9. 송민호, 「Constructionism 기반 수학교육공학 관점에서의 학습환경 설계 연구」, 박사학위논문, 서울대학교, 2010.
10. 정경호, 양승갑, "제 6·7차 중학교 수학과 교육과정 비교분석 연구", 자연과학논문집 20(2001), 1–23.
11. 조한혁 외, "On the Design of Logo-based Educational Microworld Environment", 한국수학교육학회지 <수학교육연구>, 15(1) (2011), 15–30.
12. 한국교육개발원, 「중학교 수학 3」, 문교부, 1975a.
13. 한국교육개발원, 「중학교 수학 3 교사용 지도서」, 문교부, 1975b.
14. 한국교육개발원, 「중학교 수학 1」, 문교부, 1984a.
15. 한국교육개발원, 「중학교 수학 1 교사용 지도서」, 문교부, 1984b.
16. 한국교육과정평가원, 「2007년 개정 중학교 교육과정 해설서—수학」, 2007.
17. Boyer Carl B., *A History of mathematics, 2d ed*, John Wiley, New York, 1991.
18. Cho H. H. et al., "Exploring Pattern Generalization in the Logo-based Microworld", *Proceeding of 17th Asian Technology Conference in Mathematics Thailand*, Bangkok, 2012.
19. Duval, R., *Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings*, In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), Exploiting mental imagery with computers in mathematics education, 142–157, Berlin, Springer, 1995.
20. Lakatos, I., *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, 1976 ; 우정호 역, 「수학적 발견의 논리」, 서울 : 아르케, 2001.
21. Lannin, J. K., "Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning through Patterning Activities", *Mathematical Thinking and learning*, 7(3) (2005), 231–258.
22. Mavrikis M. et al., "Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic affordances for an intelligent microworld", *Journal of Computer Assisted Learning*, 29(1) (2013), 68–84.
23. Papert, S., *Mindstorms : Children, computers, and powerful ideas*, Cambridge, Massachusetts : Perseus Publishing, 1980.
24. Radford, L., "Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis", *Educational Studies in Mathematics*, 42 (2000), 237–268.
25. Richeson David S., *Euler's gem : the polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton University Press, 2008.
26. Rivera, F. D. and Becker, J. R., "Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns", *ZDM Mathematics Education*, 40(1) (2008), 65–82.
27. Samson, D. A., Enactivism and Figural Apprehension in the Context of Pattern Gener-

alisation. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Fremantl, 501–508, 2008.
28. Stacey, K., "Finding and using patterns in linear generalising problems", Educational Studies in Mathematics, 20(1989), 147–164.
29. Youschkevitch, A. P., "Leonhard Euler", In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*, 4, 467–484. New York: Charles Scribner's Sons, 1971.

Song Min Ho
Graduate School of Education, Sookmyung Women's University
E-mail: minos@sookmyung.ac.kr