제13권, 제2호. pp.99 - 107, 2013

작은 샘플 크기의 One-shot Devices를 위한 베이지안 신뢰도 추정

문병민·선은주·배석주†

한양대학교 산업공학과

Bayesian Reliability Estimation for Small Sample-Sized One-shot Devices

Byeong Min Mun·Eun Joo Sun·Suk Joo Bae†

Department of Industrial Engineering, Hanyang University

Abstract

One-shot device is required to successfully perform its function only once at the moment of use. The reliability of a one-shot device should be expressed as a probability of success. In this paper, we propose a bayesian approach for estimating reliability of one-shot devices with small sample size. We employ a gamma prior to obtain the posterior distribution. Finally, we compare the accuracy of the proposed method with general maximum likelihood method.

Keywords : bayesian reliability, gamma prior, maximum likelihood estimation, one-shot device, storage reliability

† 교신저자 sjbae@hanyang.ac.kr
이 논문은 한국연구재단의 중견연구자지원사업의 지원을 받아 연구되었음 (과제번호: 2011-0016598).
논문접수일 : 2013년 05월 09일 논문수정일 : 2013년 05월 16일 게재확정일 : 2013년 06월 08일

1. 서론

원샷 디바이스(one-shot device)는 탄약, 미사일, 우주 발사체 및 의약품 등과 같이 1회 사용 후 임무를 완료하는 장비를 의미하며, 대부분의 고장은 자연적인 스트레스(natural stress)로 인하여 구성품이 열화(degradation)되어 발생한다. 이러한 원샷 디바이스는 특정 시점에서 검사를 실시하여 성공 또는 실패로 구분되는 바이너리 데이터(binary data)를 통하여 저장 신뢰도(storage reliability)를 추정한다. 이 때 저장 신뢰도는 저장 상태에 있는 장비가 정해진 저장 기간 동안 고장이 발생하지 않고 정상적으로 작동할 확률로 정의할 수 있다.

Guikema and Pate-Cornell(2004)과 Guikema(2005)는 검사시점 t에서 n개의 원샷 디바이스를 검사하였을 때 고장개수 M은 실패확률이 p인 이항분포를 따른다고 가정하여 저장 신뢰도 $1-p$를 추정하였다. 저장 신뢰도를 추정하기 위한 접근법으로 Guikema and Pate-Cornell(2004)는 베타 사전분포(beta prior distribution)를 활용한 베이지안 접근법(bayesian approach)을 제안하였으며, Guikema(2005)는 고전적 접근법(classical approach), 정규 사전분포(normal prior distribution) 및 비정보적 사전분포(uninformative prior)를 활용한 베이지안 접근법 등을 제안하였다. 하지만 이러한 접근법은 해당 검사 시점 t에서의 저장 신뢰도를 추정할 수는 있지만 검사 시점 t의 정보는 포함되어 있지 않기 때문에 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정할 수 없다는 문제점이 있다. 일반적으로 해당 검사 시점 t에서의 저장 신뢰도를 추정하는 문제보다는 원샷 디바이스가 저장되기 시작한 초기 시점에서 검사를 실시하여 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정하는 문제가 더 중요하다. 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정하기 위하여 Zhao and Xie(1994)와 Zhao et al.(1995)는 검사 시점 t가 특정 수명분포를 따른다고 가정하고, 고장개수 M은 실패확률이 $F(t)$인 이항분포를 따른다고 가정하여 저장 신뢰도 $R(t)=1-F(t)$를 추정하였다. 저장 신뢰도를 추정하기 위한 접근법으로 Zhao and Xie(1994)는 초기고장을 고려하여 고장시간 t가 지수분포(exponential distribution)를 따른다고 가정하였으며 모수추정 방법으로 최우추정법(maximum likelihood estimation, MLE)과 최소제곱법(least squares estimation, LSE)을 사용하였다. 이와 같이 지수분포를 사용할 경우 원샷 디바이스는 저장 중에 고장률이 일정하다고 가정을 한다. 하지만 원샷 디바이스의 고장은 자연적인 스트레스로 인하여 구성품이 열화되어 발생하기 때문에 고장률은 시간이 지남에 따라 감소 또는 증가할 것이다. 이에 따라 Zhao et al.(1995)은 고장시간 t가 와이블분포(Weibull distribution)를 따른다고 가정하였으며 모수추정 방법으로 최우추정법을 사용하였다.

이와 같이 Zhao et al.(1995)는 저장 중에 고장발생률이 감소 또는 증가한다고 가정하여 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정하기 위하여 와이블분포의 모수추정 방법으로 최우추정법을 제안하였다. 최우추정법은 샘플 크기가 클 경우 상당한 모수 추정의 정확도를 제공하지만 샘플 크기가 작을 경우 사전 정보만 주어진다면 베이지안 접근법이 최우추정법보다 더 정확한 모수 추정의 정확도를 제공한다 (Berger(1985)). 원샷 디바이스는 일회성 장비이기 때문에 저장 신뢰도를 추정하기 위한 샘플의 취득이 매우 어렵기 때문에 베이지안 접근법이 최

우추정법보다 더 정확한 모수 추정의 정확도를 제공할 것이다.
본 논문에서는 작은 샘플 크기의 원샷 디바이스에 대하여 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정하기 위하여 베이지안 신뢰도 추정법을 제안하고자 한다. 고장개수 M은 실패확률이 $F(t)$인 이항분포를 따른다고 가정하여 저장 신뢰도 $R(t)=1-F(t)$를 추정하였다. 여기서 고장시간 t는 와이블분포를 따른다고 가정하였으며, 와이블분포 모수의 사전분포로 감마 사전분포(gamma prior distribution)를 사용하였다. 마지막으로 시뮬레이션을 통하여 본 논문에서 제안한 베이지안 접근법과 Zhao et al.(1995)가 제안된 최우추정법 결과를 비교 분석하였다.

2. 원샷 디바이스의 저장 신뢰도 추정

2.1. 원샷 디바이스의 저장 신뢰도

검사시점 t에서 n개의 원샷 디바이스를 검사하였을 때 고장개수 M은 실패확률이 p인 이항분포를 따른다고 하면 이항분포의 확률밀도함수(probability density function, pdf)는 다음과 같다.

$$f(m)={}_nC_m p^m (1-p)^{n-m},\ \ m=0,1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

Zhao and Xie(1994)는 검사시점 t가 고장률(failure rate)이 일정한 지수분포를 따른다고 가정을 하였으며, 지수분포의 신뢰도함수는 다음과 같다.

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t},\ \ t>0. \tag{2}$$

식 (1)에서 성공확률 $1-p$ 대신 지수분포의 신뢰도함수 $R(t)$를 사용하면 원샷 디바이스의 고장개수 M은 실패확률이 $F(t)$인 이항분포를 따르기 때문에 확률밀도함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f(m)={}_nC_m \{1-e^{-\lambda t}\}^m \{e^{-\lambda t}\}^{n-m},\ \ m=0,1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

지수분포를 가정하였을 경우 원샷 디바이스는 저장 중에 고장률이 λ로 일정하다. 하지만 원샷 디바이스의 고장은 자연적인 스트레스로 인하여 구성품이 열화되어 발생하기 때문에 고장률은 시간이 지남에 따라 감소 또는 증가할 것이다. 이에 따라 Zhao et al.(1995)는 원샷 디바이스가 저장 중에 고장률이 감소 또는 증가한다고 판단하여 검사시점 t가 와이블분포를

따른다고 가정을 하였다. 와이블 분포의 신뢰도함수는 다음과 같다.

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-(t/\alpha)^{\beta}}, \quad t > 0. \tag{4}$$

여기서 α는 와이블분포의 척도모수(scale parameter), β는 형상모수(shape parameter)이다. 이 때 형상모수인 β의 변화에 따라 다양한 고장률을 표현할 수 있다. β가 1보다 작을 경우 고장률은 감소하며, β가 1보다 클 경우 고장률은 증가한다. 식 (1)에서 성공확률 $1-p$ 대신 와이블분포의 신뢰도함수 $R(t)$를 사용하면 원샷 디바이스의 고장개수 M은 실패확률이 $F(t)$인 이항분포를 따르기 때문에 확률밀도함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f(m) = {}_{n}C_{m}\left\{1 - e^{-(t/\alpha)^{\beta}}\right\}^{m}\left\{e^{-(t/\alpha)^{\beta}}\right\}^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

Zhao et al.(1995)는 최우추정법을 이용하여 와이블분포의 모수 α, β를 추정함으로써 식 (4)의 저장 신뢰도 $R(t)$를 추정하였다.

2.2. 최우추정법

원샷 디바이스의 저장 신뢰도를 추정하기 위해서는 먼저 가정한 수명분포의 모수를 추정해야 한다. Zhao and Xie(1994)와 Zhao et al.(1995)는 가정한 수명분포의 모수를 추정하기 위하여 최우추정법을 사용하였다. 검사시점 $t_1, t_2, \cdots, t_k$에서 각각 $n_1, n_2, \cdots, n_k$개의 원샷 디바이스를 검사하여 $m_1, m_2, \cdots, m_k$개의 고장이 발생하였다면 가정한 수명분포의 확률밀도함수에 대한 우도함수(likelihood function)는 다음과 같다.

$$L = \prod_{i=1}^{k}\left[{}_{n_i}C_{m_i}\left\{F(t_i)\right\}^{m_i}\left\{1 - F(t_i)\right\}^{n_i - m_i}\right] \tag{6}$$

우도함수에 로그를 취하여 로그우도함수(log-likelihood function)를 유도하면 다음과 같다.

$$\ell = \ln L = \sum_{i=1}^{k}\ln\left[{}_{n_i}C_{m_i}\left\{F(t_i)\right\}^{m_i}\left\{1 - F(t_i)\right\}^{n_i - m_i}\right] \tag{7}$$

검사시점 t가 와이블분포를 따른다고 할 때 로그우도함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\ell = \ln L = \sum_{i=1}^{k} \ln \left[{}_{n_i}C_{m_i} \left\{ 1 - e^{-(t/\alpha)^{\beta}} \right\}^{m_i} \left\{ e^{-(t/\alpha)^{\beta}} \right\}^{n_i - m_i} \right] \tag{8}$$

식 (8)의 로그우도함수를 통하여 최우추정량(maximum likelihood estimator)을 추정하기 위해서는 로그우도함수를 각각의 모수로 편미분하여 0과 같다고 놓고 각각의 모수로 정리를 해야 한다. 하지만 식 (8)의 로그우도함수는 닫힌 해(closed form solution)가 존재하지 않기 때문에 넬더-미드 방법(nelder-mead method), 뉴튼-랩슨 방법(newton-raphson method)과 같은 수치적 알고리즘을 사용하여 모수를 추정할 수 있다.

3. 베이지안 추정법

최우추정법은 표본으로부터 얻은 객관적인 정보(objective information)를 통하여 우도함수를 극대화시킴으로써 모수를 추정한다. 이와 달리 베이지안 추정법은 표본으로부터 얻은 객관적인 정보와 주관적인 정보(subjective information)인 사전분포(prior distribution)를 사용하여 사후분포(posterior distribution)를 유도하고, 유도된 사후분포의 기댓값으로 모수를 추정한다.

최우추정법은 샘플 크기가 클 경우 상당한 모수 추정의 정확도를 제공하지만 샘플 크기가 작을 경우 사전 정보만 주어진다면 베이지안 접근법이 최우추정법보다 더 정확한 모수 추정의 정확도를 제공한다 (Berger(1985)). 원샷 디바이스는 일회성 장비이기 때문에 저장 신뢰도를 추정하기 위한 샘플의 취득이 매우 어렵기 때문에 베이지안 접근법이 최우추정법보다 더 정확한 모수 추정의 정확도를 제공할 것이다. 따라서 본 논문에서는 작은 샘플 크기의 원샷 디바이스에 대하여 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정하기 위하여 베이지안 신뢰도 추정법을 제안하고자 한다.

검사시점 t가 와이블분포를 따른다고 할 때 와이블분포의 모수 α, β에 대한 사전분포로 Hamada et al.(2008)가 제안한 감마 사전분포(gamma prior distribution)를 사용하였다. 다음과 같이 와이블분포의 모수 $\lambda = \alpha^{-\beta}$에 대한 사전분포로 모수 k_λ, θ_λ를 가지는 감마 사전분포, 모수 β에 대한 사전분포로 모수 $k_\beta = 1$, $\theta_\beta = 1$을 가지는 감마 사전분포를 가정하였다.

$$\lambda = \alpha^{-\beta} \sim Gamma(k_\lambda, \theta_\lambda), \;\; \beta \sim Gamma(1, 1) \tag{9}$$

여기서 k_λ, k_β는 감마분포의 형상모수, θ_λ, θ_β는 척도모수이다. 먼저 감마 사전분포의 모수 k_λ, θ_λ를 설정하기 위하여 역감마분포(inverse gamma distribution)의 평균과 분산에 적률법(method of moment)을 사용하였다. 역감마분포의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu = \frac{\theta_\lambda}{k_\lambda - 1}, \quad \sigma^2 = \frac{\theta_\lambda^2}{(k_\lambda - 1)^2 (k_\lambda - 2)} \tag{11}$$

역감마분포의 평균과 분산에 적률법을 적용하여 감마 사전분포의 모수 k_λ, θ_λ는 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$k_\lambda = \frac{\mu^2}{\sigma^2} + 2, \quad \theta_\lambda = \mu(k_\lambda - 1) \tag{12}$$

따라서 와이블분포의 모수 λ, β에 대한 사전분포는 다음과 같다.

$$\pi(\lambda, \beta) \propto \frac{\theta_\lambda^{k_\lambda}}{\Gamma(k_\lambda)} \lambda^{k_\lambda - 1} e^{-\theta_\lambda \lambda - \beta} \tag{13}$$

식 (13)의 감마 사전분포와 식 (8)의 우도함수를 이용하여 다음과 같이 결합사후분포(joint posterior distribution)를 유도할 수 있다.

$$\pi(\lambda, \beta | \boldsymbol{t}) = \frac{L(\lambda, \beta | \boldsymbol{t}) \pi(\lambda, \beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(\lambda, \beta | \boldsymbol{t}) \pi(\lambda, \beta) d\lambda d\beta} \tag{14}$$

와이블분포의 모수 λ를 추정하기 위하여 다음과 같이 λ에 대한 주변사후분포(marginal posterior distribution)의 기댓값을 통하여 모수 λ를 추정할 수 있다.

$$\hat{\lambda} = \int_0^\infty \lambda \pi(\lambda | \boldsymbol{t}) d\lambda = \frac{\int_0^\infty \lambda \int_0^\infty L(\lambda, \beta | \boldsymbol{t}) \pi(\lambda, \beta) d\beta d\lambda}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(\lambda, \beta | \boldsymbol{t}) \pi(\lambda, \beta) d\lambda d\beta} \tag{15}$$

동일하게 모수 β를 추정하기 위하여 다음과 같이 β에 대한 주변사후분포(marginal posterior distribution)의 기댓값을 통하여 모수 β를 추정할 수 있다.

$$\hat{\beta} = \int_0^\infty \beta\pi(\beta|\boldsymbol{t})d\beta = \frac{\int_0^\infty \beta \int_0^\infty L(\lambda, \beta|\boldsymbol{t})\pi(\lambda, \beta)d\lambda d\beta}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(\lambda, \beta|\boldsymbol{t})\pi(\lambda, \beta)d\lambda d\beta} \tag{16}$$

식 (15)와 (16)을 통하여 와이블분포의 모수 λ와 β를 추정할 수 있지만 일반적으로 이중 적분이 어렵기 때문에 MCMC(markov chain monte carlo)를 사용하여 모수를 추정하였다.

4. 시뮬레이션 결과

작은 샘플 크기를 가지는 원샷 디바이스에 대하여 저장 신뢰도 추정의 정확도를 비교하기 위하여 시뮬레이션을 실시하였다. 평균 수명이 약 27년인 원샷 디바이스를 가정하였으며, 이에 따라 와이블분포의 참 모수를 $\alpha = 30$, $\beta = 1.5$로 가정하였다. 원샷 디바이스가 배치된 이후 2년을 주기로 총 6번의 검사를 실시($t_1 = 2, t_2 = 4, \cdots, t_6 = 12$)하고, 각 시점에서 총 5개($n = 5$)의 원샷 디바이스를 검사한다고 가정하였다. 다음으로 바이너리 데이터를 생성하기 위하여 각 검사 시점 $t_1 = 2, t_2 = 4, \cdots, t_6 = 12$에서 와이블분포의 난수를 각각 5개씩 생성하였다. 이때 생성된 와이블분포의 난수가 검사 시점보다 크다면 원샷 디바이스가 정상이라고 판단하였으며, 난수가 검사 시점보다 작다면 고장이라고 판단하였다. 생성된 바이너리 데이터에 Zhao et al.(1995)가 제안한 최우추정법과 본 논문에서 제안한 베이지안 접근법으로 모수 α, β를 추정하여 미래 시점인 50년 후의 저장 신뢰도 $\hat{R}(t = 50)$를 추정하였다. 이와 같은 시뮬레이션을 2,000회 실시하였으며, 다음과 같이 와이블분포의 척도모수 α의 평균 추정치, 형상모수 β의 평균 추정치 및 신뢰도 평균제곱오차(mean squared error, MSE)를 산출하였다.

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{(i)}/n, \quad \beta^* = \sum_{i=1}^{n} \beta^{(i)}/n, \quad MSE = \sum_{i=1}^{n} \left[\left\{\hat{R}^{(i)}(t = 50) - R(t = 50)\right\}^2\right]/n \tag{17}$$

최우추정법과 베이지안 접근법에 대하여 시뮬레이션을 통한 척도모수 α의 평균 추정치, 형상모수 β의 평균 추정치 및 신뢰도 평균제곱오차 산출결과는 <표 1>과 같다. 평균제곱오차 산출 결과 베이지안 추정법이 최우추정법보다 더 좋은 저장 신뢰도 추정의 정확도를 제공하였다.

<표 1> 시뮬레이션 결과

추정방법	구분	추정치
베이지안 추정법	α 추정치의 평균	30.841
	β 추정치의 평균	1.773
	신뢰도 MSE	5.35e-03
최우추정법	α 추정치의 평균	23.927
	β 추정치의 평균	2.746
	신뢰도 MSE	1.79e-02

※ 참 모수 : $\alpha=30$, $\beta=1.5$

하지만 베이지안 추정법은 사전정보에 따라 모수 추정의 정확도가 정해진다. 본 논문에서는 와이블분포의 모수 $\lambda=\alpha^{-\beta}$와 β의 사전분포로 감마 사전분포를 사용하였다. 모수 β는 모수 $k_\beta=1$, $\theta_\beta=1$을 가지는 감마 사전분포를 가정하였기 때문에 사전정보가 필요 없지만, 모수 λ는 모수 k_λ, θ_λ을 가지는 감마 사전분포를 가정하였기 때문에 사전정보가 필요하다. 모수 k_λ, θ_λ는 사전정보 평균 μ와 분산 σ^2을 설정함으로써 식 (12)를 통하여 추정할 수 있다. <표 1>의 결과는 가정한 와이블분포의 참 모수 $\alpha=30$, $\beta=1.5$로부터 평균 $\mu=\alpha\Gamma(1+1/\beta)=27.08$과 분산 $\sigma^2=\alpha^2\Gamma(1+2/\beta)-\mu^2=330.12$을 산출하여 사전정보로 사용하여 저장 신뢰성을 추정한 결과이다. 정확한 사전정보를 통하여 모수를 추정하였기 때문에 베이지안 추정법은 최우추정법보다 매우 좋은 저장 신뢰도 추정의 정확도를 제공하였다. 하지만 대부분의 경우 정확한 사전정보를 알 수 없기 때문에 잘못된 사전정보를 설정하여 베이지안 추정법과 최우추정법의 저장 신뢰도 추정의 정확도를 비교한 결과는 <표 2>와 같다. 먼저 $\alpha=20$으로 설정하여 평균 $\mu=18.05$과 $\sigma^2=150.28$를 산출하여 사전정보로 사용하였으며, 두 번째로 $\alpha=40$으로 설정하여 평균 $\mu=36.11$과 $\sigma^2=601.10$를 산출하여 사전정보로 사용하였다. MSE 산출 결과 베이지안 추정법이 최우추정법보다 더 좋은 저장 신뢰도 추정의 정확도를 제공하였다.

<표 2> 잘못된 사전정보를 사용하였을 때 시뮬레이션 결과

추정방법	구분	사전정보		
		$\alpha=20$	$\alpha=30$(참 모수)	$\alpha=40$
베이지안 추정법	α 추정치의 평균	25.214	30.841	36.802
	β 추정치의 평균	2.015	1.773	1.560
	신뢰도 MSE	8.53e-03	5.35e-03	1.18e-02
최우추정법	α 추정치의 평균	23.927		
	β 추정치의 평균	2.746		
	신뢰도 MSE	1.79e-02		

※ 참 모수 : $\alpha=30$, $\beta=1.5$

5. 결론 및 향후연구

본 논문에서는 작은 샘플 크기의 원샷 디바이스에 대하여 미래 시점의 저장 신뢰도를 추정하기 위하여 베이지안 신뢰도 추정법을 제안하였다. 고장시간 t는 와이블분포를 따른다고 가정하였으며, 와이블분포 모수의 사전분포로 감마 사전분포(gamma prior distribution)를 사용하였다. 마지막으로 베이지안 접근법과 최우추정법에 대하여 시뮬레이션을 통하여 MSE를 산출한 결과 베이지안 추정법이 최우추정법보다 더 좋은 저장 신뢰도 추정의 정확도를 제공하였다. 또한 베이지안 추정법은 사전정보에 따라 모수 추정의 정확도가 정해지기 때문에 잘못된 사정정보를 사용한 베이지안 접근법에 대하여 신뢰도 추정 정확도를 비교하였다.

Fan et al.(2009)는 고장시간 t가 지수분포를 따른다고 가정하였으며, 신뢰도함수 $R(t)$에 대한 사전분포로 지수 사전분포, 정규 사전분포 및 베타 사전분포를 제안하였다. 본 논문에서는 와이블분포의 모수 α, β에 대한 사전분포로 감마 사전분포를 제안하였으며, 향후 Fan et al.(2009)와 같이 신뢰도함수 $R(t)$에 대한 사전분포를 제안하고자 한다.

참고문헌

[1] Berger, J. O.(1985), Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer, New York.

[2] Fan, T., Balakrishnan, N. and Chang, C.(2009), The Bayesian Approach for Highly Reliable Electro-explosive Devices using One-shot Device Testing, Journal of Statistical Computation and Simulation, 79(9), 1143-1154.

[3] Guikema, S. D.(2005), A Comparison of Reliability Estimation Methods for Binary Systems, Reliability Engineering and System Safety, 87, 365-376.

[4] Guikema, S. D. and Pate-Cornell, M. E.(2004), Bayesian Analysis of Launch Vehicle Success Rates, Journal of Spacecraft and Rockets, 41(1), 93-102.

[5] Hamada, M. S., Wilson, A. G., Reese, C. S. and Martz H. F.(2008), Bayesian Reliability, Springer Verlag.

[6] Zhao, M. and Xie, M.(1994), A Model of Storage Reliability with Possible Initial Failures, Reliability Engineering and System Safety, 43, 269-273.

[7] Zhao, M., Xie, M. and Zhang, Y. T.(1995), A Study of a Storage Reliability Estimation Problem, Quality and Reliability Engineering International, 11, 123-127.