대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 2, 481 ~ 501. Jun 2013

역동기하 환경에서 "끌기(dragging)"의 역할에 대한 고찰[1)]

조 정 수* · 이 은 숙**

본 연구는 역동기하 환경에서 "끌기"의 역할을 고찰하고자 한다. 끌기는 도형을 역동적으로 변화시키면서 기하 도형의 숨겨진 성질과 이들 사이의 관계를 나타내는 불변성을 탐색 가능하게 하는 중요한 역할을 한다. 따라서 본 연구는 선행 연구의 분석을 통해 역동기하 환경에서 끌기의 사용이 세 가지 관점으로, 즉 역동적 표상, 도구유발행위, 그리고 어포던스로 구분될 수 있다는 결론을 도출하였다. 본 연구에서는 끌기의 사용에 대한 이들 각각의 관점을 선행 연구를 중심으로 살펴보았다. 그리고 이로부터 (1) 연역적, 공리적, 형식적 지필기하를 실험수학으로 접근할 수 있게 하는 끌기의 가능성 탐구, (2) 추측과 증명 사이에서 끌기의 유형에 따른 작용 분석, (3) 학생과 DGS 사이의 도구발생 과정에 따른 기하 학습의 차이 분석, (4) 끌기에 의한 의사소통이나 담화 유형의 분석, (5) 어포던스로서 끌기에 의해 수반되는 측정 기능의 역할 분석, 그리고 (6) 끌기에 의한 기하 개념의 정의에 대한 학생들의 인식론적 변화를 기하의 교수-학습과 후속 연구를 위한 제언으로 제시하고 있다.

Ⅰ. 서 론

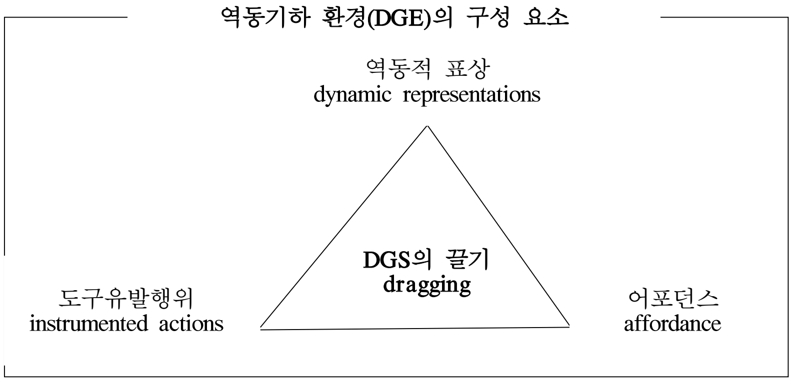
수학적 사고와 이해에 관한 현재의 연구는 학습자가 수학적 지식을 어떻게 구성하는지에 대한 중요한 정보를 제공해주고 있다. 그렇지만 인간의 모든 경험은 물질적이고 기호적, 공학적 체계를 통해 구조화되고 매개된다는 인류학적 사실에도 불구하고, 이러한 연구들 중 많은 연구의 심리학적 경향은 인지과정에서 도구의 역할을 다소 경시하고 있다(Rivera, 2005). Bruner는, "인간의 정신 사용은 인간이 가진 능력을 제대로 발휘하게 하고 확장시켜주는 '도구'와 '공학'을 개발해서 사용하는 능력에 좌우된다... 인간이 공학기반 사회를 발달시킨 것은 (다른 동물보다) 큰 두뇌를 가졌기 때문이 아니라 인간의 형태를 점진적으로 변화시킨 도구 사용과 협동이었다... 인간의 신경 체계는 그 체계의 잠재성을 발휘하게 하는 인간 외부의 도구에 의해 진화된 것이다"(Rivera, 2005, p. 125 재인용)라고 하면서 인지과정에서 도구와 공학의 역할을 강조하였다. 이러한 점은 수학교육에서도 나타나는 것으로, 공학 역할의 본질을 학생의 학습 과정에서 이해하려는 것이 최근의 수학교육 연구에서 공학을 바라보는 관점이다(Moreno-Armella & Sriraman, 2010).

그래핑 기능뿐만 아니라 수학적 기능을 가진 컴퓨터는 중등학교 학생들의 기하와 공간 감각을 촉진하는데 좋은 도구이다. 학생들은 컴퓨터를 사용함으로써 기하 대상들에 대해 다중 예를 관찰, 구성할 수 있으며, 이들 대상에 변환을 적용할 수 있고, 그리고 기하 개념에 대해 다양한

* 영남대학교 (chocs@yu.ac.kr)
** 대구함지고등학교, 영남대학교 수학교육과 박사과정 (mathedu.les@gmail.com)
1) 이 연구는 2011년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

표상을 연결할 수 있다(Clements, Sarama, Yelland, & Glass, 2008). 기하 학습에서 컴퓨터의 역할을 가장 잘 수행하고 있는 것이 끌기(drag) 기능을 핵심적 기하 도구로 사용하고 있는 역동기하이다. "역동기하 환경(dynamic geometry environments, DGE)"은 학생들이 꼭짓점과 모서리와 같은 요소를 이동시켜 원래 대상을 변형하게 하고 또 화면에서 위치를 바꿀 수 있게도 해 준다. 이러한 원래 대상에 적용된 모든 작도와 변환의 결과는 즉각적으로 화면에서 업데이트 된다. 또한 학생들은 화면에 있는 대상의 길이와 각, 넓이를 측정한 다음 이 대상이 역동적으로 변형될 때 이들 측정치가 어떻게 영향을 받는지도 관찰할 수 있다(Laborde, 2005). 학생들의 기하 개념에 대한 이해는 Cabri나 GSP(Geometer's Sketchpad)와 같은 "역동기하 소프트웨어(dynamic geometry softwares, DGS)"를 사용하여 컴퓨터 화면에서 기하적 대상들을 물리적으로 조작함으로써 향상될 수 있다. 실제로 Cabri의 끌기 기능을 사용하여 직사각형을 작도하는 어린 학생들을 관찰한 Hölzl(2001)의 연구에서 보면, 이 학생들이 역동기하의 본질, 즉 도형은 관계들로 이루어져 있고 이들 관계는 종속적이며 위계적이라는 사실을 받아들이면서 직사각형의 개념을 습득하였다. 또한 Tall(1993)도 DGE에서 끌기를 통해 학생들은 기하적 대상을 그림으로 조작할 수 있으므로 그 대상의 역동적 변화를 그에 대응하는 기하 개념과 연관시킨다는 사실을 밝혔다. 따라서 학생들의 기하 개념에 대한 이해가 잠재적으로 향상된다고 하였는데, Tall은 그 이유로 DGS가 작도를 손쉽게 해줌으로써 학생들은 기하적 도형의 불변적 관계에 주의를 집중할 수 있기 때문이라고 하면서 이것을 "선별적 작도의 원리(principle of selective construction)"라고 명명했다. 언급한 이러한 선행 연구의 결과를 DGE 측면에서 보면 끌기 기능의 중요성이 대두되며 이 기능이 DGE의 근간이라고 할 수 있다.

위에서 언급한 DGE와 DGS에 대한 다양한 선행 연구를 고찰한 결과에 따르면, DGE와 DGS에서 끌기는 크게 (1) 역동적 표상으로서 끌기, (2) 도구유발행위로서 끌기, 그리고 (3) 어포던스로서 끌기라는 세 가지 관점으로 구분될 수 있음을 결론으로 도출할 수 있었다. 따라서 본 연구에서는 끌기에 대한 이들 관점을 "역동기하 환경(DGE)의 세 가지 구성 요소"로 간주하고자 하며 이들의 관계를 [그림 Ⅰ-1]과 같이 나타낼 수 있다고 가정한다. 이를 뒷받침하기 위하여 본 논문에서는 각각의 관점에 따른 끌기 사용을 선



[그림 Ⅰ-1] 역동기하 환경(DGE)의 구성 요소

행 연구를 중심으로 고찰하였으며, 이로부터 학교수학에서 끌기를 중심으로 DGE와 DGS를 활용한 기하의 교수-학습과 후속 연구를 위한 논의와 제언을 제시하고자 한다.

II. 역동기하 환경

1. DGS의 발달 개요

Cabri는 Computerized Sketchpad for Geometry라는 뜻의 불어 "Cahier de Brouillon Informatique for Geometry"에서 나온 말이다. 1985년 Cabri-Geometry Project를 시작하면서 이 프로젝트 책임자 중 한 명이었던 Jean-Marie Laborde는 기하에서 시각화(visualization)를 위해 끌기 기능이란 아이디어를 고안해냈다(Laborde & Laborde, 2008). 사실 기하에서 가장 중요한 특징 중의 하나는 대상이나 아이디어, 개념의 시각화이다.

Bosch와 Chevallard(1999, Goldenberg, Scher, & Feurzeig, 2008 재인용)에 따르면, 수학자들은 항상 자신들이 비명시적/비구체적 대상을 다루는 작업을 한다고 생각하므로, 명시적/구체적 대상들(수식이나 문자식, 다이어그램, 공식, 그래프에 의한 표상 등)은 단지 자신들의 활동에서 보조적 역할만 하는 것으로 생각한다. Cabri 기하 프로젝트의 첫 해 동안에도 프랑스 수학교육 연구는 이러한 수학자들의 명시적 대상과 비명시적 대상의 이분법에 영향을 받아서 수학적 활동에 있어 도구 사용에 대한 이론적 접근을 그때까지도 개발하지 못하고 있었다. 이런 분야에 대한 연구는 2차 세계대전 후 소련에서 학생들의 다이어그램 사용에 관한 연구와 다이어그램을 제시하는 방식에 따른 학생들이 겪는 기하적 성질 인식의 어려움에 관한 연구의 형태로 수행되었다. 이러한 소련의 연구를 따라, 미국에서도 1970년대와 1980년대에 직각이나 정사각형과 같은 기하적 대상을 인식할 때 시각적 변인의 역할과 대칭이나 회전과 같은 변환을 대상에 주었을 때 그 대상의 이미지를 구성하는 과제에 관한 연구가 진행되었다. 그렇지만 이때까지만 해도 기하에서 다이어그램의 지위와 역할에 대한 이론적 틀이 존재하지 않았다. 1980년대 말과 1990년 초가 되어서야 기하에서 다이어그램의 사용에 대한 연구가 프랑스에서 시작되었다(Duval, 1995; Parzysz, 1988).

Cabri 개발 과정에서 "대상 선택 후 실행할 동작 결정(selection then action)"과 "실행할 동작 선택 후 대상 결정(action then selection)"의 순서에 관한 문제가 몇 년 동안 뜨거운 논쟁을 야기했다. '동작'은 실행하려는 조작을 말하고, '선택'은 동작을 실행할 대상들의 선정을 말한다. 논쟁이 되었던 의문은 실행할 동작이 대상의 선택보다 먼저 행해져야 하는지 또는 그 반대가 되어야 하는지에 관한 것이었다. 예를 들어, GSP는 단순 대상들(직선, 선분, 또는 원)을 제외하고는 '대상 선택 후 동작'의 순서에 기반을 두고 있는 반면, Cabri는 '동작 후 대상 선택'의 순서를 따르고 있다(Laborde & Laborde, 2008). 이들 두 DGS의 이 순서 문제는 교수학적으로 민감한 문제임이 실제로 판명되었다. Blanc-Brude(2000, Laborde & Laborde, 2008 재인용)는 GSP와 Cabri의 초보 사용자(10학년 학생들)를 대상으로 작도 과제에 대한 두 소프트웨어의 사용을 비교하였다. 기초 작도 과제에 대해서는 두 소프트웨어의 사용에 따른 속도 차이는 없었지만, 더 복잡한 작도 과제의 경우 작도를 계획하는 시간에서 GSP가 Cabri보다 훨씬 더 많은 시간이 요구된다는 사실을 밝혀냈다. 이런 차이가 생긴 것은 동작과 선택의 순서에 기인한 것으로 보인다. 즉 Cabri를 사용해서 대상들을 작도할 때 '동작 후 선택'의 일관된 사용이 작도 계획 시간을 줄였을 것으로 보

이는데 반면, GSP는 단순 대상들에서 더 복잡한 대상들(예: ~의 수선, ~의 중점)로 옮겨갈 때 사용자가 관점을 전환해야 하므로 작도 계획 시간이 더 많이 필요한 것으로 나타났다.

2. 역동기하의 특징과 지필기하와의 차이점

Cabri의 개발 과정에서 Jean-Marie Laborde는 처음부터 끌기 기능을 생각한 것은 아니라고 한다(Goldenberg, Scher, & Feurzeig, 2008). 그의 관심은 기하 작도 도구를 단순히 쉽게 사용하도록 하는 것이었다. 유클리드 기하의 경우, 정교한 운동기능의 협응 없이는 충분히 정확하게 도형을 그린다는 것이 상당히 어려웠으므로 사용자가 손쉽게 정교한 그림을 그릴 수 있게 하고자 하는 것이 그의 의도였다. Laborde는 도형에 있는 특정한 성질보다는 근본적인 관계에 초점을 두는 능력과 경향을 학생들이 발달시키도록 하는 하나의 환경을 역동기하로 보았다. DGE에서 작도된 어떤 도형은 특수한 도형이 아니라 그 도형의 일부(점이나 변)를 끌기하면서 늘이고 줄이고 조작할 수 있는 도형의 집합을 대표하는 한 가지 예이다. Goldenberg, Scher, & Feurzeig에 따르면, 도형의 특수한 성질보다는 본질적 관계를 학생들이 인식하도록 DGE가 도와야 한다는 주장은 널리 알려져 있지만 역동적 도형을 가지고 학생들이 무엇을 하는지(예: 역동적 도형을 사용해서 실험을 하는지, 화면의 도형이 끌기를 해서 변할 때 무엇에 주의를 두는지 등)는 여전히 부분적으로만 알려져 있다고 한다.

역동기하가 “지필기하(paper-and-pencil geometry)”와 다르다는 것은 분명한 사실이다. Colette Laborde(2005)는 Logo, DGE, Supposers와 같은 기하 도구는 MacPaint(또는 그리기 위주의 그림판 등)와 같은 그리기 도구와는 다르다고 하면서, 그 이유로 그리기 도구의 작도 과정은 행동만 있고 서술이 없기 때문이라고 한다. Laborde가 언급한 기하 도구는 사용자에게 의도된 관계를 서술하도록 요구한다는 것이다. 즉 두 직선이 평행하거나 두 선분이 합동인 이유는 그렇게 보이도록 그려졌기 때문이 아니라 두 직선의 관계가 그렇게 선언되었기 때문이다. 이러한 차이는 그리기 도구(지필기하를 포함해서)나 기하 도구 사이에서도 크게 나타나는데, 이 차이가 도구와 사용자의 상호작용에 영향을 미치고 그 도구를 통한 학습 과정에도 영향을 준다.

Olive & Makar(2010)에 따르면, 역동기하 환경은 클릭 장치(마우스, 터치패드 등)를 사용한 직접 동작을 통해 유클리드 기하의 기본적 요소(점, 직선, 선분, 반직선, 원)를 만들게 하는 도구와 이들 기하 대상들 사이의 기하적 관계(예: 평행이나 수직 관계, 원의 지름을 지나는 직선 등)를 작도할 수 있는 수단을 사용자에게 제공하는 공학적 도구에 의해 구현된 환경을 말한다. 역동기하의 경우, 기하적 대상이 일단 작도되고 나면 이들 대상의 어떠한 일부분(점, 직선, 선분, 원)을 끌기함으로써 간단하게 이들을 줄이거나 늘이면서 변형시킬 수 있다. 이 기능은 학생들이 관찰할 수 있는 새로운 수학적 원자료를 제공해주는데 지필기하의 이미지 형태의 정적 원자료와는 완전히 다른 종류이다(Laborde, 1995). Goldenberg & Cuocu(1998)는 역동기하의 공통적 특징에 대해, 역동기하의 도형은 그 구성 요소들을 연결해서 작도될 수 있는 도형이라고 했다. 그래서 역동기하에서 삼각형은 세 개의 선분을 연결해서 작도된다. 그렇지만 이 삼각형은 종이 위에 세 개의 선분을 그려서 만들어진 유일한, 정적인 예의 삼각형이 아니라 본질적으로 “모든 가능한 삼각형”을 대표하는 원형이다. 마우스를 사용해서 이 삼각형의 꼭짓점 한 개를 잡고 움직이면 이 꼭짓점에서 만나는 두 변의 길이와 방향이 연속적으로 변하게 된다.

DGE에서 학습자의 기하 학습에 대한 연구 결과를 보면, 역동기하의 다양한 특징과 지필기하와의 차이를 분명히 알 수 있다. Olive(2000)는 일곱 살짜리 아이가 GSP를 사용해서 대부분의 고등학생들이 알고 있는 삼각형에 대한 개념보다 더 높은 개념을 불과 5분 동안의 탐구를 통해 발견한 사실을 보고했다. 이 아이의 경우처럼, DGE는 역동적 끌기로 도형의 모양이 변함에 따라 여전히 변하지 않는 것이 무엇인지를 볼 수 있게 해서 어린 아이도 도형의 본질을 추상하는 것을 돕는다는 사실을 알 수 있다.

Lehrer, Jenkins, & Osana(1998)의 연구에서는, 초등학교 학생들이 기하 도형들 사이의 유사성을 입증할 때 "정신적으로 (도형) 변형하기(mental morphing)"를 종종 사용하는 것으로 밝혀졌다. 예를 들어, 오목한 사변형(V자 모양)이 삼각형과 유사하다는 것을 보이기 위해 학생들은 "오목한 사각형의 아랫변을 잡아당기면 삼각형을 만들 수 있다"(p. 142)고 했다. 이 연구는 어린 학생들의 경우 공간적 도형뿐만 아니라 닮음이나 합동의 정적인 비교도 역동적으로 추론하는 것이 자연스러운 행동이라고 제언했다. 이 연구 결과가 말하는 것은 DGE에서 제공하는 역동기하의 특징이 어린 학생들의 인지 활동 방식과 유사하다는 점이다.

중등학교 수준의 경우, 지필기하와는 달리 역동기하는 계산과 기호 조작으로 만연한 수학 활동을 실험 과학(laboratory science)으로 바꿀 수 있다. Keyton(1997, Olive & Makar, 2010 재인용)의 연구는 수학 학습이 실험 과학으로 바뀔 수 있는 예를 제공해주고 있다. 중학교 3학년 학생들에게 여덟 개의 기초적인 사각형과 함께 대각선과 중선의 정의를 제공했다. GSP를 사용해서 3주 동안 이들 사변형과 관련된 정리를 탐구하도록 했다. GSP를 사용하기 전 수업에서는 학생 당 평균 네 개, 수업 당 여덟 개, 3주 뒤에는 125개의 정리가 발표된 반면, GSP를 사용한 수업에서는 한 교실 당 20개, 3주 뒤에는 300개의 정리가 발표되었다고 한다.

역동기하에는 지필기하와는 다르게 대상의 방향성과 작도 행위의 종속적 위계가 있다. Cabri의 경우, Balacheff(1996)가 예시하고 있는 것처럼 Cabri에서 도형을 작도하는데 필요한 동작(행위)의 순서는 작도 순서의 중요성을 인식하지 못한 대부분 사용자에게 작도의 명확한 순서가 중요함을 인식시킨다. 예를 들어, Cabri는 대상의 방향성을 따진다. 즉 선분 AB의 경우 A가 B에 앞서 작도되기 때문에 이 선분 AB는 A에서 B로의 방향성을 가진다. 지필 환경에서는 그 순서를 명확하게 제시하지 않는 한 이들 대상들은 방향성을 가지지 않는다는 점에서 두 환경은 다르다. 복잡한 도형의 경우, 이런 작도 행위의 순차적 조직으로 인해 작도의 각각의 부분이 바로 앞에 작도한 것에 좌우되는 종속성의 위계(hierarchy of dependency)가 생긴다. Hoyles(1995)는 이 점이 Cabri를 사용하는데 있어 혼란을 야기하는 잠재적 출처가 될 수 있음을 밝히고 있다. 그 이유는 지금까지 했던 작도를 되돌리지 않는 한, 또는 전체 작도를 처음부터 다시 시작하지 않는 한 이미 확립된 관계들 사이의 어떠한 위계(순서의 조직)도 변경할 수가 없기 때문이다. Hölzl(1996)의 연구에서도 Cabri의 핵심적 특징인 자유점, 대상 위의 점, 그리고 교점 사이의 종속성의 위계에 따른 차이를 받아들인 학생들한테서만 직사각형 작도 과제에서 진전을 보였음이 발견되었다.

역동기하와는 달리 지필기하의 작도는 기하적 지식을 기초로 하지 않음을 알 수 있다. 다시 말해, 다이어그램이 학생들의 기하 학습을 도와주는 것이 아니라 기하의 이론적 용어를 사용하는 추론을 회피하도록 함으로써 오히려 기하적 사고를 방해하는 요인이 된다. 이로부터 Laborde

(2005)는 기하에서 공간-그래프적 성질(spatio-graphical properties)과 이론적이며 기하적 성질(theoretical geometrical properties) 사이의 차이에 관심을 두었다. 예를 들어, 어떤 다이어그램이 평행사변형을 표상하고 있다고 하자. 이 다이어그램에서 공간-그래프적 성질로는 “두 변이 수평이다”, “(현재 주어진 상태에서 볼 때) 나머지 두 변은 비스듬하다”, “수평인 두 변의 길이가 주어져 있다” 등이다. 이들 성질들은 색깔이나 변의 길이처럼 더 큰 성질들의 집합에서 선별된 것이다. 이들 공간-그래프적 성질들 중 몇 가지는 기하적 방식으로 해석될 수 있지만, 어떤 성질들은 기하적 관점에서 고려할 만큼 흥미로운 성질이 아니다. 예를 들어, 종이 위에 그려진 다이어그램의 위치는 기하에서 일반적으로 크게 고려하지 않는 성질인데, 이것은 평행사변형과 관련된 문제에서 변의 기울어진 정도가 고려의 대상이 되지 않는 것과 같다. 그래서 다이어그램의 몇 가지 공간-그래프적 성질은 기하 문제에서 부수적인 경우도 있지만 평행사변형의 성질들처럼 필수적인 경우도 있다.

Ⅲ. 역동적 표상으로서 끌기

1. 역동기하 환경에서 표상 양식: 그림, 도형, 다이어그램

표상과 표상체계는 수학적 대상의 교수와 학습에 관한 많은 연구에서 널리 사용되고 있는 용어이다(Patsiomitou, Barkatsas, & Emvalotis, 2010). 표상에 대한 대부분의 연구는 인공물에 의한 외적 표상과 정신 구조로서 내적 표상을 구분하고 있다. 외적 표상은 학생들을 둘러싼 환경에서 일어나는 활동이지만, 내적 표상은 학생들의 사고를 통해 발달한다. 일반적으로 외적 표상에는 구체물, 수학 기호, 식, 표, 그래프, 다이어그램, 말이나 문장 등이 있지만(Lesh, Behr, & Post, 1987), 역동기하에서는 그림, 도형, 그리고 다이어그램을 중요한 외적 표상으로 다루고 있다.

다이어그램(diagrams)은 일종의 외적 표상(예: 학생의 기하 작도)이다. Diezmann(2005)은 다음과 같은 네 가지 이유에서 다이어그램이 중요한 인지적 도구라고 주장한다: (1) 성공적인 문제해결을 향한 중요한 단계로서 문제 구조의 개념적 해석을 촉진시킨다, (2) 주어진 정보에 관한 전체적인 표상을 제공한다, (3) 추론 작용을 지원한다, (4) 언어에 의한 추론과는 다르지만 이런 추론을 보완하는 시각적 추론을 촉진시킨다. 이와 더불어 학생들이 그린 다이어그램은 그들의 수학적 이해와 지식의 약점과 강점에 대한 통찰을 제공해준다(Patsiomitou, Barkatsas, & Emvalotis, 2010). 예를 들어, 어떤 학생이 주어진 문제의 구성에 대한 해석으로 다이어그램(예: 기하적 도형을 포함)을 그렸을 때, 이 다이어그램은 그 학생이 이 문제에 내재되어 있는 수학적 대상들과 이들 대상들 사이의 관계를 이해했음을 나타내는 것이다. 따라서 학생들이 다이어그램을 그릴 수 없다면 기하적 대상들에 대해 의문을 가질 수 없을 것이고, 기하적 대상들 사이의 관계를 이해하지 못한다면 다이어그램을 그릴 수 없을 것이다.

2차원의 평면 기하에서 다이어그램은 애매한 역할을 하는데, 다이어그램은 한편으로는 이론적이며 기하적 성질을 언급하면서도 다른 한편으로는 학생의 지각적 활동을 일으키는 공간-그래프적 성질을 가지고 있다(Laborde, 2005). 학생들은 시각적 단서만을 사용해서 기하적 도형을 작도할 수 있다거나, 또는 다이어그램을 통해 경험적으로 기하적 성질들을 연역적으로 추론해 낼 수 있다고 종종 생각한다. 교사가 학생들에게 어떤 기하 도형을 작도하라고 했을 때, 교사는 학

생들이 그 도형에 대한 기하의 이론적 지식을 사용해서 기하 단계에서 활동할 것을 기대하지만, 학생들은 시각적인 공간-그래프적 단계에만 머물면서 시각적 조건만 만족시키려고 한다. 예를 들어, 주어진 점을 지나면서 원에 접하는 접선을 작도하라는 DGS 과제에 대해 학생들은 원과 접선의 교점을 구하지 않고 주어진 점을 지나는 직선을 이리저리 돌려서 원에 접촉하게 보이도록 마우스로 조정하는 물리적 과제로만 생각한다.

역동기하의 경우, 여러 연구자들(예: Hollebrands, 2007; Laborde, 1993; Parzysz, 1988)은 두 가지 종류의 기하적 대상인 그림(drawing)과 도형(figure)을 구분하고 있다. Parzysz(1988)는 “그림”은 기하적 대상의 물리적 표상으로, “도형”은 그 대상을 정의하는 텍스트에 의해 기술되는 기하적 대상으로 정의하였다. 이때 도형이 평면(2차원) 기하에 속하는 경우에 그 표상은 그림이고, 공간 기하에 속하면 모델이 된다. Parzysz에 따르면, 기하적 대상을 그림으로 표상을 전환할 때 필연적으로 정보의 손실이 발생한다. 학생들은 그 대상에 아주 가깝고 충분히 정교하게 그림을 그릴 수 있다는 생각과 함께 아무런 모호함이 없이 그 대상을 그림으로 표상할 수 있다고 종종 생각한다. 또한 그림을 읽을 때도 그림의 속성을 기하적 대상 자체의 성질로 간주한다. Parzysz는 공간 기하 도형을 평면으로 표상할 때 발생하는 문제점을 지적하면서, [그림 Ⅲ-1]과 같이 도형과 그 도형의 다양한 표상들 사이의 관계를 나타내었다. 이 그림에서 보면 두 가지 수준, 즉 “근거리 표상(close representation)”과 “원거리 표상(distant representation)”으로 표상 수준을 구분하고 있다. 수준 1(근거리 표상)은 기하적 도형의 성질을 거의 유사하게 나타내는 표상을 말하며, 수준 2(원거리 표상)은 기하적 도형의 성질을 훨씬 덜 나타내는 표상을 말한다.

여기서 주어진 수준보다 높은 수준의 표상으로 이동할 때는 필연적으로 정보의 손실이 발생하며 그 원인은 다양하다. 예를 들어, 수준 0에서 수준 1로 진행하는 경우, 벡터를 직접 눈으로 볼 수 없듯이 수학의 모든 개념이 표상에 의해 보여질 수는 없다. 어떤 도형은 표상될 수 없는 경우도 있다. 예를 들어, 직선이나 평면은 무한하기 때문에 구체적으로 표상하는 것이 불가능하다. 이런 경우 관례적으로 유한하게 표상하기 위해 직선은 선분으로, 평면은 직사각형으로 표상하며 이것이 기하 학습의 모호성의 출처가 되기도 한다.

한편, Parzysz의 정의를 더욱 발전시켜 Laborde (1993)는 그림, 도형, 추상적 기하 대상이라는 세 가지 구성 개념을 사용하여 그림과 도형의 차이를 기술하였다. “그림”은 종이 위에 그린 점과 같이 물리적 실체이며, “도형”은 “부분이 없는 것이 점이다”라는 유클리드식 서술처럼 기하적 지시체로 이론적 대상이다. “추상적 기하 대상”과 그림을 서로 연결시켜주는 것이 도형이다. 기

		기하		
		평면(2차원)	공간(3차원)	
	수준 0	도형		↓
근거리 표상	수준 1	그림	모델	정보손실 발생
원거리 표상	수준 2		그림	↓

[그림 Ⅲ-1] 근거리 표상과 원거리 표상의 관계(Parzysz, 1988, p. 80)

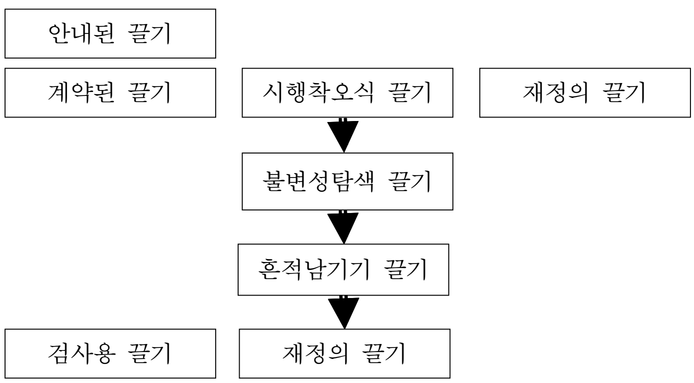
하를 배울 때, 수학적 대상인 기하 도형은 학생들에게 그림으로 표상해서 제시된다. 기하 도형은 개념 그 자체인데 반해, 그림은 기하 개념의 한 가지 표상체이다. 역동기하의 용어를 사용해서 말하면, 그림은 의도하는 작도와 거의 닮아 보이게 만든 것이다. 이와는 대조적으로, 도형은 대상들 사이의 관계를 포함하는 것으로 작도에 사용된 어떠한 기본 대상을 끌기하더라도 모양이 불변하는 기하적 대상을 말한다. 그림과 도형 사이에는 항상 완벽한 일대일대응이 존재할 수 없으므로, 한 가지 그림을 어떤 도형의 대표적 예로 사용할 때 도형과 그림의 이러한 차이는 기하 학습의 장애가 될 수도 있다(Hershkowitz, 2002).

위에서 언급한 연구를 종합하여, 본 연구에서는 일반적으로 끌기를 했을 때 원래 모양을 유지하지 못하는 다이어그램을 '그림'이라고 하고, 원래 모양을 그대로 유지하는 작도된 다이어그램을 '도형'으로 구분하고자 한다. 그리고 '다이어그램'은 사용자가 그리거나 작도한 모든 기하적 대상을 언급하는 것으로 사용하고자 한다.

2. 역동적 표상으로서 끌기

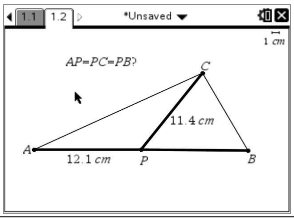
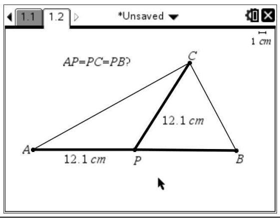
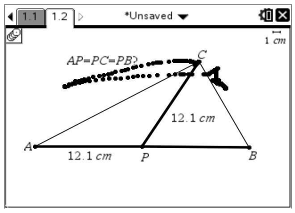
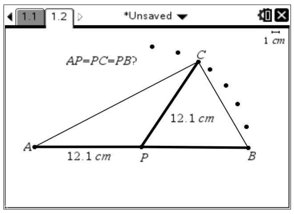
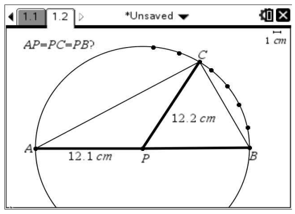
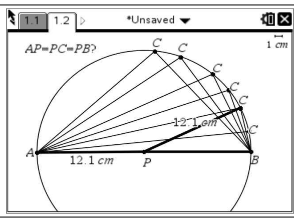
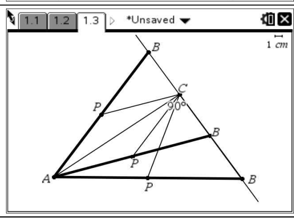
DGS는 학생들에게 작도한 그림을 손쉽게 조작할 수 있게 해준다. DGE의 "역동"이라는 특징을 대표하는 "끌기"는 작도한 그림의 어떤 성분을 자유롭게 움직일 수 있게 해서 그 변화된 조건에 대응하는 다른 성분들을 관찰하게 해준다(Goldenberg, Scher, & Feurzeig, 2008). 컴퓨터 화면에서 대상들을 끌기할 수 있고 점을 움직일 수 있다는 것은 지필에서는 학생들이 도저히 가질 수 없는 새로운 외적 표상이다. 이런 점에서 역동기하는 "새로운" 기하 유형이라고 할 수 있다(Olivero, 1999). Goldenberg(1995)는 끌기를 사용해서 임의의 방향으로 연장 가능한 선분과 상대적으로 각각 움직일 수 있는 점은 지금까지 배워온 유클리드 기하에서 다루었던 대상들의 표상과는 완전히 다른 것으로, 이것이 의미하는 것은 새로운 유형의 기하적 추론이 역동기하에서 일어나는 것이라고 했다. 본 연구에서는 이처럼 DGE에서 기하적 도형을 끌기에 의해 변화시키는 것은 하나의 도형이라는 한 표상체계 안에서 조작활동을 하는 것이므로 끌기를 "역동적 표상"으로 간주하고자 한다.

학생들의 끌기 유형이나 형태를 조사한 연구에 따르면 여러 가지 방법으로 끌기가 사용되고 있음이 밝혀졌는데, 이것은 역동적 표상의 다양한 유형으로 볼 수 있다. Olivero(1999)는 "삼각형 ABC가 주어져 있고, 점 P는 AB의 중점이다.



[그림 Ⅲ-2] 일곱 가지 끌기 유형의 구조화

<표 Ⅲ-1> DGE(Cabri의 경우)에서 사용되는 다섯 가지 끌기 유형

<table>
<tr>
<td>시행착오식 끌기
(wandering dragging)</td>
<td colspan="2">끌기 가능한 점 C를 잡고 움직여보면서 AP=PC=PB를 만족하는 많은 삼각형을 찾아본다. 이 끌기에서는 주어진 조건이 성립하는 경우를 찾을 수도, 못 찾을 수도 있다. AP=PC가 되는 경우 그때 그 삼각형의 특징을 생각해본다. 주어진 과제가 답이 있음을 깨닫게 된다.
</td>
</tr>
<tr>
<td>불변성탐색 끌기
(lieu muet dragging)</td>
<td colspan="2">삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되는 경우(주어진 조건 AP=PC를 만족하는 경우)를 찾기 위해 점 C를 끌기한다. 단순한 무작위의 시행착오식 끌기가 아니라 이등변삼각형이 되는 경우를 찾고자 하는 목적에 따라 끌기를 한다.
</td>
</tr>
<tr>
<td>흔적남기기 끌기
(line dragging)</td>
<td colspan="2">주어진 조건을 만족하는 각 경우를 흔적으로 표시한다. 이 흔적으로부터 P를 중심, PB(또는 PA)를 반지름으로 하는 원임을 관찰할 수 있다. 이제 숨겨진 경로(lieu muet)가 분명히 나타나게 된다. 이 관찰로부터 “P를 중심, PB(또는 PA)를 반지름으로 원주 위에 점 C가 있을 때, 주어진 삼각형이 이등변삼각형이 된다.”고 추측을 제기할 수 있다. 더 나아가 삼각형 ABC가 AB를 지름으로 하는 원에 내접하므로, “ABC가 직각삼각형이면 APC와 PCB는 이등변삼각형이 된다.”라는 더 정확한 논리적 추측을 세울 수 있다.
</td>
</tr>
<tr>
<td>재정의 끌기
(linked dragging)
(자취그리기 기능)</td>
<td></td>
<td>점 C를 원의 흔적 위에서 연속적으로 움직이도록 하려면 이 점을 원 위의 점으로 재정의해야 한다. 점 C-“도형 재정의(redefine)”-원의 순서로 선택하면 된다. 이제 주어진 조건을 만족하는 모든 삼각형들을 연속적으로 그릴 수 있다.</td>
</tr>
<tr>
<td>검사용 끌기
(dragging test)</td>
<td></td>
<td>임의의 직각삼각형 ABC와 AB가 중점, 선분 PC를 작도해서 이 삼각형의 끌기 가능한 모든 점을 끌면서 주어진 성질을 만족하는지 검사한다.</td>
</tr>
</table>

두 삼각형 APC와 PCB가 이등변삼각형이 되기 위한 삼각형 ABC의 성질에 대한 가설을 만드시오."(p. 6)라는 과제를 사용하여 <표 Ⅲ-1>과 같이 다섯 가지의 끌기 유형을 제시하였다. 그리고 "안내된 끌기(guided dragging)"와 "계약된 끌기(bound dragging)"[2] 유형을 추가하여 학생들이 과제를 해결할 때 사용하는 끌기 유형을 [그림 Ⅲ-2]과 같이 구조화하였다.

Arzarello et al.(1998)는 학생들이 세 가지 다른 형태의 끌기, 즉 (1) 시행착오식 끌기, (2) 검사용 끌기, (3) 불변성탐색 끌기(lieu muet dragging)[3]를 사용하고 있음을 발견했다. '시행착오식 끌기'는 다소 무작위로 하는 끌기로 학생이 마음속에 특별한 목적이 없이 도형으로부터 가능한 특징, 속성, 관계를 이리저리 둘러보면서 조사, 탐구하는 것을 말한다. '검사용 끌기'는 작도한 도형이 끌기를 하더라도 원하는 모양을 유지하는지 알아보는, 즉 끌기를 해도 불변하는 성질들이 있는지를 알아보는 끌기를 말한다.

Hoyles(1995)도 검사용 끌기는 작도한 도형을 끌기 했을 때 그 도형이 원하는 모양을 유지하지 못한 채 망가져버리지는 않는지를 조사해보는 것이라고 했다. 또한 검사용 끌기는 실제적인 문제에서 벗어나서 기하 작도의 이론적 의미를 도입하게 해준다. 끌기는 추측의 생산을 가져오는데, 끌기를 통해 도형을 움직이면서 탐구함으로써 학습자는 기하 도형의 불변적 성질을 발견할 수 있다. 그러므로 끌기는 탐구 단계에서 학습자에게 피드백을 제공하며, 이 피드백의 제공은 추측이나 성질에 대한 설명으로서 증명의 역할을 지원한다(Olivero, 1999). '불변성탐색 끌기'는 주어진 성질을 만족하는 예를 찾기 위한 끌기를 말한다.

Hollebrands(2007)의 10학년 상급 기하반 학생들을 대상으로 한 DGS 사용 전략에 대한 연구에 따르면, 학생들은 끌기를 네 가지 유형으로, 즉 (1) 작도를 검사하기 위해(검사용 끌기), (2) 추측을 입증하기 위해, (3) 끌기 모드에서 점의 행동을 관찰하기 위해, (4) 불변성을 찾기 위해(불변성탐색 끌기) 사용하는 것으로 나타났다. 하지만 그 결과를 해석하는 방식에서는 차이를 보였는데, 검사를 위한 끌기를 사용한 학생들은 작도에 포함되어야 할 성질이 어떤 것인지를 결정하고 이 정보로부터 작도를 수정하기 위해 끌기를 사용하였다. 다른 학생들은 끌기의 결과를 도형의 성질에 초점을 두지 않고 단순히 서술만 함으로써(예: "끌기를 하니까 더 이상 직사각형이 아니다.") 정확한 작도를 하는데 있어 더 큰 어려움을 겪게 되었다.

지금까지 살펴본 연구에 따르면 끌기는 외적 표상활동인 동시에 이 표상활동의 결과물이라고 할 수 있다. 끌기를 DGS의 어떤 특정한 기능이 아니라 역동기하의 표상을 생성하고 변화시키는 역동적 표상이나 표상활동으로 간주할 때 DGE에서 이 끌기의 의미가 더욱 풍부해지고 끌기 행동에 대한 다양한 이해가 가능하다는 사실을 알 수 있다.

---

2) "안내된 끌기"는 그 도형의 성질을 정의하는 기본 점들을 움직이는 것을 말하며, "계약된 끌기"는 이미 어떤 대상에 연결된 반끌기점을 움직이는 것을 말한다(Olivero, 1999).

3) "lieu muet"는 불어로 "리유 뮈에"로 발음되며, 그 뜻은 영어로 a hidden path(숨겨진 경로나 흔적)에 해당한다. 그런데 '숨겨진 경로'의 실제적 의미는 기하적 도형들 사이의 주어진 조건을 만족하는 불변성을 의미하므로 "불변성탐색 끌기"가 적합할 것이다. 그런데 DGS에서 이 불변성을 화면에 나타내는 방식에는 흔적(trace)과 자취(또는 경로, locus)가 있다. 이산적인 점의 형태로 표시되는 "흔적"은 유한번의 실험에 의해 발견한 불변성을 나타내는 것이고, 연속적인 실선으로 표시되는 "자취(또는 경로)"는 모든 경우로 일반화된 불변성을 나타낸다. GSP는 "흔적남기기/지우기" 기능이 있지만, CabriⅡPlus와 GeoGebra는 "자취(그리기)" 기능만 있다.

Ⅳ. 도구유발(誘發)행위로서 끌기

DGS와 같은 도구 사용에 의해 유발되는 행위, 즉 "도구유발행위(instrumented actions)"를 이해하기 위해 먼저 도구 중재의 개념을 살펴보고자 한다. 도구[4] 중재(tool mediation) 개념은, 학습자의 이해는 그가 사용하는 도구에 의해, 그리고 그와 도구 사이의 관계에 의해 형성된다는 것을 기본 전제로 한다(Meira, 1998). 이 전제는 사회문화 이론(예: Vygotsky, 1978)과 일치하는데, 사회문화 이론에서도 학습과 도구 사용 사이의 밀접한 관련성을 주장하고 있다. 교수-학습 과정에서 공학은 학습을 중재하는 도구가 되는데, 그 이유는 공학이 행위를 수행하는데 필수적으로 사용되는 언어와 기호 체계를 제공하기 때문이다. 예를 들어, 대칭 변환을 수행하기 전에 학생들은 먼저 대칭축을 나타내는 직선을 표시하기 위해 "중심지정" 명령어를 선택해야 한다. DGE에서 교사와 학생이 상호작용할 때, DGS에서 제공하는 공통의 언어를 사용해서 서로 의사소통을 한다. 더구나 화면을 동시에 쳐다보면서 화면에 작도된 대상을 지시하거나 대상에 대해 토론하면서 시각적 이미지를 사용해서 수학적 아이디어를 의사소통한다(Hollebrands, 2007). 이러한 역동적 표상 활동에 의한 상호작용 패턴은 지필기하 수업에서는 볼 수 없는 것으로, Cabri와 같은 DGS가 학습의 도구이면서 동시에 교실 문화까지도 바꿀 수 있는 중재 도구임을 추측하게 해 준다. 그리고 DGE에 의해 발생하는 이런 독특한 상호작용을 포함하는 행위는 도구유발행위의 일종이다.

Cabri는 기호적 중재(semiotic mediation)의 과정과 중재 기능을 한다. 그 이유는 Cabri에서는 작도한 도형(또는 그림)을 일종의 기호로 간주하기 때문이다. 물리적 세계에는 대상물(물리적 물건들)과 이 대상물의 사용 스킴(사용 용도나 계획)이 동시에 존재하는데, Cabri 같은 마이크로월드도 다음과 같이 이런 두 가지 존재의 특징이 있으므로 일종의 문화적 인공물이라 할 수 있다(Mariotti, 2000): (1) (물리적 대상물이 어떤 목적달성을 목적으로 하듯이) Cabri에 의해 작도된 대상도 어떤 목적 달성을 위한 존재이다. 여기서 목적이란 어떤 지식체, 즉 유클리드 기하를 통합하고자 하는 목적으로 설계되었음을 의미한다, (2) (이 작도된 대상의) 사용 스킴은 끌기를 통한 이론적 점검 과정을 통과하는 것이다. 즉 작도된 도형은 끌기를 해도 모양이 변하지 말아야 한다. 검사용 끌기는 원래 외부 지향적인 활동으로 작도된 도형의 올바름을 지각적으로 검사하는 것을 목적으로 한다. 그런데 이 끌기 활동이 동료나 교사와의 토론이나 의사소통을 위한 소재가 되는 순간, 작도의 올바름을 점검하는 원래 기능이 바뀌게 되어 어떤 의미를 지시하는(여기서 의미란 작도된 도형이 기하적인 이론적 측면에서 올바름의 의미) 하나의 "기회"가 된다. 따라서 Cabri 환경은 기호적 중재 기능을 가지고 있다고 할 수 있다.

인류학적 관점에서 볼 때, 수학 활동에서 교수학적 도구는 인공물(artifact)[5] 관점(정해진 기계

4) 본 논문에서는 'tool'과 'instrument'를 특별히 구분해서 사용할 경우가 아니라면 둘 다 '도구'로 번역한다. tool은 연장이나 공구(工具)로 어떠한 일을 하는 데에 사용되는 도구인데, 일 중심인 물질적 도구로 목적 달성용이다. 이에 비해 instrument는 도구(道具)로 인간의 기능을 확대하기 위한 보조 장치나 보조 기구를 말한다. tool이 일 중심인 물질적 도구인 반면 instrument는 어떤 목적을 이루기 위한 수단이나 방법으로 연장뿐만 아니라 악기도 instrument이듯이 음악이나 학습과 같은 추상적 목적 달성을 위한 심리적 도구일 때(Verillon & Rabarde., 1995, Zbiek et al., 2007 재인용) 사용하는 것이 적합하다. 이러한 구분은 tool이 instrument로 발달되어 학습의 도구나 수단이 된다는 도구발생(instrumental genesis)에 관한 주장에서도 볼 수 있다(Drijvers & Trouche, 2008).

5) 인공물(artifact)은 흔히 도구로 사용되는 대상을 나타내는데 그렇다고 반드시 물리적 대상일 필요는 없

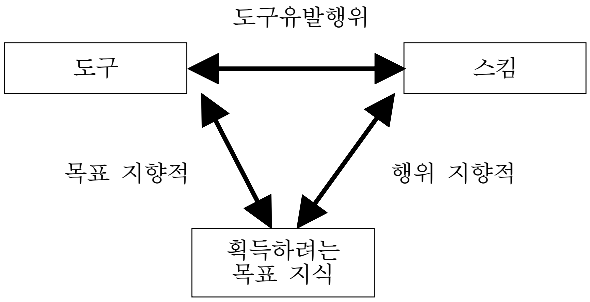
화된 계산을 수행하는 외적 대상으로서 관점)에서 수학적 과정의 계발이라는 중요한 중재 역할로 이동하게 된다. 물론 이러한 이동이 항상 일어난다고 보장되지는 않는다. 교육적 맥락에서 도구에 대한 최근의 인류학적 연구들은 공학 도구를 사용함으로써 사용자는 목표 지식을 구성하는 방식에 상당한 영향을 미치는 "도구유발스킴(instrumented schemes)"을 발달시킨다는 사실을 분명히 밝히고 있다(Rivera, 2005). 여기서 "스킴"은 과제 수행의 결과에 따라 개인이 구성하는 불변적 패턴을 가지는 행위를 말한다. 심리학적으로 스킴은, 도구와는 상관없이 개인이 과제를 통해 계발하는 정신 구조를 말한다. 인류학적으로는 스킴이 도구와 어떻게 상호 영향을 미치는지를 좀 더 넓은 관점에서 바라본다. 즉 도구가 특정한 스킴의 형성을 가능하게 하는 반면, 도구에 의해 생성되는 스킴은 또한 도구의 정교화를 가능하게 한다.

Vergnaud(1996, Drijvers et al., 2010 재인용)의 정신 스킴의 개념에 따르면, 스킴은 주어진 일련의 상황들에 대한 행동의 불변적 조직이다. 다시 말해, 스킴은 특수한 상황이나 과제를 다루는데 있어 다소 일정하게 정해진 개인의 행동 방식을 말한다. Rivera(2005)는 instruments와 tools를 구분하지 않으면서 도구는 중립적이거나 사람에 의해 만들어진 것(인공물)이며, 물리적 형태나 기호적(상징과 행위) 형태를 띤다고 했다. 그에 따르면, "도구유발행위"는 도구가 사용되는 수학적 상황의 본질에 따라 실제적인 활동과 인식론적 활동으로 구분된다. "실제적인" 도구유발행위는 실제적이며 기능적, 기술적, 상황적 지식을 출현시키기 위해 물리적 세계의 어떤 측면을 변경시키는 상황에서 도구가 사용되는 것을 말한다. 한편, "인식론적" 도구유발행위는 물리적 세계를 변경시키지 않으면서 그 세계에 대한 특수한 종류의 지식을 구성하게 하는 상황에서 도구가 사용되는 것을 말한다. 이런 행위에 의해 발생하는 지식은 규칙성이 있으므로 쉽게 범주화되고 일반화되는 상황하고만 관련된다.

공학 환경에서 도구유발행위에 의한 수학 학습은 [그림 Ⅳ-1]로 나타낼 수 있다. 도구의 처음 모습은 학습자에게 외부적 장치로 시작된다(Rivera, 2005). 이 도구가 학습자에게 점차 도구화되면서 학습자는 이 도구를 내면화한다. 그런 다음 학습자는 이 도구에 대한 스킴을 발달시키게 되어 도구의 사용 목적과 용도 등의 도구스킴이 생기게 된다. DGE를 포함해서 공학 환경에서 일어나는 학습의 경우 학습자가 의미 있는 도구스킴을 발달시키지 못한 채 어떤 지식을 획득하기 위해 도구를 사용하게 되면 그 지식은 절차적 지식에 불과하여 피상적일 수밖에 없다. 따라서 공학 환경에서는 도구에 의해 유발되는 행위와 그런 행위에 의해 형성되는 도구유발스킴이 수학 학습에서 중요한 역할을 하게 된다는 사실을 알 수 있다.

도구유발행위의 스킴에 대한 예는 DGE에서 나타나는 끌기 행동이다. Leung et al. (2006, Drijvers et al., 2010 재인용)은 끌기 활동으로 일어나는 변이성 중에서 기하적 불변성을 시각적으로 표상하는 능력이 DGE의 핵심적 특징이라

다. Rabardel(2002, Drijvers, Kieran, & Mariotti, 2010 재인용)은 주어진 상황에서 사용되는 도구가 인공물인지 아닌지는 항상 분명하지 않으며 인공물이 사용되는 방식도 명확하지 않다고 한다. 예를 들어, 글쓰기를 배우기 시작함에 따라 연필은 더 이상 그림 그릴 때 사용하는 인공물이 아니라 글쓰기를 위한 인공물로 바뀌게 된다. 글쓰기 기술의 발달과 함께 이제 연필은 글쓰기를 위한 도구(instrument)가 된다(Drijvers et al., 2010). Rabardel의 논의를 바탕으로 Drijvers et al.(2010)은 특수한 유형의 과제에 대해 인공물과 사용자 사이에 의미 있는 관계가 존재하는 경우 그 인공물은 "도구"가 된다고 한다. 인공물과는 달리 도구는 인공물을 사용하면서 사용자가 발달시키고 적용하는 정신 스킴과 관련된다. 그래서 이 관계를 하나의 공식으로 표현하면 "도구=인공물+스킴"으로 나타낼 수 있다.



[그림 Ⅳ-1] 공학 환경에서 도구유발행위에 의한 수학 학습 과정((Rivera, 2005, p. 135)

고 한다. 이 역동적 도구인 끌기는 수학적 실체의 개념적 영역(추상성)과 가상적, 경험적 대상들의 세계 사이를 연결해주는 역할을 한다. 이러한 가능성 때문에 지식의 구성을 가져올 수 있는 끌기 유형과 전략에 DGE 연구가 초점을 두고 있다고 한다.

DGE에 의해 중재되는 상황에서 학생들이 어떻게 증명 기술을 개발하는지를 밝히는 연구들이 있다(예: Jones, 2000; Mariotti, 2000). 이들 연구는 단순하거나 복잡한 기하 작도를 수행하는 Cabri에 탑재되어 있는 명령어(작도 기능)에 익숙해짐으로써 증명과 관련된 도구유발 스킴이 어떻게 발달하는지를 설명해주고 있다. Jones (2000)는 중학생을 대상으로 Cabri를 사용하여 사각형에 관한 비형식적 증명에서 형식적 증명으로 성공적으로 전환할 수 있는 방법을 찾고자 했다. 이 연구에 따르면, 사각형의 서로 다른 모양을 인식하고, 분류하고, 기술하는 지각적 능력으로부터 사각형의 성질과 이들 사이의 관계를 정의하고 연역적으로 추론해낼 수 있는 개념적 능력으로 학생들이 "점진적으로 수학화"가 진화되었다고 한다. 한 가지 관심이 가는 결과는, Cabri의 작도 기능에 내재되어 있는 "종속성"에 노출됨으로써 이 학생들은 모든 기하 도형들이 종속적 순서에 따라 작도된다는 점을 알게 되었다는 사실이다. 예를 들어, 한 점에서 만나는 두 직선의 경우 교점은 이들 직선에 종속되어있기 때문에 끌기 할 수 없지만, 이 두 직선은 끌기할 수 있다는 사실을 학생들이 알게 되었다. 그리고 이것은 일종의 도구유발행위로 볼 수 있다.

9학년과 10학년 학생들이 참여한 Mariotti(2000)의 연구는 Cabri가 어떻게 이들의 이론적 사고 발달에 영향을 주는지를 알고자 했다. Cabri에 탑재된 여러 가지 작도 명령어는 유클리드 기하의 정의와 공준, 정리를 반영하므로, 가상적이고 역동적 표상 모드에서 학습자에게 기하적 관계를 외현화하는 도구유발행위를 일어나게 한다. 다시 말해, Cabri로 기하적 대상들을 작도하는 사용자는 암묵적으로 유클리드 기하의 논리적 체계를 학습하게 된다. 이 연구의 학생들은 선분을 작도하고 이 선분과 동일한 길이를 갖는 선분으로 정사각형을 작도하는 과제를 제시받았다. Cabri의 작도 메뉴를 조작하는 기능이 숙달됨에 따라 이들 학생에게 유클리드 기하의 공리적 구조를 이해하는데 관한 좀 더 복잡한 선분의 중점 작도와 주어진 직선에 대한 수선 작도 과제를 제시하였다. 이 연구 결과에 따르면, Cabri 사용을 통해 학생들은 기하적 도형 작도에 필요한 이론적 의미를 부여함으로써 기하 작도를 더 이상 단순한 절차적 활동으로 취급하지 않게 되었다. 이 학생들은 도형의 일부분을 끌기하면서 다양한 가능성을 탐색할 수 있었고, 추측을 만들

고, 이론적 수준과 동시에 시각적 수준에서 이 추측을 증명하거나 반증, 또는 반례를 만들 수 있었다. 끌기를 통해 출현하는 이러한 수학적 활동들은 DGS라는 도구가 아니었다면 일어나지 않았을 활동이므로 도구유발행위라고 볼 수 있다.

Ⅴ. 어포던스로서 끌기

학생의 이해 형성을 도와주는 도구의 역할은 종종 도구가 제공하는 “어포던스(affordances, 행동유도성 또는 행동지원성)”라는 용어로 설명된다. 어포던스는 대상의 어떤 속성이 유기체(주로 사람)로 하여금 특정 행동을 하게끔 유도하거나 특정 행동을 쉽게 하게 하는 성질을 말한다. 인간 컴퓨터 상호작용, 인지 심리학, 산업 디자인, 인터렉션 디자인, 생태(환경) 심리학, 그리고 인공지능학 분야에서는 서로 다른 개념을 연결하는 것이란 뜻으로 쓰이기도 한다(위키백과, 2013). 다시 말해, 물건이나 대상과 유기체(사람이나 동물) 사이의 특정한 관계에 따라 나타날 수 있는 사용, 행위, 기능의 가능성을 의미한다. 예를 들어, 사과의 빨간색은 먹고자 하는 행동을 유도하며, 적당한 높이의 의자는 앉는 행동을 잘 지원한다. 어포던스는 James J. Gibson이 그의 1979년 저서 “시각적 지각에 대한 생태학적 접근(The Ecological Approach to Visual Perception)”에서 처음 사용한 용어이다(김정오 외, 2007; 이태연, 이승훈, 2010). 이에 비해 Donald A. Norman은 1988년 “일상의 디자인(The Design of Everyday Things)” 저서에서 어포던스를 인간과 컴퓨터 상호작용 분야의 관점에서 사용하기 시작하였다. 디자인 분야의 경우 어떤 물건, 서비스, 시스템을 만들기 위해 디자이너, 설계자, 엔지니어들은 사용자가 디자인된 물건을 직관적으로 보기만 해도 어떻게 사용할지 대략 짐작하여 사용하도록 하는 것이 편리한 디자인이라고 여긴다. 이때 어포던스가 잘 되어 있다면 그 쓰임새를 사용자가 이전의 경험에서 추론하여 디자이너의 의도대로 제시된 사용볍으로 이용하게 되는데 이런 경우를 좋은 디자인의 조건이라고 한다.

어떤 대상(물건)의 어포던스는 그 대상의 사용 가능한 특징을 표현하는 것이다(나은영, 2012). 즉 그 대상이나 도구를 어떻게 사용해야 사람이 원하는 것을 얻을 수 있는지를 우리에게 알려주는 특성을 그 대상 자체가 지니고 있는 것이다. 그런데 동일한 대상이라 하더라도 사람에 따라 어포던스가 다를 수 있다. 즉 같은 높이의 책상이라 하더라도 어린 아이에게는 너무 높아 ‘여기에 앉아야겠다’라는 느낌을 주지 못하는 반면, 어른에게는 앉아야겠다는 생각을 가지게 한다.

어떤 도구의 어포던스는 도구가 학습자의 행동과 사고를 어떻게 지원하는지를 말해주므로 행위의 잠재성이나 가능성으로도 생각할 수 있다(Hollebrands, 2007). GSP나 Cabri의 어포던스는 이들 DGS가 사용자로 하여금 대상을 작도하고 그 작도된 대상의 일부를 끌기할 수 있는 끌기 행동을 지원해준다. 이 어포던스는 학생이 기하적 성질들을 반영하는 불변성을 볼 수 있게 해서 기하적 대상, 성질, 관계에 대한 학생들의 사고를 지원해준다. 여러 연구자들이 끌기 기능과 같은 어포던스가 어떻게 그림과 도형에 대한 학생들의 추론을 지원하는지를 연구하였다(Hölzl, 1996; Jones, 2000). 역동기하와 지필기하의 차이를 어포던스 관점에서 살펴보면서, Hölzl(1996)은 종이나 컴퓨터 화면에 제시된 (물질적) 대상을 단순히 정적인 상태로 추론하는 것보다 끌기를 하면서 불변성에 대해 추론하는 것이 훨씬 강력할 것이라고 한다. 끌기 맥락에서 볼 때, 어떤 특징들은 변하고 다른 특징들은 그대로 변함없이 유지되는데, 이러한 행동은 기하적 대상의 정

의에 의해 일반적으로 규정된다. 그런데 정적 상태의 상황에서 보면, 학습자는 기하적 대상이 갖는 특징들이 무엇인지를 미리 알아야 하고, 그 대상의 정의에 따라 불변하는 특징이 무엇인지도 미리 알아야 하는 어려움에 직면하게 된다. 이런 면에서 역동기하와 지필기하는 어포던스에서 차이를 보이고 있다.

학생들은 끌기에 의해 필수적으로 출현하는 DGS의 다른 어포던스의 혜택을 이용할 수 있다(Hollebrands, 2007). DGE에서 학생들은 기하적 대상들(예: 선분, 각, 원)을 측정할 수 있는데, 끌기에 의해 이들 대상들의 모양이 변함에 따라 그 측정치들도 역동적이며 자동으로 업데이트된다. 측정 기능은 기하적 대상의 성질을 분석하는 데 사용될 수 있으므로, 이 어포던스를 통해 학생들은 그림에 대한 추론으로부터 기하적 대상(도형)의 성질에 대한 추론으로 전환할 수 있다. Hollebrands의 연구에서 학생들은 관계성 탐색, 추측 제기와 입증, 그리고 작도의 진위 점검을 위해 끌기로부터 지원되는 측정 기능의 어포던스를 사용하였다.

본 연구에서 주장하는 어포던스로서 끌기에 의한 측정은 단순히 DGS를 사용하여 작도한 삼각형의 넓이를 측정 기능을 사용하여 구하는 것을 말하는 것이 아니다. 삼각형의 밑변과 높이, 그리고 넓이 사이의 불변성을 탐색하기 위한 어포던스로 끌기를 사용하고 그로부터 측정치들 사이의 관계성 탐색에 사용될 때의 측정 기능 사용을 말한다. 측정치로부터 파악되는 불변성과 관계성은 종종 기하적 성질을 반영하는 것이므로 학생들의 주의를 그림에서 도형으로 전환시키는 것을 도울 수 있는 중요한 어포던스가 끌기로부터 유도되는 측정 기능이다. 학생들이 끌기 모드와 측정 기능과 같은 DGS의 서로 다른 지원성들을 어떻게 사용하는지를 이해하는 것은 그 도구에 탑재되어 있는 여러 가지 기능들을 가지고 무엇을 하는지를 연구할 수 있는 통찰을 제공해 줄 것이다.

DGE에서 다중 표상 사이의 번역(translation, 다중 표상들 사이의 대응 활동)과 변환(transformation, 한 표상 체계 안에서 조작 활동)은 DGS의 어포던스로서 끌기에 의해 영향을 받는다. DGS에 의한 표상의 유창성에 대한 효과는 Santos, Aguero, Borbon, & Paez(2003)의 연구에서 밝혀졌다. 이들은 고등학생을 대상으로 지필기하 환경과 역동기하 환경에서 정형 수학문제에 대한 풀이 방법의 탐색에서 나타나는 차이를 조사하였다. DGE의 풀이에서 학생들은 서로 연결된 다중 표상들, 기하적 다이어그램, 그래픽 표상을 넘나들면서 풀이 방법을 탐색했다. 특히 학생들은 DGS의 끌기를 사용해서 나타난 결과들을 일반화시키는 단계까지 발전했다.

Laborde(2005)에 따르면, 기하 학습은 연역적 추론 과정에서 이론적(기하적) 명제를 어떻게 사용하는지를 배우는 것이며, 또한 기하적 도형의 불변성에 담겨 있는 공간-그래프적 불변성을 시각적으로 인식하는 것을 배우는 것이다. 이런 전제 하에서 DGE에서 학생들의 기하 문제 풀이 과정에 대한 Laborde의 연구에 따르면, Santos, et al.(2003)의 연구와 마찬가지로 공간-그래프적 수준과 이론적 수준을 왕래하는 것이 문제 풀이에 결정적 역할을 했다. 학생들은 처음에는 기하 문제를 순전히 공간적 본질에서 접근하며 이론적 영역으로 진행하는 데는 시간이 걸렸다. 그런데 DGS의 어포던스로서 끌기를 사용함으로써 행위(관찰과 서술에 관련된 조작으로서)와 연역 추론(특수한 대상에서 분리된 지적 활동으로서) 사이의 전통적인 구분이 제거되거나 완화되었고 이로부터 공간적 영역과 이론적 영역 사이의 상호 이동이 가능해졌다. 지금까지 살펴본 연구들을 볼 때, DGE에서 다중 표상 사이의 번역이나 변환 또는 표상의 유창성 능력은 DGS의 어포던스

로서 끌기와 밀접하게 연관되어 있음을 짐작할 수 있다.

Ⅵ. 논의 및 제언

본 논문의 목적은 역동기하 환경에서 "끌기"의 역할을 살펴보는 것으로, 이를 위하여 DGE와 DGS에 관한 다양한 선행 연구를 고찰하였다. 이 고찰에 따라, DGE와 DGS에서 끌기는 크게 역동적 표상으로서 끌기, 도구유발행위로서 끌기, 그리고 어포던스로서 끌기라는 세 가지 관점으로 구분될 수 있음을 결론으로 도출할 수 있었다. 이들 각각의 관점에서 고찰한 끌기의 역할로부터 본 연구는 학교수학에서 끌기를 중심으로 DGE와 DGS를 활용한 기하의 교수-학습과 후속 연구를 위한 다음과 같은 논의와 제언을 할 수 있다.

첫째, DGE에서 끌기에 의한 기하 대상의 조작과 함께 불변적 성질의 관찰은 공리, 공준과 정의에 의해 연역적, 공리적, 형식적 기하인 지필기하를 "실험수학(experimental mathematics)"으로 접근할 수 있는 가능성을 열어주고 있다(Laborde, et al., 2006). 유클리드 기하를 관찰과 실험에 근거한 경험 과학으로 접근할 수 있다는 가정은 "수학이 물리학처럼 객관적인 세계를 기술한다면, 물리학이 하는 것과 똑같이 귀납적 방법을 수학에 적용하지 못할 이유가 없다."는 Gödel(1951, Borwein & Bailey, 2008, p. 1 재인용)의 말에서도 지지를 받고 있다. Borwein & Bailey에 따르면, 실험수학은 통찰과 직관이 생기게 하며, 기존에 발견하지 못한 새로운 패턴과 관계를 발견하게 한다. 그리고 역동적 표상의 사용으로 수학적 원리의 기본 구조를 파악할 수 있게 하고, 추측을 점검하고 특히 추측의 오류를 찾게 하며(반례 탐색), 형식적 증명 방법에 대한 힌트를 제공해 주는 등의 역할을 한다. 따라서 기하에 대한 실험수학적 접근 방법은 기하 교육과정의 구성이나 교수-학습 방법의 상당한 변화, 그리고 기하 교과와 기하 개념들에 대한 교사와 학생의 신념 변화까지도 가져올 것으로 예상되므로 이에 대한 연구가 필요할 것으로 본다.

둘째, 지필기하에서는 학생들로서는 상당히 어려운 순전히 정신 작용으로만 기하 도형을 조작하는 반면, 끌기 기능을 가진 DGS는 기하 도형을 가지고 학생들이 실험할 수 있게 함으로써 지각과 인지 작용의 중재자 역할을 한다. 이를 통해 학생들은 화면의 도형을 끌기하면서 전문 수학자들이 머릿속에서 하는 기하 문제해결 과정을 동일하게 실제로 경험할 수 있다. 화면에서 기하 대상을 조작하고 실제로 "경험"할 수 있으므로 DGS에서 기하 도형들로 이루어진 세계를 "경험의 장(a field of experience)"(Boero, et al., 1996, Olivero, 1999 재인용)이라 할 수 있다. 따라서 DGS를 사용하는 동안 학생들이 경험의 장에서 제기한 추측을 이론적 장인 기하 증명으로 이끌어나가는데 있어 어떤 유형의 끌기가 어떤 작용을 하는지를 밝히는 것이 중요할 것으로 본다.

셋째, 학생들마다 DGS를 기하 활동의 도구로 수용하는 과정과 그 도구 사용의 방법에 따른 기하 사고 활동도 다르다는 사실은 "도구발생(instrumental genesis)" 관점으로 잘 설명된다. 사용자의 지식과 경험에 의해 도구 사용 방식이 정해지고 이 사용 방식에 의해 그 도구는 다시 사용자의 용도에 적합한 도구로 다듬어진다. 이러한 과정을 "도구전용화(instrumentalization)"라고 한다. 또한 도구 자체가 가진 어포던스와 한계로 인해 도구마다 서로 다른 도구유발행위(예: 문제해결 전략 선택에서 차이, 기하 개념 습득 시 개념에 대한 스킴의 차이 등(Hollebrands, 2007))를 발생시키며 이 유발 행위들은 다시 사용자의 행동

과 사고를 조정한다. 이것을 "도구조정화(instrumentation)"라고 하는데, 도구발생은 이러한 두 가지 과정으로 나누어진다(Drijvers, et al., 2010). 따라서 DGS를 사용하는 동안 학생과 DGS 사이에 발생하는 도구전용화와 도구조정화 과정을 조사하고 이들 과정에 따른 학생들의 기하 학습의 다양한 측면을 살펴보는 연구가 필요하다고 본다.

넷째, DGS의 역동적 표상 행위인 끌기에 의해 만들어지는 화면의 기하 도형과 역동적 조작의 과정과 결과는 기하 수업 활동에서 의사소통이나 담화의 중요한 소재가 된다. 이를 소재로 하는 소그룹 활동이나 교사와 학생들 사이의 의사소통이나 담화의 패턴이나 내용은 지필기하와는 확연히 다를 것이라는 추측은 상당히 분명해 보인다. 따라서 끌기에 의한 역동적 표상을 사용해서 어떤 의사소통이나 담화가 발생하는지, 그 패턴은 지필기하와 어떻게 다른지, 어떤 추론 형태가 사용되며 그 추론의 출처는 어디인지, 기호적 표상(semiotic representation) 관점에서 지필기하와 역동기하에서 사용하는 기호나 기호 체계의 차이는 무엇인지 등에 대한 연구가 필요하다고 본다.

다섯째, 지필기하와 DGS의 중요한 차이점 중 하나는 DGS의 어포던스인 끌기에 의해 수반되는 측정 기능이다. 위에서 지적한 것처럼, 측정 기능은 끌기와 함께 DGE를 실험수학과 경험의 장이 되도록 하는 중요한 역할을 한다. 학생들은 역동적 끌기에 따른 측정값의 변화를 관찰하고 실험함으로써 실험수학과 경험의 장을 경험하게 된다. 따라서 학생들이 측정 기능을 언제 어떻게 사용하는지, 측정 기능이 학생들의 기하 개념이나 정리의 일반화와 추상화의 추론 과정에 어떤 역할을 하는지, 끌기와 측정 기능의 경험을 통해 역동기하의 표상 양식인 그림과 도형에 대해 지필기하와 어떤 다른 스킴을 가지는지 등에 대한 후속 연구가 필요하다고 본다.

후속 연구를 위한 또 다른 제언으로, 역동기하에서 사용하는 끌기 기능으로 인해 기본적인 기하 개념의 정의에 대한 학생들의 인식론적 변화에 대한 연구가 수행되었으면 한다. Olive(2000)의 연구에서 언급한 것처럼, DGS의 사용으로 어린 아이도 삼각형에 대한 기초적 정의를 추상화할 수 있었다. 삼각형의 이 정의의 인식론적 출처는 끌기를 통한 변의 길이와 방향, 크기와는 무관한 삼각형 모양의 불변성에 대한 인식과 발견이다. 이 출처에 따른 정의는 교과서나 교사를 출처로 해서 전달되는 지필기하의 정의와 근본적으로 다르다. 따라서 기하 도형의 정의에 대한 출처의 인식론적 차이는 학생들의 기하 도형에 대한 이해 과정과 수준, 정의의 적용이나 활용 정도, 기하 문제해결에서 도형 정의의 사용 등에서 차이를 보일 것이다. 뿐만 아니라 기하 문제해결 과정에서 발생하는 어려움의 원인이나 반힐레(van Hiele)의 기하사고 수준의 발달 과정(Burger & Culpepper, 1993)의 진행에 대한 힌트를 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

김정오, 곽호완, 박창호, 박권생, 정상철, 남종호, 도경수(공역, 2007). **감각과 지각(제7판)**. 서울: 시그마프레스.

나은영(2012). 소셜 미디어와 사회심리학: 트위터를 중심으로. In 김대호 외(편저), **소셜 미디어** (pp. 85-111). 서울: 커뮤니케이션북스.

위키백과(2013). 어포던스. 위키백과.

이태연, 이승훈(2010). 어포던스 이론의 본질과 디자인적용에 관한 연구. **한국공간디자인학회 논문집, 5**(4), 69-78.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 32-39). Stellenbosh: PME.

Balacheff, N. (1996). Advanced educational technology: Knowledge revisited. In T. T. Liao (Ed.), *Advanced educational technology: Research issues and future potential* (NATO ASI Series Vol. 145, pp. 1-20). Berlin: Springer.

Borwein, J., & Bailey, D. (2008). *Mathematics by experiment* (2nd Ed.). Wellesley, MA: A K Peters.

Burger, W. F., & Culpepper, B. (1993). Restructuring geometry. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 140-154). New York: Macmillan Publishing Company.

Clements, D. H., Sarama, J., Yelland, N. H., & Glass, B. (2008). Learning and teaching geometry with computers in the elementary and middle school. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 1 Research syntheses* (pp. 109-154). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Diezmann, C. (2005). Primary students' knowledge of the properties of spatially-oriented diagrams. In H. Chick & Vincent, J. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 281-288). Melbourne: PME.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2. cases and perspectives* (pp. 363-391). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M.-A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-147). Berlin: Springer-Verlag.

Goldenberg, E. P. (1995). Ruminations about dynamic imagery (and a strong plea for research). In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education, NATO ASI Series Vol. 138* (pp. 202-224). Berlin: Springer-Verlag.

Goldenberg, E. P., & Cuocu, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. I. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 351-368). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldenberg, E. P., Scher, D., & Feurzeig, N. (2008). What lies behind dynamic interactive geometry software? In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2 cases and perspective* (pp. 53-87). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hershkowitz, R. et al. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: A designer-researcher-teacher-learner activity. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international* *research in mathematics education* (pp. 657-694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 164-192.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(2), 169-187.

Hölzl, R. (2001). Using dynamic geometry software to add contrast to geometric situations: A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(1), 63-86.

Hoyles, C. (1995). Exploratory software, exploratory cultures? In A. A. DiSessa, C. Hoyles, R. Noss, & L. D. Edwards (Eds.), *Computers and exploratory learning* (pp. 199-219). Berlin: Springer.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 55-85.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keithel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology, NATO ASI Series Vol. 121* (pp. 48-67). New York: Springer Verlag.

Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in computer-based environments. In L. Burton & B. Jaworski (Eds.), *Technology in mathematics teaching: A bridge between teaching and learning* (pp. 35-68). Chartwell-Bratt.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatric, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning of mathematics education* (pp. 159-179). New York: Springer.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Sträßer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2008). The development of a dynamical geometry environment. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Vol. 2 Cases and perspectives* (pp. 31-52). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lehrer, R., Jenkins, M., & Osana, H. (1998). Longitudinal study of children's reasoning about space and geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 137-168). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Behr, M., & Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1989). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment.

Educational Studies in Mathematics, 44, 25-53.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education.* New York: Routledge Falmer.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 121-142.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2010). Symbols and mediation in mathematics education. In. B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 213-232). New York: Springer.

Olive, J. (2000). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. Plenary paper for the *Conference on Teaching and Learning Problems in Geometry.* Fundao, Portugal, May 6-9.

Olive, J., & Makar, K. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 133-177). New York: Springer.

Olivero, F. (1999). Cabri-Geometre as mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations: An exploratory study. *Proceedings of ICTMT4* (pp. 1-15). Plymouth.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs. seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 79-92.

Patsiomitou, S., Barkatsas, A., & Emvalotis, A. (2010). Secondary students' "dynamic reinvention of geometric proof" through the utilization of linking visual active representations. *Journal of Mathematics and Technology, 5*, 43-56.

Reed, S. K. (1999). *Word problems: Research and curriculum reform.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rivera, F. D. (2005). An anthropological account of the emergence of mathematical proof and related processes in technology-based environments. In W. J. Masalski & P. C. Elliott (Eds.), *Technology- supported mathematics learning environments: Sixty-seventh yearbook* (pp. 125-136). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Santos, M., Aguero, E., Borbon, A., & Paez, C. (2003). Students' use of technology in mathematical problems solving: Transforming technological artifacts into mathematical tools. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the North American Chapter, Vol. 4* (pp. 119-126). Hawaii: The University of Hawaii.

Tall, D. O. (1993). Interrelationships between mind and computer: Processes, images, symbols. In D. L. Ferguson (Ed.), *Advanced technologies in the teaching of mathematics and science* (pp. 385-413). New York: Springer-Verlag.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The role of representation in school mathematics: 2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Review of the Role of Dragging in Dynamic Geometry Environments

Cho, Cheong Soo (Yeungnam University)
Lee, Eun Suk (Daegu Hamji High School)

The purpose of this study is to review the role of dragging in dynamic geometry environments. Dragging is a kind of dynamic representations that dynamically change geometric figures and enable to search invariances of figures and relationships among them. In this study dragging in dynamic geometry environments is divided by three perspectives: dynamic representations, instrumented actions, and affordance. Following this review, six conclusions are suggested for future research and for teaching and learning geometry in school geometry as well: students' epistemological change of basic geometry concepts by dragging, the possibilities to converting paper-and-pencil geometry into experimental mathematics, the role of dragging between conjecturing and proving, geometry learning process according to the instrumental genesis perspective, patterns of communication or discourse generated by dragging, and the role of measuring function as an affordance of DGS.

* Key Words : dynamic geometry(역동기하), dragging(끌기), dynamic representation(역동적 표상), instrumented action(도구유발행위), affordance(행동유도성)

논문접수 : 2013. 5. 9
논문수정 : 2013. 5. 31
심사완료 : 2013. 6. 14