대한수학교육학회지 <학교수학> 제 15 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 15, No. 2, 389 ~ 404. Jun 2013

중학교 학생들의 시각적 예가 없는 기하문제해결과정 분석

조윤희* · 조정기** · 고은성***

연구자들은 수학의 진정한 이해를 위해 단순히 완성된 체계를 전달할 것이 아니라 학생들이 소박하고 직관적 수준에서 출발하여 점진적인 형식화 단계를 거쳐 연역적인 체계로 나아가는 경험을 할 수 있도록 지도할 것을 제안해 왔다. 본 연구에서는 학생들의 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제해결과정을 분석하여 학생들의 소박한 기하적 사고에는 어떠한 것이 있는지 조사하였다. 학생들이 보여준 소박한 사고에는 첫째, 조건과 문제의 관련성에 대한 이해 부족, 둘째, 시각적 자료에 의존한 직관적 판단의 활용, 셋째, 기하에서 특수한 사례의 역할에 대한 이해 부족, 넷째, 정당화되지 않은 가정의 사용 등이 확인되었다. 이를 교수학적으로 활용할 수 있는 방안 역시 논의되었다.

Ⅰ. 서론

수학에서 예(example)는 중요한 부분을 차지한다. 수학적 활동에서 예는 수학적 개념을 추상화하거나 일반화하는데 필수적이며, 유추적 사고를 위한 토대가 되기도 한다. 기하에서 제시되는 예는 주로 시각적 예이다. 이것은 일반화되고 추상화되어야 하는 대상을 나타낸다. 그러나 일반적으로 그려진 도형은 학생들에게 특정한 것으로 인식되기 쉽다.

개념학습을 위해 제시되는 시각적 예가 학생들에게 미치는 긍정적·부정적 영향에 대해 지속적인 논의가 있어왔다(권석일·박교식, 2011; Arcavi, 2003; Dvora & Dreyfus, 2004; Hershkowitz, 1989; Yerushalmy & Chazan, 1990; Zimmermann & Cunningham, 1991; Zodik & Zaslavsky, 2007). 예를 들면, 기하에서 개념을 처음 도입할 때 시각적 예가 학생들이 개념의 특징을 포착하고 성질을 관찰할 때 상당한 기여를 한다. 그러나 예로 제시되는 시각적 예는 일단 그림으로 표현되고 나면 학생들에게 종종 하나의 특정한 도형으로 받아들여진다. 그래서 하나의 시각적 예는 완전하고 풍부한 개념 이미지를 형성하도록 하는데 불충분하다. 또한 학생들이 이러한 시각적 예를 그 개념을 대표하는 일반성을 지닌 것으로 인식하기보다는 특정한 것으로 인식하면서 여러 가지 오개념을 양상하게 된다.

그러나 기하문제를 해결하는 과정에서 사용되는 시각적 예는 개념을 형성할 때 사용되는 것과는 상당히 다르다. 주로 문제를 이해하기 위한 도구로, 증명의 아이디어를 발견하거나 정당화 과정을 찾기 위한 도구로, 그리고 문제해결 결과를 전달하기 위한 도구로 사용된다. 기하문제를 해결하는 과정에서 사용하는 시각적 예는 문제와 함께 주어진 것일 수도 있고, 그렇지 않을 때, 즉 문제가 시각적 예를 제시하지 않고 글로만 제시되었을 경우 문제해결자가 스스로 고안

* 순천향대 교육대학원(jollyya@gmail.com, 제1저자)
** 순천향대(ckcho@sch.ac.kr)
*** 순천향대(kes7402@sch.ac.kr, 교신저자)

한 것일 수도 있다. 또한 문제에 시각적 예가 함께 제시될 때, 도형은 비율이 정확하게 유지되는 것일 수도 있고 그렇지 않은 개략적인 것일 수도 있다. 어떠한 형태의 시각적 예이건 다양한 방식으로 기하문제해결에 영향을 미친다는 것이 많은 연구에 서 관찰되고 있다(김진희, 2003; 임태규, 2009; 정은화, 2007; Dvora & Dreyfus, 2004; Kim, Lee, Ko, Park, & Park, 2009).

중학교 기하 영역에서 학생들은 평면과 공간 및 평면도형과 입체도형의 개념을 직관적으로 이해하고, 여러 가지 도형의 성질을 수준에 따라 직관적으로 또는 연역적 추론을 통해 이해하고 탐구하며, 이를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하는 학습 활동에 참여한다(교육과학기술부, 2008). 이렇게 기하문제해결을 통해 교육과정은 시각-직관적 수준에서 논리-연역적 수준으로 학생들의 사고의 진전을 도모한다. 선행연구에 따르면 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제해결 과정에서 학생들은 정당화의 필요성을 더 많이 경험하게 되며, 추론을 명확히 해야 하는 상황에 직면한다(Dvora & Dreyfus, 2004; Kim et al., 2009). 이러한 조건들은 학생들의 기하적 사고를 진전시킬 수 있는 좋은 소재가 된다. 따라서 기하문제해결과정에서 학생들의 사고의 진전이 어떻게 전개될 수 있는지 교수학적 전략을 모색할 필요가 있다. 이를 위해 사고의 진전에서 나타나는 학생들의 소박한 사고에는 어떠한 것이 있는지 좀 더 주의 깊은 관찰과 이를 활용할 수 있는 방안에 대한 논의가 필요하다.

소박하고 직관적 수준의 사고는 아직 연역적 체계를 갖추고 있지는 않지만 문제해결을 위한 주요 아이디어를 담고 있으며, 또한 문제해결자의 사고 흐름을 잘 반영하는 특징을 지닌다. 이러한 이유로 오랫동안 연구자들은 수학의 진정한 이해를 위해 단순히 완성된 체계를 전달할 것이 아니라 학생들이 소박하고 직관적 수준에서 출발하여 점진적인 형식화 단계를 거쳐 연역적인 체계로 나아가는 경험을 할 수 있도록 지도할 것을 주장해 왔다. 이러한 접근이야 말로 학습자의 사고 흐름을 고려한 자연스럽고 과학적인 지도방법이라 할 수 있다(우정호, 2011). 이것을 실현하기 위해 먼저 학생들의 소박하고 직관적인 수준에서의 사고에는 어떠한 것이 있는지 살펴볼 필요가 있다. 그리고 이것을 어떻게 점진적으로 형식화하도록 자극할 수 있는지 방안을 모색해야 할 것이다.

본 연구에서는 학생들의 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제해결 과정의 분석을 통해 기하적 사고 진전에서 나타나는 학생들의 소박한 사고에는 어떠한 것이 있는지 조사한다. 본 연구의 연구문제를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 학생들의 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제해결과정에서 나타나는 특징은 어떠한지 조사한다. 둘째, 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제가 학생들의 논리-연역적 사고 개발을 위해 어떻게 활용될 수 있는지 살펴본다.

Ⅱ. 선행연구

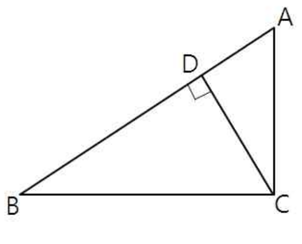
연구자들(류성림, 1999; 이종희 · 홍경아, 1995; Bishop, 1983; Zimmermann & Cunningham, 1991)은 기하교육에서 학생들이 시각적 처리 능력(ability for visual processing)을 개발할 수 있도록 지도할 것을 주장해 왔다. Bishop(1983)에 따르면 시각적 처리 능력은 시각화 능력뿐만 아니라 언어와 같은 비형상적 정보를 시각적 형태로 전환하는 능력을 포함한다. 시각적 처리 능력은 또한 과정에 관한 능력으로 제시된 자극물의 형식과 아무런 관련이 없다(나귀수, 1996에서 재인용).

기하에서의 시각적 예는 시각화에 상당히 의존한다(Zodik & Zaslavsky, 2007). 수학적 시각화

는 정신적으로, 또는 연필과 종이를 이용하여, 또는 공학 도구를 이용하여 이미지를 형성하는 과정(Zimmermann & Cunningham, 1991)으로 수학적 활동에서 중요한 역할을 한다. 연구자들은 수학문제해결과정에서 시각화의 영향과 다양한 오류에 대해 연구해 왔다. 시각화가 문제해결 전반에 특히, 수학적 추론 능력에 도움을 줄 수 있다는 사실은 여러 연구 결과 통해 확인할 수 있다(Arcavi, 2003). 그러나 학생들은 수학 문제해결과정에서 시각화 요소들의 외적 표상을 생성하기 전에 기본적으로 정신적 이미지를 먼저 생성하며, 정형화된 정신적 이미지의 경우 문제해결에 대한 학생들의 풍부한 사고를 억제하고 문제에 대한 부적절한 풀이 결과를 이끌어낼 수 있는 부정적인 측면을 지니고 있다고 연구자들은 주장한다(주홍연 • 권혁진, 2012).

기하에서 도형은 개념적 성질과 시각적 성질을 모두 지닌다(Fischbein, 2006). 완전성, 추상성, 일반성 등이 도형이 갖는 개념적 성질에 해당되며, 크기와 모양 등이 시각적 성질에 해당된다. 정신적 표상과 이미지 역시 시각적 성질에 포함된다. 정의, 개념, 정리 등에 의해 기하적 대상들의 특성이 결정된다. 그러나 정의나 개념들이 학생들에게 항상 명확하게 인식되는 것은 아니며 또한 잘 잊힌다. 그 결과 시각적 요소들은 형식적 통제에서 벗어나 독립적으로 작용하게 되고 기하에서 증명을 하거나 문제를 해결할 때 도형이 장애가 될 수도 있다(Dvora & Dreyfus, 2004).

Yerushalmy와 Chazan(1990)에 따르면 기하에서 도형에 의해 나타나는 장애는 다음과 같다. 첫째, 제시되는 도형을 집합을 대표하는 일반적인 것으로 인식하지 못하고 특수한 것으로 인식한다. 예를 들어, 삼각형의 외심에 대한 학습에서 임의의 삼각형을 대표하여 예각삼각형 그림을 사용할 때 삼각형이 둔각을 포함하지 않기 때문에 삼각형의 외심에 대해 학습하는 내용이 예각삼각형에 대해서만 다루어진다고 생각한다. 학생들 입장에서 시각적 자료인 도형은 임의의 것을 대표하지 않으며 또한 개별적인 특성을 지니게 된다. 둘째, 정의를 소개할 때 원형 도형(prototypical diagram)을 제시함으로써 비원형 도형에서 개념을 인식하지 못하거나 문제해결을 위한 융통성 있는 사고를 하지 못한다. 예를 들면, 삼각형의 높이를 정의할 때 반듯하게 위치한 삼각형의 높이를 예로 드는 경우 기울어진 삼각형을 제시했을 때 높이를 찾는데 어려움을 보인다. 셋째, 다양한 시각으로 도형을 보지 못한다. 하나의 큰 도형 속에 포개어 들어있는 다른 도형을 인식하지 못한다. 예를 들어, [그림 Ⅱ-1]은 도형은 서로 다른 크기의 직각삼각형이 포개어져 있다. 학생들은 문제해결을 위해 이 도형을 하나의 큰 직각삼각형으로 인식하는 것을 넘어 다른 크기의 직각삼각형도 볼 수 있어야 한다. 뿐만 아니라 선분 CD를 삼각형 ABC의 높이로 보는 동시에 삼각형 DBC의 한 변으로 볼 수 있어야 한다. 즉 하나의 그림으로부터 둘 이상의 개념을 포착해내야 한다.



[그림 Ⅱ-1] 서로 다른 크기의 직각삼각형이 포개어진 도형

임태규(2009)는 중학교 학생들을 대상으로 수학문제해결과정에서 나타나는 직관적 사고의 오류 상태는 어떠한지, 중학교 학생들의 학년에 따른 직관적 사고의 오류 유형의 차이는 어떠한지 조사하였다. 그의 연구 결과에 따르면 많은 학생들이 수학 문제해결 과정에서 문제 상황에 담겨

있는 여러 가지 다양한 요소를 분석하기 보다는 한 가지 요소에 집착하여 문제를 해결하려는 경향을 보인다. 또한 주어진 시각적 조건이나 정보들이 오히려 학생들에게 시각적 착시를 제공하는 요소로 작용함으로써 이로 인해 오류를 범하는 것으로 나타났다.

정은화(2007)는 중학교 3학년 학생들이 그림을 이용하여 기하문제를 해결하는 과정을 분석하였다. 연구결과에 따르면 수학 문제해결 방향 설정 단계에서 시각화된 표상은 그 자체의 이미지를 통해 직관을 발현하게 하였으며, 또한 학생들은 시각적 정보를 통해 문제해결의 실마리를 찾았다. 학생들은 문제해결 과정 속에서 감각에 의한 판단만을 중시하여 시각적 한계를 극복하지 못하고 오류를 범하기도 하였다. 학생들은 그림에 의존하여 얻은 자신의 해의 진위를 확인하기 위해 정당화 과정이 필요하다는 것을 인식하지 못하였다. 정은화는 그림의 시각적 정보에만 의존하면 그것이 사고의 장애로 작용할 수 있기 때문에 학생들이 문제해결을 시도할 때 문제에 대한 체계적이고 명확한 분석과 이해가 선행될 수 있도록 지도해야 한다고 제언하였다.

김진희(2003)는 중학교 3학년 학생들을 대상으로 기하문제에서 그림 제시 여부와 하위 문제 제시 여부가 문제해결 결과에 영향을 미치는지, 학생의 능력 수준에 따라 문제 제시 형태가 문제해결 결과에 영향을 미치는지 조사하였다. 그의 연구결과에 따르면 유의 수준 5% 이내에서 문제에 그림을 함께 제시했을 때 문제해결 결과에 차이가 있는 것으로 나타났다. 그러나 유의수준 5% 이내에서 하위 문제 제시 여부는 문제해결 결과에 영향을 미치지 않는 것으로 나타났다. 또한 문제해결 능력이 하위 수준인 학생들은 그림 삽입 여부가 문제해결 결과에 영향을 미치지 않는 것으로 나타난 반면 중간 수준과 상위 수준 집단에서는 문제에 그림을 삽입하는 경우 문제해결 결과에 긍정적인 영향을 미치는 것으로 나타났다.

Dvora와 Dreyfus(2004)의 연구에 따르면 도형이 제시되지 않은 기하문제를 해결하는 과정에서 학생들은 더 많은 정당화되지 않은 가설(unjustified assumption)을 만든다. 학생들은 정당화되지 않은 가정을 이용해 후진하기(backward) 전략과 전진하기(forward) 전략을 통해 증명 단계를 진행하거나 문제해결을 위한 과정을 진행한다. 후진하기 전략에서 정당화되지 않은 가정을 사용하는 학생들은 주어진 조건을 관찰하면서 이미 결론으로 이어지는 과정에 대한 계획을 머릿속에서 생각하는 반면, 전진하기(forward) 전략에서 정당화되지 않은 가정을 사용하는 학생들은 문제를 해결하기 위해 주어진 조건을 어떻게 사용할 것인지 고려한다. 이들의 연구에 따르면 도형이 함께 제시된 문제에서보다 도형이 제시되지 않고 글로만 문제를 제시한 경우 학생들은 더 많은 정당화되지 않은 가정을 만들어낸다. 연구자들은 또한 이러한 연구결과를 바탕으로 학생들에게 도형이 함께 제시된 문제뿐만 아니라 도형이 제시되지 않은 문제 등 다양한 유형의 기하문제를 제시할 필요가 있음을 언급하고 있다. Zodik와 Zaslavsky(2007)는 기하문제에서 그림이 제시될 경우 학생들은 더 이상 문제를 분석하려고 하지 않으며, 무엇을 구해야하는지 증명해야 하는지 살펴야 할 필요가 없어진다는 것을 문제점으로 지적하고 있다.

Hintikka와 Remes(1974)는 기하적 분석(geometrical analysis)에서 기하적 대상, 즉, 도형이 탐구되는 방식을 다음과 같이 설명하고 있다(Kim 외, 2009에서 재인용). 기하적 분석의 탐구에서는 '주어진 것' 뿐만 아니라 '구해야 하는 것'에서 언급되는 기하적 대상들의 지형(configuration)에 관한 정보를 동시에 이용해야 하며, 지형(configuration) 내에 포함된 하나의 기하적 대상

과 어떤 관계를 맺고 있는 다른 기하적 대상들까지 탐구해야 한다. 그리고 분석 과정 중 문제에서 기술되지 않는 새로운 기하적 대상이 인식된다면 이 기하적 대상이 기존의 기하적 대상과 어떤 기하적 성질로 관련되어 있는지 탐구해야 한다. 이러한 분석적 기하 탐구에서 다이어그램은 단순히 문제에 주어진 기하적 도형들을 나타내는 표상으로서 작용할 뿐만 아니라 문제에 기술되지 않았지만 문제해결과 관련된 정보를 담고 있으며, 특히 이러한 정보는 '구해야 하는 것' 및 '주어진 것'과 결합되어 다이어그램에서 시각화될 수 있다(Behboud, 1994, Kim 외, 2009에서 재인용).

Kim 외(2009)는 다이어그램을 그려야만 해결할 수 있는 작도 문제를 수학영재학생들에게 제공하고, 이들이 작도 문제를 해결하는 과정에서 다이어그램을 어떻게 활용하는지 관찰하였다. 이들의 연구결과에 따르면 수학영재학생들은 그들의 추론을 전개시키기 위해 정당화되지 않은 가정을 만들어 사용했는데, 연구자들은 이를 수학영재아들의 작도 문제해결 과정에서 나타나는 문제점으로 지적하고 있다. 즉 그들은 작도문제풀이에 부가적인 기하적 성질에 대하여 다이어그램을 이용한 추론에만 의존하게 되고 이러한 성질이 명확하게 탐구되지 않아 작도문제풀이에 정당화되지 않은 가정이 여전히 남겨진다는 것이다. 그러나 이들 연구자들은 학생들의 머릿속에서 진행되는 다이어그램을 이용한 추론을 명확히 하는 활동은 기하적 성질에 대한 추측과 발견을 이끌어 기하문제해결의 교육적 가치를 실현시키는 중요한 문제해결 활동임을 확인하고, 정당화되지 않은 가정을 인식하고 극복하는 방안이 마련되어야 한다고 제언한다.

지금까지 살펴본 선행연구에 따르면 기하 문제해결에서 시각화 능력은 문제해결 결과에 영향을 미친다. 그림 삽입 여부 역시 문제해결 과정 및 결과에 영향을 미친다. 문제에 시각적 예가 제시되었을 때 문제해결 결과가 우수한 결과가 관찰되었지만 여러 가지 단점도 발견되었다. 뿐만아니라 시각적 예가 제시되지 않은 기하과제는 학생들의 다양한 추론을 자극할 수 있으며, 다양한 접근을 가능하게 한다는 장점을 지니고 있음이 확인되었다. 이러한 이유로 연구자들은 학생들에게 도형이 함께 제시된 문제뿐만 아니라 도형이 제시되지 않은 문제 등 다양한 유형의 기하문제를 제시할 필요가 있음을 언급하고 있다. 이는 학생들이 도형이 제시되지 않은 문제를 해결할 때 보이는 특성을 조사하는 것이 다양한 측면으로 이루어질 필요가 있음을 시사한다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 연구 문제를 해결하기 위해 정성적 사례연구방법을 따른다. Merriam(2005)에 따르면 정성연구는 해석적 연구의 관점을 따른다. 해석적 연구에서 실험 과정 또는 실험의 의미에 대한 이해는 연역적, 또는 검증이기보다는 연구의 귀납적, 가설 또는 이론 생성 방법으로부터 얻어지는 지식으로 구성된다(Merriam & Simpson, 1995; Merriam, 2005에서 재인용). 정성연구는 기본적으로 귀납적 연구 전략을 사용한다. 정성연구의 신뢰도와 타당도를 평가하는 것은 연구의 구성부분을 점검하는 것을 포함한다. 정성적 사례연구에서는 인터뷰는 신뢰할 만하고 타당하게 구성되었는가? 관찰 결과와 문서의 내용은 적절히 분석되었는가? 그리고 사례연구의 결론들은 사례에 의존해서 도출되었는가? 에 대해 타당도와 신뢰도를 언급할 수 있다(Merriam, 2005). 본 연구는 내적 타당도를 높이기 위한 전략으로 삼각검증법, 동료 검토, 연구자 편견 등의 방법을 이용한다. 신뢰도를 높이기 위한 전략으로 연구

자의 위치, 삼각검증법 등의 방법을 이용한다 (Merriam, 2005).

1. 연구 참여자

본 연구에 참여한 학생들은 충남 ○○시에 위치한 중학교의 2학년 학생 4명(남학생 4명)과 3학년 학생 4명(남학생 2명, 여학생 2명)이다. 이들은 학교 성적이 상위 10% 에 속하는 학생들로, 수학과 영어 방과후 프로그램에 참여하고 있다.

본 연구는 학생들의 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제해결과정에서 나타나는 특징이 어떠한지 조사한다. 그리고 이를 통해 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제가 학생들의 논리-연역적 사고 개발을 위해 어떻게 활용될 수 있는지 살펴본다. 따라서 시각적 예가 제시되지 않고 글로만 서술된 기하문제를 어느 정도 해석하고 이해할 수 있어, 문제해결에 접근이 가능한 학생들을 연구 참여자로 선정하였다. 정성연구에서 연구 참여자의 선택은 상당히 중요한데, 이때 연구 대상자에 대한 연구자의 경험과 이해가 상당한 영향을 미친다(Mason, 1999). 연구자 중 1명이 2012년 3월부터 본 연구에 참여하는 학생들을 대상으로 방과후 수학 수업을 진행하고 있어 학생들의 수학학습 능력 등을 포함한 다양한 특징들을 상세히 파악하고 있다. 실험 과제를 개발하는 과정에서도 학생들의 다양한 특징들이 고려되었다.

2. 실험 과제

학생들에게 제시한 과제는 중학교 1학년 2학기의 ‘작도와 합동’, 중학교 2학년 2학기의 ‘명제와 이등변 삼각형’, ‘삼각형의 외심과 내심’에서 학습한 내용을 바탕으로 개발되었다. 본 실험은 2012년 9월에 이루어졌는데, 당시 연구에 참여한 학생들은 여러 가지 삼각형의 정의와 정리, 합동에 대한 개념을 이미 학습한 상태이다.

[그림 Ⅲ-1]은 본 연구에서 학생들에게 제시한 과제이다. 학생들은 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제를 해결한다. 즉 제시된 문제는 언어적 표현으로만 구성되어 있으며, 문제의 조건을 만족하는 삼각형 등의 시각적 정보는 제시하지 않고 있다. 따라서 학생들은 문제를 이해하고 해결하기 위해 문제에 주어진 조건을 이용하여 스스로 자신만의 그림을 그려야 한다. 그리고 자신이 그린 그림에 의존하여 문제의 답을 찾아야 한다. 개발한 과제를 연구참여 학생들에게 제시하기 이전에 글로만 제시된 정보를 이용해 문제에 부합하는 그림을 고안하는 것이 가능한지, 이중적인 해석으로 인해 문제해결 또는 그림 고안에 방해가 되는 요소가 없는지 확인하기 위해 대학생 1인에게 먼저 문제를 해결하도록 한 후 수정 작업을 거쳐 완성하였다.

[과제 1] 정삼각형 ABC에서 $\overline{AE}=\overline{CD}$가 되도록 점 E, D를 변AC , BC 위에 잡고 $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$가 만나는 점을 P, B에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\angle PBQ$의 크기를 구하라.

[과제 2] 변ㄱㄴ의 길이와 변ㄱㄷ의 길이가 같은 이등변 삼각형 ㄱㄴㄷ이 있다. 변ㄱㄴ, 변ㄴㄷ, 변ㄱㄷ 위에는 ㄹ, ㅁ, ㅂ이 있다. 삼각형ㄹㅁㅂ은 정삼각형이다. 각ㄴㄱㄷ의 크기가 36°일 때, 각ㄱㄹㅂ의 크기와 각ㅂㅁㄷ의 크기의 합은 얼마인지 구하여라.

[그림 Ⅲ-1] 실험에 사용된 과제

실험 과제를 학생들이 해결하기에 앞서, 연구자는 질문을 통해 학생들이 '작도와 합동', '명제와 이등변 삼각형', '삼각형의 외심과 내심'에서 학습한 내용을 상기할 수 있도록 독려하였다. 예를 들면, "중학교 1학년 작도와 합동 단원에서 무엇을 작도해 보았지요?", "삼각형의 합동조건에는 어떠한 것이 있었지요?"와 같은 질문을 통해 학습한 내용을 상기시켰다. 그러나 질문만 제시했을 뿐 이에 대한 자세한 내용을 설명하지는 않았다. 이는 학생들 스스로 어떠한 방식으로 이전에 학습한 내용을 활용하고 통제해 나가는지 확인하기 위한 목적으로 이루어졌다.

3. 자료수집 및 분석

자료수집은 2012년 9월에 이루어졌다. 방과후 수업시간에 먼저 [과제 1]을 제시한 후, 개별적으로 문제를 해결하도록 하였으며 충분한 사고가 일어날 수 있도록 40-60분 정도의 시간을 할애하였다. 학생이 문제를 해결하는 과정에서 만들어내는 시각적 자료를 보존하기 위해, 활동지에 기록된 모든 내용은 지우지 않도록 하였으며, 여러 장의 활동지를 사용하도록 하고 순서대로 번호를 기록하도록 하였다. 또한 학생들의 문제해결 과정에 대해서는 비디오 촬영이 이루어졌다. 1주일 이내에 문제해결 과정에 대해 개별 면담이 이루어졌는데, 활동지와 비디오 자료에 대한 개략적인 분석을 먼저 한 후 이를 토대로 면담이 이루어졌다. 면담과정에 대해서도 비디오 촬영이 이루어졌다. [과제 1]에 대한 면담이 완료된 직후 [과제 2]에 대해서도 동일한 절차를 걸쳐 자료수집이 이루어졌다.

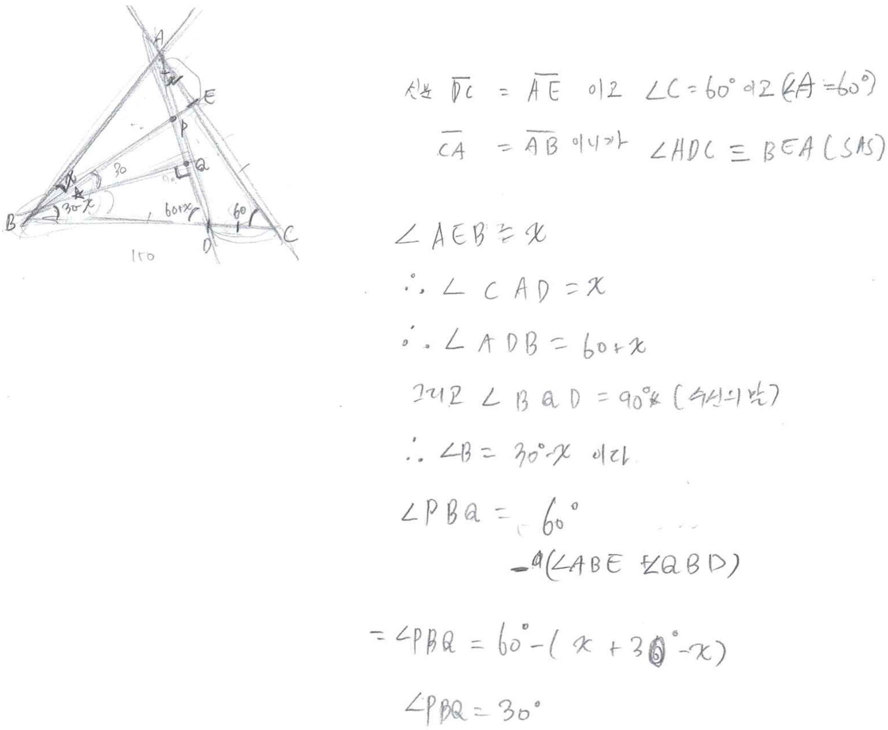
학생활동지를 토대로 먼저 학생들의 문제해결 방법을 귀납적으로 범주화하였다(Denzin & Lincoln, 1994; Mason, 1999). 즉, 학생들의 해결 방법을 기존 틀에 의존하여 구분하지 않고 각 학생들의 문제해결 방법을 분석한 후 유사한 유형끼리 그룹화하였다. 그리고 각 그룹내에서 다시 특징이 구별되는지 여부를 판단한 후 새로운 유형으로 분류하였다. 예를 들면, 가장 먼저 방정식을 이용한 경우와 그렇지 않은 경우로 그룹화하였다. 그리고 방정식을 이용하지 않은 해결 방법 내에서 특수한 경우를 이용한 경우와 그렇지 않은 경우 등으로 구분을 하였다. 각각의 유형에 속하는 학생들의 사고에 대해 조금 더 자세한 정보를 얻기 위해 비디오 자료와 면담내용을 활용하였다.

Ⅳ. 연구결과

시각적 예가 제시되지 않은 문제 상황에서 학생들이 어떻게 문제를 해결하는지 그 과정을 분석한 결과, 이러한 유형의 문제는 학생들로 하여금 문제에서 조건이 어떠한 의미를 갖는지 체험할 수 있는 기회를 제공하였으며, 또한 특수한 사례를 활용하는 기회를 제공하였으며, 시각적 정보를 이용하여 직관적 판단을 적극적으로 동원할 수 있는 기회를 제공하였다. 다음은 각각의 사항을 보여주는 학생들 반응에 대한 구체적인 사례이다.

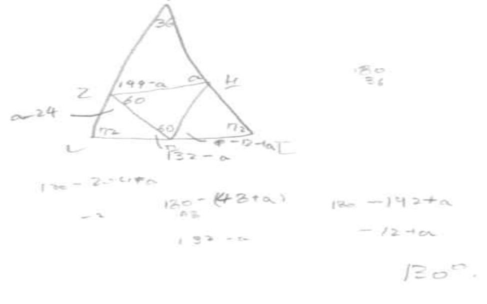
1. 연역적 방법을 이용

[그림 Ⅳ-1]은 우태가 [과제 1]을 해결한 방법이다. 이 학생의 경우 교육과정에서 학습한 삼각형의 합동조건, 이등변 삼각형의 성질, 방정식을 이용하여 적절히 문제를 해결하였다. 먼저 이등변 삼각형의 성질과 합동조건을 이용하여 삼각형 ADC와 삼각형 BEA가 합동임을 보이고, 구하고자 하는 것을 x로 놓고 방정식을 만들어 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅳ-1] 우태의 [과제 1] 해결 방법

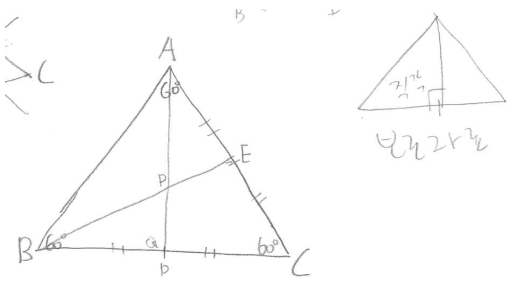
[그림 Ⅳ-2]는 준식이가 [과제 2]를 해결한 방법이다. 이 학생의 경우 삼각형의 성질, 이등변 삼각형의 성질, 방정식을 이용하여 적절히 문제를 해결하였다. 먼저 이등변 삼각형의 성질을 이용하여 ∠ㄱㄴㄷ과 ∠ㄱㄷㄴ의 각을 구한 뒤 ∠ㄱㅂㄹ을 a로 정하였다. 삼각형 내각의 합은 180°라는 것을 이용하여 방정식을 세우고, 이를 이용하여 문제를 해결하였다.



[그림 Ⅳ-2] 준식이의 [과제 2] 해결 방법

2. 특수한 사례의 활용

[그림 Ⅳ-3]은 명진이가 [과제 1]을 해결하기 위해 그린 그림이며, 이어지는 내용은 명진이가 과제를 해결한 후 연구자와 나눈 면담의 내용이다.



[그림 Ⅳ-3] 명진이가 [과제 1]을 위해 그린 그림

연구자: 명진아 어떻게 구한거야?

민 석: 제가요 생각을 해봤는데요, D를요 $\overline{BC}$의 중점에 놓잖아요? 그럼 $\angle BDA$가 수

직이 되는 거에요. 그럼 Q하고 D하고 같아질 것이라는 생각을 했어요.

연구자: 그래서 D를 $\overline{BC}$의 중점에 놓기로 했어? 그럼 E는?

민 석: 정삼각형이니깐 E도 $\overline{AC}$의 중점에 놨죠. 그럼 이 길이($\overline{AE}$)랑 이 길이($\overline{CD}$)는 어차피 같잖아요. 그럼 상관없죠?

연구자: 그 다음엔?

민 석: B에서 $\overline{AD}$로 내린 수선의 발이 Q 래요. 그럼 D랑 Q랑 같아요. $\angle PBQ$를 구하라고 했으니까 $\angle PBQ$는 $\angle EBC$ 랑 같아지고요. 그럼 당연히 30°가 되는 거죠.

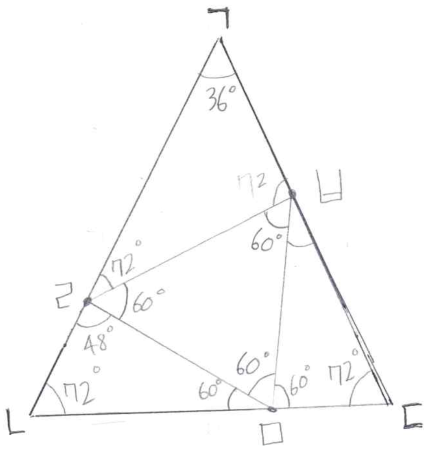
연구자: D와 E를 중점에 놓지 않아도 30°가 될까?

민 석: 글쎄요...(한참을 머뭇거린다)

명진이는 처음에 $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$의 중점이 아닌 점을 D와 E로 놓고 문제를 해결하고자 시도하였다. 그러나 해결방법을 쉽게 찾지 못하자 $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$의 중점을 각각 D와 E로 하는 특수한 경우를 이용하여 문제를 해결하였다. $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$의 중점을 각각 D와 E로 취해도 문제에서 요구하는 조건을 그대로 따르는 것이므로 이러한 접근이 가능하다고 생각을 하였다. 그리고 D가 Q와 같다는 것을 이용하여 다른 학생들보다 문제를 더 쉽게 해결할 수 있었다. 자신만의 방식으로 문제를 해결한 것이다. 그러나 D와 E가 $\overline{BC}$와 $\overline{AC}$의 중점이 아닌 곳에 놓일 경우 $\angle PBQ$의 크기가 30°가 되는지에 대해서는 확신하지 못했다. 이러한 문제해결 과정을 통해 학생의 기하적 사고를 평가할 수 있다. 첫째, 이 학생은 이러한 문제 상황에서 특수한 사례가 모든 사례를 포괄하는 일반화를 위한 도구로 사용될 수 있음을 인식하지 못하고 있다. 둘째, Duval은 기하 문제를 해결할 때, 변, 각, 꼭짓점 등 똑같은 요소를 한 번 이상 존재하는 것처럼 고려할 때 곤란을 겪는 '중복 장애'를 경험한다고 하였다(김남희 외, 2011). 이 학생의 경우 이러한 중복 장애를 극복하고 있다.

면담에서 다른 학생에게 명진이의 활동지를 제시한 후 이러한 해결방법이 적절한지 질문하였다. 문제의 조건을 적절히 활용하지 못했다는 것이다. E를 $\overline{AC}$의 중점에 잡으라고 하지 않았기 때문에 E가 $\overline{AC}$의 중점이 아닌 경우를 고려해 $\overline{AE}$와 $\overline{AC}$의 길이를 다르게 E를 정해야 한다는 것이다. 명진이와 같은 방법으로 문제를 해결할 경우 이와 유사한 문제가 나왔을 때 문제를 풀지 못할 수 있다는 것이다. 이러한 학생들의 사고(또는 의견)를 토론으로 확장한다면 이는 기하에서의 일반화와 특수화에 대한 사고를 학생들이 경험할 수 있도록 하는 장을 마련하는 좋은 소재가 될 수 있다.

[그림 Ⅳ-4]는 재진이가 [과제 2]를 해결하기 위해 그린 그림이며, 이어지는 내용은 과제를 해결한 후 연구자와 나눈 면담의 내용이다.



[그림 Ⅳ-4] 재진이가 [과제 2]를 위해 그린 그림

연구자: 그림은 잘 그린 것 같은데, 각을 특이하게 적어놨구나? 어떻게 이 각(∠ㄱㄹㅂ)과 이 각(∠ㄱㅂㄹ)의 크기를 같다고 했어? 눈으로 봐도 아닌데?

재 덕: 아 이건요 괜찮아요 이렇게 정해줘도

상관 없거든요. 제 생각엔

연구자: 이렇게 정해줘도 상관이 없다고?

재　덕: 네, 처음엔 여기(점ㅁ)요. 여기 이 세 각들을 60°라고 생각을 해 봤어요. 그랬는데, 제 눈으로 봐도 60°가 아닌거에요. 그래서 점 ㅁ의 위치를 약간 왼쪽으로 옮겨서 생각을 했어요. 그러면 안에 있는 정삼각형이 변하잖아요. 점 ㅁ의 위치를 왼쪽으로 옮기면 옮길수록 ∠ㄱㄹㅂ의 크기가 점점 더 커지더라구요.

연구자: 응 그렇겠지?

재　덕: ∠ㅂㅁㄷ의 각이 점점 작아질수록 ∠ㄱㄹㅂ이 커지니깐 어차피 문제에서 두 각의 합을 구하라고 했기 때문에 ∠ㅂㅁㄷ을 아무렇게나 정해도 두 각의 합은 같을 거라고 생각을 했죠. 그래서 ∠ㅂㅁㄷ을 60°라고 정하고 문제를 풀어도 상관이 없어요.

연구자: 그럼 ∠ㅂㅁㄷ가 60°가 아니고 다른 각이어도 정말 상관이 없을까?

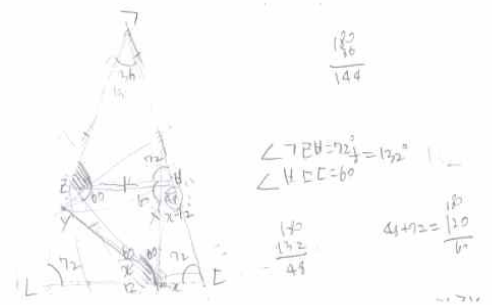
재　덕: 혹시나 해서 다른 각을 넣어 봤는데요, 어차피 132°가 나오더라구요.

재진이의 경우 문제의 조건을 활용하여 자신만의 그림을 고안하였다. 문제의 조건을 고려하여 그림을 그리는 과정에서 흥미로운 사실을 알아냈다. ∠ㄱㄹㅂ이 커질수록 ∠ㅂㅁㄷ은 작아지기 때문에 정삼각형 ㄹㅂㅁ이 어떻게 위치하는지는 중요하지 않다는 것이다. 그리고 ∠ㄱㄹㅂ이 커질수록 ∠ㅂㅁㄷ은 작아지기 때문에 그 합은 항상 일정할 것이라고 직관적 판단을 활용하였다. 물론 재진이의 해결방법은 수학적으로 더 다듬어져야 할 필요가 있다.

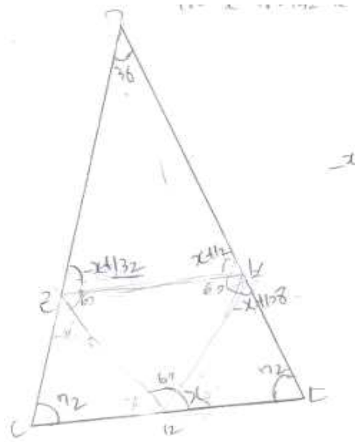
그러나 이러한 접근과 아이디어는 문제가 왜 두 각을 각각 구하도록 요구하지 않고 두 각의 합을 구하도록 요구하는지 그 이유를 분석하는데 사용할 수 있다. 그리고 두 각의 합을 구하라는 문제의 답이 어떻게 하나로 결정될 수 있는지 그 이유를 분석하는데 사용할 수 있다. 우태와 준식이가 사용한 연역적 방법은 교육과정에서 추구하는 가장 이상적인 해결방법일 수 있다. 그리고 수학적으로 상당히 완성된 형태의 해결방법일 수 있다. 그러나 이러한 방식으로 문제를 해결한 학생들이 문제가 왜 두 각을 각각 구하도록 요구하지 않고 두 각의 합을 구하도록 요구하는지, 문제의 답이 어떻게 하나로 결정될 수 있는지에 대해 이해하고 있음을 보장하지는 못한다.

재진이의 이러한 소박한 사고가 어떻게 우태와 준식이의 연역적 방법으로 이어질 수 있을지, 이를 위해 교사는 어떠한 교수학적 도움을 취할 수 있는지 이에 대한 논의가 필요하다.

[그림Ⅳ-5]와 [그림Ⅳ-6]은 진현이가 [과제 2]를 해결하기 위해 그린 그림이며, 이어지는 내용은 진현이가 [과제 2]를 해결한 후 연구자와 나눈 면담의 내용이다.



[그림 Ⅳ-5] 진현이가 [과제 2]를 위해 그린 첫 번째 그림



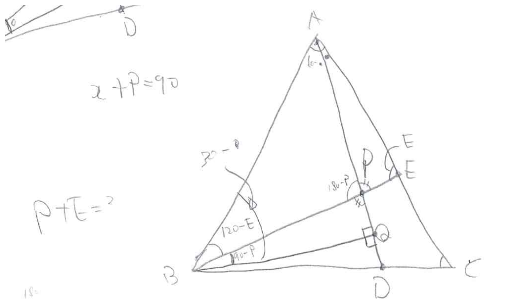
[그림 Ⅳ-6] 진현이가 [과제 2]를 위해 그린 두 번째 그림

연구자: 그림을 두 개를 그려놓았구나?
승 현: 네. 그리고 나니까 왠지 정확히 다시 그려봐야 할 것 같아서요.
연구자: 그게 무슨 소리야? 그럼 첫 번째 그림은 정확하지 않다는 말이니?
승 현: 첫 번째 그림도 맞는 것 같은데...
연구자: 왜 맞는 것 같은데?
승 현: 처음 그림은 작은 정삼각형의 변ㄹㅂ이 변ㄴㄷ과 평행한 것 같아서, 그렇게 문제를 풀었어요. 그랬더니 ∠ㄴ의 동위각인 ∠ㄱㄹㅂ의 크기도 알아 낼 수 있었고, ∠ㄷ의 동위각인 ∠ㄱㅂㄹ의 크기도 알아 낼 수 있었어요. 그러면 ∠ㄷㅂㅁ의 크기를 알아낼 수 있고, 또 ∠ㅂㅁㄷ의 크기도 알아낼 수 있었어요. ∠ㄱㄹㅂ은 72°, ∠ㄷㅂㅁ은 60°이니까 더하면 132°에요. 그런데...
연구자: 음... 그런데?
승 현: 작은 정삼각형이 큰 삼각형과 평행이 아닐 수 있을 것 같다는 생각을 했어요. 만약 변ㄹㅂ이 변ㄴㄷ과 평행이 아니라면 ∠ㄱㄹㅂ의 크기도 72°가 아니잖아요.
연구자: 그렇겠지? 그래서 그림을 다시 그려보았구나? 평행이 아닐 경우를 생각해서 작은 정삼각형을 처음 그림보다 더 비스듬하게 그렸구나?
승 현: 네. 그리고 ∠ㅂㅁㄷ을 일단 모르니까 x로 정했어요. ∠ㄷㅂㅁ의 크기를 구한 후 ∠ㄱㅂㄹ를 구했고, ∠ㄱㄹㅂ의 크기를 구했죠. 질문대로 두 각을 더했더니 아까 구한 답하고 똑같이 132°가 나왔어요. 그럼 첫 번째 그림도 맞는 그림이긴 해요.

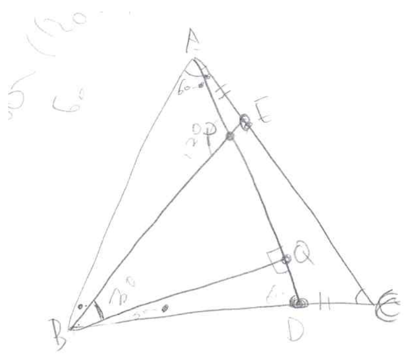
진현이는 문제를 이해하고 해결하기 위해 주어진 조건을 먼저 [그림 Ⅳ-5]와 같이 나타내었다. 그림을 완성하고 나니 정삼각형 ㄹㅁㅂ의 한 변 ㄹㅂ이 이등변 삼각형 ㄱㄴㄷ의 한 변 ㄴㄷ과 시각적으로 평행한 것처럼 보였고, 그래서 두 선분이 서로 평행하다 가정하고 문제를 해결하였다. 그러나 이 학생은 자신의 문제해결이 정확하지 않을 수 있다고 생각하였다. 자신이 그린 그림이 특수한 경우에 해당되는 것이기 때문에 다른 경우에, 즉 변 ㄹㅂ과 변 ㄴㄷ이 서로 평행하지 않은 경우에는 답이 달라질 수 있다고 생각하였다. 그래서 그림을 다시 그렸다([그림Ⅳ-6] 참조). 정삼각형 ㄹㅁㅂ의 변 ㄹㅂ이 변 ㄴㄷ과 평행하지 않도록 그림을 그린 것이다. [그림 Ⅳ-5]를 이용한 첫 번째 시도에서는 삼각형의 합과 동위각의 성질을 이용하여 문제를 해결한 반면, [그림 Ⅳ-6]을 이용한 두 번째 시도에서는 ∠ㅂㅁㄷ을 x로 놓고 삼각형의 내각의 합을 이용하여 방정식을 만들고 문제를 해결하였다.

3. 조건에 대한 신중한 접근

[그림 Ⅳ-7]과 [그림 Ⅳ-8]은 민기가 [과제 1]을 해결하기 위해 그린 그림이고, 이어지는 내용은 민기가 과제를 해결하는 동안 연구자와 나눈 면담의 내용이다.



[그림 Ⅳ-7] 민기가 [과제 1]을 위해 그린 첫 번째 그림



[그림 Ⅳ-8] 민기가 [과제 1]을 위해 그린 두 번째 그림

민　규: 선생님 문제가 이상한데요? 답을 알아낼 수가 없어요.

연구자: 뭐가 이상하다는 거지?

민　규: 문제를요, 하라는 대로 하면 답을 구할 수 가 없어요.

연구자: 음... 문제의 조건을 다 이용했어?

민　규: 네

연구자: 그런데 왜 못 구해?

민　규: 점(E와 D)을 어디에 찍느냐에 따라 각도($\angle PBQ$)가 달라져요.

연구자: 그래? 그럼 문제를 다시 한 번 잘 읽어볼까?

민　규: 네. E와 D를 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BC}$위에 하라는 대로 찍었구요.. P 와 Q도 잘 그렸구요..(잠깐 생각한다) 아아! 알았어요. 제가 $\overline{AE}$와 $\overline{CD}$가 같도록 E와 D를 정하지 않은 것 같아요. 그림을 다시 그려야겠네요.

민　규: (한참 동안 문제를 해결한다) 이제 문제가 풀리네요.

민기는 문제를 이해하고 해결하기 위해 문제에 제시된 조건을 이용하여 [그림 Ⅳ-7]과 같이 그림을 그렸다. 그리고 이 그림을 이용해 문제해결을 위한 단서를 찾으려고 다양한 시도를 하였다. 그러나 [그림 Ⅳ-7]의 그림대로 문제를 해결하게 될 경우 답을 구할 수 없다고 판단하였다. E와 D의 위치가 변함에 따라 구하는 각의 크기가 변한다고 판단하였다. 조건들을 모두 활용하여 그림을 그리고 문제해결 방법을 모색해 보았기 때문에 문제 자체에 오류가 있다고 판단을 하였다. 그러나 문제로 되돌아가 자신이 그린 그림이 문제의 조건을 모두 만족하는지 되짚어 본 후, 문제에 제시된 $\overline{AE}$와 $\overline{CD}$가 같다는 조건을 자신이 그림에 반영하지 않았다는 것을 발견하였다. 문제의 조건과 그림 사이를 오가며 [그림 Ⅳ-8]과 같이 수정을 한 후 성공적으로 문제를 해결 할 수 있었다.

학생은 첫 번째 시도에서 조건 $\overline{AE}=\overline{CD}$를 간과하여 문제에서 요구하는 답을 구할 수 없었다. 문제에 $\overline{AE}=\overline{CD}$를 조건으로 제시하지 않는다면 구하고자 하는 $\angle PBQ$의 크기가 일정하지 않으며, 따라서 답을 구할 수 없다고 판단하였다. 물론 이것은 시각-직관적 정보에 근거하여 내린 판단이지만, 이러한 경험은 문제가 성립하기 위해 조건이 어떠한 역할을 하는지 그 의미를 이해하는데 기여한다. 나아가 조건이 문제해결의 아이디어를 찾는데 있어 어떠한 의미를 갖는지, 어떠한 역할을 하는지 이해하는데 기여한다. 또한 시각적 정보가 제시된 문제를 접할 때도 조건을 좀 더 신중히 고려하도록 하는데 기여한다. 물론 시각적 예가 제시된 기하문제해결을 통해서도 문제에서 조건의 중요성을 경험할

수 있다. 그러나 경험의 종류나 그 경험을 통해 얻는 이해의 깊이에는 분명 차이가 있다.

Ⅴ. 결론 및 논의

본 연구에서는 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제를 활용하여 학생들의 소박하고 직관적인 기하적 사고를 조사하였다. 그리고 이에 대한 교육적 활용을 위한 시사점을 제시하고자 시도하였다. 이를 위해 중학교 2, 3학년 학생을 대상으로 시각적 예가 제시되지 않은 기하문제를 해결하도록 하고 학생들의 해결과정을 분석하였다. 학생들이 보여준 소박하고 직관적 수준의 사고에는 첫째, 조건과 문제의 관련성에 대한 이해 부족, 둘째, 시각(또는 그림)에 의존한 직관적 판단의 활용, 셋째, 기하에서 특수한 사례의 역할에 대한 이해 부족, 넷째, 정당화되지 않은 가정의 사용 등이 있었다.

민기의 경우 첫 번째 시도에서 조건을 임의로 해석함으로써 문제해결에 실패하였다. 그러나 잘못 해석한 문제의 조건을 올바르게 해석하고 활용함으로써 문제해결에 성공하였다. 이는 조건이 문제에서 어떠한 의미를 갖는지, 어떠한 역할을 하는지에 대한 이해가 결여된 모습을 보여주는 예이다.

민기의 경우 E와 D의 위치를 어디로 놓느냐에 따라 구하는 $\angle PBQ$의 크기가 달라진다고 생각하였다. 이는 자신이 그린 그림에 의존하여 직관적으로 내린 판단이다. 이러한 직관적 판단은 학생이 문제가 성립되지 않는다고 생각하게 되는데 결정적인 역할을 한다. 재진이는 ∠ㄱㄹㅂ이 커질수록 ∠ㅂㅁㄷ은 작아지기 때문에 정삼각형 ㄹㅂㅁ이 어떻게 위치하는지는 중요하지 않다고 생각했으며, ∠ㄱㄹㅂ이 커질수록 ∠ㅂㅁㄷ은 작아지기 때문에 그 합은 항상 일정할 것이라고 생각하였다. 이러한 재진이의 판단 역시 직관을 동원한 판단이며, 이는 문제해결에 결정적인 역할을 한다.

명진이의 경우 특수한 사례를 이용하여 문제의 해를 구하지만 이것이 일반적인 사례가 된다는 것을 인식하지 못하였다. 대수 등에서 접하는 일반화와는 달리 기하에서는 하나의 특수한 사례를 통해 일반화된 해를 구할 수 있다. 즉 기하에서 특수한 사례는 경우에 따라 그 집합을 포함한 모든 경우에 성립하는 일반성을 지닌다. 명진이와 우태의 경우는 이에 대한 이해가 결여된 모습을 보여주는 전형적인 예이다. 진현이는 첫 번째 시도에서 시각적 정보에 의존하여 변 ㄹㅂ과 변 ㄴㄷ이 서로 평행하다고 가정하고 문제를 해결하였다. 그리고 자신의 가정이 특수한 경우에 해당되기 때문에 잘못된 방법이라 생각하고 다른 방법을 찾아 문제를 다시 해결하였다. 그 결과 첫 번째 구한 해와 같은 결과가 나오자 특수한 경우를 이용한 해법이 다른 모든 경우를 포괄할 수 있음을 경험하였다. 이는 진현이가 기하에서 특수한 사례는 경우에 따라 그 집합을 포함한 모든 경우에 성립하는 일반성을 지닌다는 것을 미약하게나마 감지하고 이해하는데 기여한다.

시각적 자료가 제시되지 않은 기하문제에서 획일화되지 않은 방법으로 접근함으로써 소박하지만 풍부한 수학적 사고, 융통성 있는 사고가 발현될 수 있음을 학생들의 사례를 통해 살펴볼 수 있었다. 물론 학생들이 보여준 사고는 수학적으로 좀 더 정련되고 세련되어질 필요가 있음이 분명하다. 즉 시각-직관적 판단에 의존하여 문제를 해결하는 것은 수학에 있어서 엄밀성 결여의 문제가 있다. 그러나 이러한 시각-직관적 판단을 발판으로 이후 추론이 진행된다는 점을 고려할 때 시각적 예가 없는 기하문제해결이 학생들의 기하적 추론에 기여하는 것은 분명하다. 교육적

입장에서 고려해야 할 사실은 시각적 자료가 제시되지 않은 기하문제해결과정에서 나타나는 시각-직관적 판단에 대한 추가적인 정당화를 요구하는 전략을 사용함으로써 학생들의 기하적 추론 능력을 향상시킬 수 있다는 가능성을 확인한 점이다.

본 연구에서는 학생들의 소박하고 직관적 수준의 사고로 조건과 문제의 관련성에 대한 이해 부족, 시각(또는 그림)에 의존한 직관적 판단의 활용, 기하에서 특수한 사례의 역할에 대한 이해 부족, 넷째, 정당화되지 않은 가정의 사용 등이 관찰되었다. 이는 본 연구에서 사용된 기하문제와도 관련이 될 수 있다. 따라서 다양한 기하문제를 이용하여, 다양한 수준의 학생들을 대상으로 학생들에게서 나타나는 소박하고 직관적 수준의 사고에는 어떠한 것이 있는지 관찰하고 조사할 필요가 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2008). **중학교 교육과정 해설(Ⅲ) - 수학, 과학, 기술・가정 -** . 서울: 대한교과서 주식회사.

권석일, 박교식(2011). 우리나라 초등학교 수학 교과서에서의 입체도형 관련 지도 내용에 대한 분석과 비판. **수학교육학연구, 21**(3), 221-237.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2011). **예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

김진희(2003). **문제 제시 형태가 기하문제해결에 미치는 영향**. 건국대학교 석사학위논문.

나귀수(1996). 기하 교육에서 공간적 사고의 중요성에 대한 고찰. **대한수학교육학회 논문집, 6**(1), 189-201.

류성림(1999). 아동의 공간 직관력 향상을 위한 지도 방법에 대한 고찰. **한국수학교육학회 시리지 E <수학교육 논문집>, 8**, 91-105.

우정호(2011). **수학 학습-지도 원리와 방법_제2개정판 수정판**. 서울: 서울대학교출판문화원.

이종희・홍경아(1995). 공간 능력 신장을 위한 지도방안과 그 효과에 관한 분석. **대한수학교육학회 논문집, 5**(1), 169-185.

임태규(2009). **중학교 학생들의 수학문제해결과정에서 직관적 사고에 대한 오류 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

정은화(2007). **그림을 이용한 기하문제해결과정에 대한 사례 연구**. 이화여자대학교 석사학위논문.

주홍연, 권혁진(2012). 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 시각화의 구성 요소 및 활용에 관한 분석. **대한수학교육학회 논문집, 14**(1), 1-28.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 212-241.

Behboud, A. (1994). *Greek geometrical analysis. Centaurus, 37*, 52-86.

Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.173-203). New York, NY: Academic Press.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Dvora, T. & Dreyfus, T. (2004). Unjustified assumptions based on diagrams in geometry. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 311-318). Bergen: Norway.

Fischbein, E. (2006). **수학과학 학습과 직관**(우정호 외 공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1987년 출판)

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry - two sides of the coin. *Focus on Leraning in Problems Mathematics, 11*, 61-76.

Hintikka, J. & Remes, U. (1974). *The method of analysis: its geometrical origin and its general significance*. Dordrecht: D. Reidel publishing company.

Kim. J.-H., Lee, K.-H., Ko, E.-S., Park, M.-S., & Park, M.-M. (2009). Are gifted students aware of unjustified assumptions in geometric construction? In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp.337-344). Thessaloniki, Greece: PME.

Merriam, S. B. (2005). **정성연구방법론과 사례연구**(강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 공역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1998년 출판)

Merriam, S. B. & Simpson, E. L. (1995). A guide to research for educators and trainers of adults. (2nd ed.) Malabar, Fla.: Robert E. Krieger.

Mason, J. (1999). **질적연구 방법론**(김두섭 역). 파주: 나남출판. (영어 원작은 1996년 출판)

Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 199-219.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 265-272). Seoul: PME.

Analysis on Geometric Problem Solving without Diagrams of Middle School Students

Cho, Yun Hee (Graduate School, Soonchunhyang University)
Cho, Chung Ki (Soonchunhyang University)
Ko, Eun-Sung (Soonchunhyang University)

Researchers have suggested that students should be experienced in progress of geometric thinking set out in naive and intuitive level and deduced throughout gradual formalization rather than completed mathematics are conveyed to students for students' understanding. This study examined naive and intuitive thinking of students by investigating students' geometric problem solving without diagrams. The students showed these naive thinking: lack of recognition of relation between problem and conditions, use of intuitive judgement depending on diagrams, lacking in understanding of role of specific case, and use of unjustified assumption. This study suggests implication for instruction in geometry.

Key Words : geometric problem without diagrams(시각적 예가 없는 기하문제), naive thinking(소박한 사고), middle school students(중학생)

논문접수 : 2013. 5. 8
논문수정 : 2013. 5. 15
심사완료 : 2013. 6. 14