<Technical Lecture>
Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing, Vol. 33, No. 3: 289-292, 2013
ISSN 1225-7842 / eISSN 2287-402X

와전류탐상의 수치해석을 위한 지배방정식

Governing Equation for Numerical Analysis of Eddy Current Testing

신영길(전자기분과 위원장, 군산대학교)
Young Kil Shin (E-mail: ykshin@kunsan.ac.kr)

1 서 론

와전류비파괴검사와 관계된 이론은 물리나 전기전자 계열에서 다루는 전기자기학 이론에 근거하고 있기 때문에 해당 계열의 전공자가 아닌 분들은 그 이론을 접할 기회가 흔하지 않을 것으로 판단된다. 또한, 전자기분과 심포지엄이나 학술대회에서 만났던 몇몇 분들이 와전류탐상의 수치해석 소프트웨어에 대해 관심을 보이신 바 있는데, 그에 대한 설명을 이 강좌를 통해 드리면 어떨까 하고 생각해 보았다. 하지만 그렇게 하려면 수치해석에 대한 설명에 앞서 먼저 와전류탐상의 근본 이론이 녹아들어 있는 지배방정식이 확립되어 있어야 하므로, 이번 강좌에서는 와전류탐상과 관련된 전자기 이론을 먼저 설명하여 수치해석을 위한 지배방정식을 유도하고, 수치해석에 대해서는 차기 강좌들에서 다루고자 한다.

2. 와전류탐상과 관련된 전자기 이론

와전류탐상은 주로 비자성 도체의 검사에 사용되는데, 시간에 따라 변화하는 전류를 코일에 흘려주어 시변자계를 발생시키고, 피검사 도체가 그 시변자계 내에 위치하면 그 도체 표면에 와전류가 유도된다. 와전류는 폐회로를 형성하며 흐르는데 도체 표면에 전류가 흐르지 못하는 불연속 부위가 존재하면 그 부위를 우회하여 폐회로를 형성하게 된다. 한편, 와전류는 자기 자신의 자계를 발생시키는데 형성된 폐회로의 모양과 피검사체의 재질에 따라 발생시키는 자계 및 자속이 달라지며, 와전류가 발생시키는 자계는 코일에 흐르는 전류에 의해 발생된 자계의 변화를 억제하는 방향으로 형성된다. 이것은 마치 관성의 법칙과 흡사하게 현 상태를 유지하기 위하여 코일의 자계가 증가하거나 감소하면 와전류가 그에 반대되는 자계를 만들어 내는 것으로 해석할 수 있다. 이렇게 방향이 다른 두 자계의 벡터적인 합은 코일의 쇄교 자속 변화로 나타나게 되는데, 일정 주파수를 가진 교류를 코일에 흘려주는 일반적인 와전류탐상에서는 코일의 임피던스를 측정하여 임피던스 평면상에 그 궤적을 표시함으로써 도체 표면의 불연속의 존재여부와 크기 및 깊이 등의 정보를 파악하게 된다.

이러한 와전류탐상의 기본 원리는 이미 잘 알려져 있지만 수치해석의 출발점이 되는 지배방정식을 구하려면 상당한 전기자기학 지식이 필요하다. 본 강좌에서는 단계별로 필요한 전자기 이론을 설명해 가면서 지배방정식이 도출되는 과정을 설명해 보고자 한다.

2.1. Ampere 법칙[1]

일반적으로 전기, 자기와 관련된 법칙이나 이론을 말할 때 흔히 언급되는 것은 Maxwell 방정식이다. Maxwell 방정식은 전기와 자기의 통합된 이론을 말하고 있는데, 정적인 조건보다는 시간에 따라 변화하는 조건에 초점이 맞추어져 있다. 와전류탐상도 Faraday 법칙과 같은 시변 전자기 유도 현상을 다루고 있는 것이기는 하지만, 사용 주파수가 수 MHz 이하로 낮기 때문에 Maxwell이 Ampere 법칙에 추가로 도입한 변위전류밀도 ($\partial\overline{D}/\partial t$)는 전도전류밀도($\overline{J}$)에 비해 그 크기가 매우 작다. 따라서 수치해석시 변위전류밀도는 고려되지 않는데, 이와 같은 경우를 준정적장

(quasi-static fields)이라 분류한다.

Ampere 법칙은 전류가 흐르는 도선 주위의 자계와 전류 사이의 관계를 밝힌 것으로, 임의의 폐경로를 따라 자계의 세기, $\overline{H}$의 접선 성분을 선적분한 값은 그 폐경로에 의해 둘러싸인 총전류, I_{enc}와 같음을 말하고 있다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\oint_l \overline{H} \cdot d\overline{l} = I_{enc} \tag{1}$$

이 식의 좌변에 Stokes 정리를 적용하면 다음과 같고,

$$I_{enc} = \oint_l \overline{H} \cdot d\overline{l} = \int_S (\nabla \times \overline{H}) \cdot d\overline{S} \tag{2}$$

I_{enc}는 전류밀도, $\overline{J}$를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$I_{enc} = \int_S \overline{J} \cdot d\overline{S} \tag{3}$$

식(2)와 (3)의 면적적분을 비교하면 다음과 같은 식이 성립되는 것을 알 수 있는데

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} \tag{4}$$

이를 미분 형태의 Ampere 법칙이라 한다.

2.2. Solenoidal Property[1]

자계는 식(1)과 같이 매질의 영향이 반영되지 않고 오직 전류에 의해서만 결정된다. 매질의 영향은 자속에 반영되는데, 자계와 자속밀도 사이에는 $\overline{B} = \mu \overline{H}$의 관계가 성립한다. 여기서 μ는 매질의 투자율이라고 하는데 물질이 자화되기 용이한 정도를 나타내며 강자성체일수록 큰 값을 갖는다. 투자율은 엄밀히 말해서 자속밀도와 자계 간의 비(B/H)를 의미하며 자계가 변하면 그 비도 변화하므로 자속밀도와 자계 간에는 선형적인 관계가 성립하지 않는다. 또한 강자성체에는 자기이력현상이 있어서 자속의 변화를 쉽게 예측할 수 없기 때문에 일반적인 와전류탐상은 강자성체의 검사에 사용되지 않는 편이다. 꼭 필요한 경우에는 강자성체를 포화시켜 비투자율이 1이 되도록 한 후에 와전류탐상을 수행한다.

자속밀도의 발산값은 항상 0이 되는데 이를 solenoidal property라고 한다. 자속밀도의 발산은 다음과 같이 단위체적당 폐곡면을 통해서 밖으로 나가는 자속으로 정의되는데,

$$\nabla \cdot \overline{B} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \overline{B} \cdot d\overline{S}}{\Delta v} \tag{5}$$

주어진 점으로부터 얼마나 많은 자장이 발산되거나 퍼지는지를 의미한다. 예를 들어 양전하가 있는 영역에서 전속밀도의 발산을 취해보면 항상 양수가 되고 음전하가 있는 영역에서는 항상 음수가 된다. 따라서 양의 발산일 때에는 전속의 발원점(source) 즉, 양전하가 존재하고, 음의 발산일 경우에는 흡수점(sink) 즉, 음전하가 존재한다고 볼 수 있다. 자속밀도의 발산을 취했을 경우에는 항상 0이 되는데, 그렇다면 이는 자속의 발원점과 흡수점이 존재하지 않거나 항상 함께 존재한다는 의미가 된다. 실제로 자석의 N극과 S극은 어떠한 방법으로도 분리해 낼 수가 없으며 항상 함께 존재한다. 또한 이는 전속이 양전하에서 출발하여 음전하에서 끝나는 것과는 달리 자속은 시작점과 끝점이 없이 항상 폐회로를 형성한다는 것을 의미하기도 한다.

한편, 어떤 벡터계의 회전연산의 발산은 항상 0이라는 벡터 항등식,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \overline{A}) = 0 \tag{6}$$

와 solenoidal property를 비교해 보면 자속밀도를 $\overline{B} = \nabla \times \overline{A}$와 같이 벡터계, $\overline{A}$의 회전으로 표현할 수 있다는 것을 알 수 있는데, 이 때 $\overline{A}$를 자기벡터포텐셜이라 한다.

이제 이들을 식(4)에 적용하면 다음과 같은 식으로 변형된다.

$$\nabla \times \overline{H} = \nabla \times \frac{1}{\mu} \overline{B} = \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \overline{A}) = \overline{J} \tag{7}$$

도체 내에서 전류밀도, $\overline{J}$는 도체 내에 형성된 전계, $\overline{E}$와 도체의 전도도, σ의 곱으로 $\overline{J} = \sigma \overline{E}$와 같이 표현될 수 있으므로 식(7)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \overline{A}) = \sigma \overline{E} \tag{8}$$

2.3. Faraday 법칙[1,2]

Oersted가 1820년에 전류가 흐르는 도선 근처에 나침반을 놓으면 자침이 움직인다는 것을 발표하고 수주 후 Ampere가 전기와 자계 사이의 관계를 정밀하게 조사하여 Ampere 법칙을 공식화한 이후에 연구자들은 자계도 전기를 발생시킬 수 있는가에 대한 대답을 찾고자 노력하였다. Faraday는 1831년에 정자계는 폐회로에 전류를 발생시키지 못하지만, 시간에 따라 변화하는 자계는 폐회로에 유도전압(기전력, emf; electromotive force)을 발생시키며 따라서 도선에 유도전류가 발생된다는 것을 발표하였다[3]. Faraday의 전자기 유도법칙은 어떤 폐회로에 유도되는 기전력은 회로의 쇄교자속 시간변화율과 같다라는 것인데 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$V_{emf} = -N\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{9}$$

여기서 N은 회로의 권선수이고, Φ_m은 하나의 권선을 쇄교하는 자속이다. 음의 부호는 유도전압이 원래의 자속이 변화하는 것을 억제하는 방향으로 작용한다는 것을 뜻하며 이를 Lenz의 법칙이라 한다. 즉, 유도전류에 의해 발생되는 자계는 원래의 자계가 변화하는 것을 반대하는 방향으로 전류가 유도된다는 것을 의미한다.

이제 이를 와전류탐상의 경우로 생각해 보자. 코일에 교류전류를 흘려주면 시변 자계가 발생하게 되고 그 자계 내에 놓여있는 피검사체인 도체 내에 유도전류가 폐회로를 형성하며 흐르게 될 것이다. 이 경우에는 식(9)의 권선수를 1회로 간주할 수 있을 것이다. 코일의 단면이 원형이면 도체에 유도되는 전류도 원형의 폐회로를 형성하며 흐르게 되며 이것이 바로 와전류(맴돌이 전류, eddy current)이다. 와전류가 도체에서 폐회로를 형성하며 흐른다는 것은 그 폐회로를 따라 전계가 형성되었다는 것을 의미하며 이 전계를 emf producing field라 하고 이 폐회로에 유도되는 기전력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{emf} = \oint_l \overline{E} \cdot d\overline{l} \tag{10}$$

식(9)에 사용된 자속은 자속밀도를 면적적분하여 계산하므로 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$V_{emf} = -\frac{d}{dt}\int_s \overline{B} \cdot d\overline{S} \tag{11}$$

이 식에서 자속을 시간으로 미분하는데 자속이 시간에 따라 변화하는 경우는 두 가지 경우가 있다. 한 가지는 자속밀도, $\overline{B}$가 시간에 따라 변화하며 면적적분은 불변인 경우이고, 다른 한 가지는 자속밀도는 시간에 따른 변화가 없는 반면에 면적적분이 시간에 따라 변화하는 경우이다. 후자의 경우는 움직임이 있어서 폐회로가 형성하는 면적이 시간에 따라 변화하는 경우를 말하는 것으로 운동기전력과 관련이 있다. 와전류탐상에서는 폐회로의 면적이 변화하는 경우는 없으므로 전자만 고려하면 된다. 시간과 공간은 서로 독립적이어서 순서를 바꾸어 써도 상관없으므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{emf} = -\int_s \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{S} \tag{12}$$

식(10)의 우변에 Stokes 정리를 적용하면 다음과 같고,

$$V_{emf} = \oint_l \overline{E} \cdot d\overline{l} = \int_S \nabla \times \overline{E} \cdot d\overline{S} \tag{13}$$

식(12)와 (13)의 면적적분을 비교해 보면 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \tag{14}$$

이것이 Faraday 법칙의 미분형 표현이다.

이것을 자기벡터포텐셜을 사용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overline{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \overline{A}}{\partial t}\right) \tag{15}$$

이 식을 다시 정리해 보면

$$\nabla \times \left(\overline{E} + \frac{\partial \overline{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{16}$$

이 되는데, $\nabla \times (-\nabla V) \equiv 0$ 이라는 항등식과 비교해 보면 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\overline{E} = -\nabla V - \frac{\partial \overline{A}}{\partial t} \tag{17}$$

만약 시변계가 아니라면 시간 미분항은 사라질 것이고, 정전계에서의 표현대로 $\overline{E} = -\nabla V$가 될

것이며, 전류밀도는 $\overline{J}=\sigma\overline{E}=-\sigma\nabla V$ 로 표현될 수 있을 것이다. 와전류탐상은 교류전류를 사용하므로 시변계에 해당된다. 따라서 식(8)의 우변항을 식(17)을 사용하여 바꾸어 써보면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma\overline{E}=-\sigma\nabla V-\sigma\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}=\overline{J_s}-\sigma\frac{\partial\overline{A}}{\partial t} \tag{18}$$

여기서 $\overline{J_s}$는 코일에 공급된 전류밀도이며, $-\sigma\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}$는 와전류밀도를 의미한다. 식(8)에 식(18)을 대입하여 다시 쓰면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\nabla\times\frac{1}{\mu}(\nabla\times\overline{A})=\overline{J_s}-\sigma\frac{\partial\overline{A}}{\partial t} \tag{19}$$

이 식에서 자기벡터포텐셜, $\overline{A}$는 유일하게 정의되지 않는다. Helmholtz 정리에 의하면 어떤 벡터가 유일하게 표현되려면 그 벡터의 발산과 회전이 정의되어 있어야 하는데, 자기벡터포텐셜, $\overline{A}$는 회전($\nabla\times\overline{A}$)만 정의되어 있을 뿐, 발산($\nabla\cdot\overline{A}$)은 정의되어 있지 않다. 하지만 2차원 문제나 축대칭 문제에서는 $\nabla\cdot\overline{A}=0$이 자동적으로 만족된다. $\overline{A}$의 발산값을 0으로 선택하는 것을 Coulomb gauge라 한다. 안테나 문제의 경우에는 Lorentz gauge를 사용하는 것이 더 편리하다. 선형, 등방성 매질에서는 다음과 같은 항등식과 Coulomb gauge를 사용하여

$$\nabla\times(\nabla\times\overline{A})\equiv\nabla(\nabla\cdot\overline{A})-\nabla^2\overline{A} \tag{20}$$

식(19)의 좌변항을 바꾸면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2\overline{A}=\sigma\frac{\partial\overline{A}}{\partial t}-\overline{J_s} \tag{21}$$

교류 정상상태 해석을 하게 되면 변수들을 페이져로 변환하여 사용하게 되는데, 시간에 대한 미분항은 $j\omega$가 곱해지는 형태로 바뀌게 된다. 따라서 교류 정상상태 해석의 경우, 와전류탐상의 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다. 이 식에서 변수들은 모두 페이져 형태이다.

$$\frac{1}{\mu}\nabla^2\overline{A}=j\omega\sigma\overline{A}-\overline{J_s} \tag{22}$$

축대칭 해석이 가능한 경우, $\overline{A}$와 $\overline{J_s}$는 원통좌표계의 회전성분($\hat{\phi}$)만을 갖는 벡터이므로, 식(22)를 원통좌표계를 사용하여 표현하면 다음과 같은 과정을 거쳐 식(26)의 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\overline{A}=A\hat{\phi},\ \overline{J}=J\hat{\phi} \tag{23}$$

$$\overline{B}=\nabla\times\overline{A}=\left(-\frac{\partial A}{\partial z}\right)\hat{\rho}+\left(\frac{A}{\rho}+\frac{\partial A}{\partial\rho}\right)\hat{z} \tag{24}$$

$$\nabla^2\overline{A}=-\nabla\times(\nabla\times\overline{A})= \left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}\right\}\right]\hat{\phi} \tag{25}$$

$$\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}\right\}\right]=j\omega\sigma A-J_s \tag{26}$$

3. 맺음말

와전류탐상과 관련된 수치해석을 수행하기 위해서는 관련 전자기 이론이 잘 집적되어 있는 지배방정식이 먼저 확립되어 있어야 한다. 본 강좌에서는 와전류탐상과 관련된 전자기 이론을 단계별로 설명해 가면서 지배방정식이 도출되는 과정을 설명하였다. 아무쪼록 이 강좌가 와전류탐상을 이해하는데 도움이 되었기를 바란다. 차기 강좌들에서는 이번에 확립된 지배방정식을 이용한 수치 모델링 및 해석 과정을 다루게 될 것이다.

참고문헌

[1] Mathew N. O. Sadiku, "Elements of Electromagnetics," Oxford University Press, Inc. (2001)
[2] 김민준, 박동국, 최재하, 신영길, 이병로, "전자기학", 대영사 (2006)
[3] 박승범, 이창효, "알고 보면 재미나는 전기자기학", 전파과학사 (1997)