한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 2, 383-407, June 2013

의미 분석을 강조한 문제설정 모형 설계하기

전영배[1)] · 노은환[2)] · 김대의[3)] · 강정기[4)]

학교수학에서 학생들이 수동적으로 교수를 전달받는 상황에서 능동적이고 주체적인 입장이 될 수 있는 대안의 하나로 문제설정이 주목받게 되면서, 이에 관한 많은 연구가 활발하게 이루어져 왔다. 특히 Brown & Walter는 문제설정의 한 방법으로 What If Not 전략을 제시하였다. 이 전략에서는 문제를 설정하는 과정에서 속성의 변형은 불가피하게 이루어지며, 문제설정 후 그 문제의 풀이를 함으로써 문제설정 과정을 마무리 짓는다. 그런데 속성 간의 관련성에 대한 고려 없이 속성의 변형을 하게 되면 문제를 잘못 설정할 수 있다. 이러한 사실은 올바른 문제설정을 위해서는 속성들 간의 유기적 결합을 이끄는 관련성 인식이 매우 중요하다는 것을 시사한다. 그러나 문제설정에 관한 다수의 연구는 이에 대하여 주목하지 못한 것으로 생각된다. 이에 본 연구에서는 의미 분석이라는 활동을 추가하여 문제 속에 내재된 지식을 인식하여 올바른 문제를 설정할 수 있도록 도울 수 있는 문제설정 모형을 설계하고자 하였다. 그리고 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 하나의 예를 통해 구체화하여 보여주었으며, 이를 통해 모형의 의의를 살펴볼 수 있었다. 본 연구를 통해 학생들이 문제설정의 진정한 의미를 이해할 수 있는 기회를 갖게 되고, 능동적 학습자로 거듭날 수 있기를 기대한다.

주요용어 : 문제설정, What If Not 전략, 속성 간의 관련성, 문제설정 모형, 의미 분석.

Ⅰ. 서론

오늘날 학생들은 교과서, 참고서 등에 실려 있는 수학 문제를 교재나 교사가 가르쳐 주는 대로 비판 없이 풀게 되면서 수학적 지식을 수동적인 입장에서 단지 전달된 교수의 결과로 받아들이게 된다(Silver, 1994). 수동적인 입장에서 교수를 전달받는 학생들은 수학 문제는 원래 주어진 것이며, 이것의 해답과 풀이 역시 정해진 것이라는 잘못된 생각을 갖기 쉽다. 이러한 생각으로 수학 학습에 임하는 학생들은 수학에서 가장 중요한 것은 이미 완성된 정답을 좇는 것이며, 주어진 문제에서 정답을 찾아가는 것이 학습의 최종 목표라고 생각하기

1) 경상대학교(skywine@gmail.com)
2) 진주교육대학교(idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr), 교신저자.
3) 함양제일고등학교(goodidea01@hanmail.net)
4) 남산중학교(jeonggikang@gmail.com)

쉽다. 이것은 바람직하지 못한 현상이다.

이러한 문제점이 인식되면서 그 대안의 하나로 문제설정(problem posing)이 주목을 받게 되었다. Brown & Walter(1983)에 의하면, 문제설정은 문제를 새롭게 재구성하고, 새로운 문제를 만들어 보는 것을 말한다. 많은 수학교육 연구자들(Polya, 1981; Kilpatrick, 1987; Brown & Walter, 1990, 1993; Silver, 1994; NCTM, 2000)은 문제설정이 수동적 입장에서 교수를 전달받는 학생들을 능동적이고 주체적인 입장으로 가져올 수 있는 대안으로 인식하였다.

문제설정은 학생들로 하여금 다양하고 확산적인 사고를 촉진시켜 줄 수 있으며, 학생들의 문제해결 기술과 수학에 대한 지각력을 향상시켜 줄 수 있고, 수학의 기본적인 개념을 심화할 수 있게 해준다(Brown & Walter, 1983; English, 1996; Silver, 1994). 또한, 문제설정은 관련 내용에 대한 학생들의 이해를 깊게 하고 호기심과 다양하고 유연한 사고를 진작시킬 수 있으며, 수학에 대한 불안과 두려움을 감소시켜 학생들로 하여금 능동적이고 창의적인 학습자가 되도록 유도하는 효과가 있다(한옥동 · 박혜숙, 1997; Brown & Walter, 1993; English, 1997; Moses et al., 1990; Lavy & Bershadsky, 2003; Silver, 1994).

문제설정에 관한 연구는 크게 문제설정이 정의적 영역과 인지적 영역에 미치는 영향에 관한 연구, 문제설정 교수 · 학습 모형의 설계와 적용에 관한 연구로 구분해 볼 수 있다. 문제설정 활동이 흥미, 동기 유발, 자기주도적 학습능력, 태도, 적성, 성향 등의 정의적 측면에 미치는 영향력을 조사한 것으로 이상원(2004), 이옥경 · 이종희(1995), 한옥동 · 박혜숙(1997), Brown & Walter(1993), English(1997), Moses et al.(1990), Silver(1994) 등의 연구가 있으며, 문제설정이 정의적 영역에 미치는 영향 사이에 양의 상관관계가 있음을 보여주고 있다. 문제설정 활동이 문제해결력, 창의력, 수업 이해 등의 인지적 측면에 미치는 영향력을 조사한 것으로는 윤남진(1999), 이상원 · 방승진(2004), 전미라 · 허혜자(1998), 조재호·신인선(1999), Moses et al.(1990), Silver & Cai(1993), Goldenberg(1993), Mason(2000) 등의 연구가 있으며, 이들 사이에서도 역시 양의 상관관계가 드러나고 있음을 보여주고 있다. 이러한 결과들은 문제설정이 수학에서 중요한 활동임을 시사하는 것으로 볼 수 있을 것이다. 한편, 문제설정을 교수 · 학습에 효과적으로 적용하기 위한 수업 모형의 설계와 구현에 관한 연구로는 도종훈(2007), 정동권·박정수(1998), 정지호·임문규(1992), 최정화(1994) 등의 연구가 있으며, 이것은 문제설정이 교수 · 학습의 효과를 높이기 위한 효율적인 수단이라는 생각을 반영하고 있는 것으로 생각된다.

수학의 교수 · 학습에서 문제설정의 중요성이 인식되면서 이와 관련된 많은 연구가 이루어졌으며, 그 중 괄목할만한 성과는 Brown & Walter(1983)에 의해 이루어졌다. 그들은 문제설정의 한 방법으로 What If Not 전략을 제시하였으며, 이 방법을 필두로 문제설정에 관한 연구는 활기를 띄게 되었다. 이 전략에서 문제를 설정하는 과정에서 속성의 변형은 불가피하게 이루어지며, 이는 속성의 단순한 변형이 아니라 속성 간의 관련성 인식 하에 그 변형이 모색되어야 하는 것이다. 그러나 기존의 연구에서는 속성 간의 관련성[5]에 대하여 주목하

지 못했던 것으로 생각된다. 속성 간의 관련성이 고려되지 않은 채 단순하게 속성을 부정하여 문제를 설정하게 되면 잘못된 문제를 설정하게 되는 우를 범할 수 있다.

예를 들면, '삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a=2$, $b=4$, $c=5$일 때, 삼각형 ABC는 무슨 삼각형인가?' 라는 문제는 그 속성으로 '삼각형 ABC', '세 변의 길이 a, b, c' 그리고 '무슨 삼각형인가'라는 조건 등이 결합되어 만들어진 문제이다. 그런데 단순히 속성 추출과 부정을 통해 '삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a=2$, $b=3$, $c=5$일 때, 삼각형 ABC는 무슨 삼각형인가?'로 설정하였다면 이는 잘못 설정한 문제가 된다. 왜냐하면 $a=2$, $b=3$, $c=5$를 세 변으로 하는 삼각형은 존재하지 않기 때문이다. 또한 위 문제를 '삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a=-2$, $b=4$, $c=5$일 때, 삼각형 ABC는 무슨 삼각형인가?'로 설정하였다면 이 역시 잘못 설정한 문제가 된다. 왜냐하면 삼각형의 변의 길이인 a는 음수가 될 수 없기 때문이다. 그러므로 올바른 문제설정을 위해서는 단순한 속성의 추출과 그 속성의 부정만으로는 이루어질 수 없고, 속성들의 의미에 대한 음미와 속성들 간의 관련성 및 속성이 갖는 제한 조건을 인식하고 있어야만 올바른 문제설정이 가능하게 되는 것이다. 위 문제의 올바른 설정을 위해서는 삼각형의 결정조건 및 변의 길이는 양수라는 제한조건의 인식이 수반되어야 하는 것이다.

이러한 사실은 문제란 것이 단순히 속성들을 결합하면서 완성되는 것이 아님을 시사한다. 수학에서 문제는 속성들 간의 유기적인 결합이며, 이 결합이 유기적으로 이루어지기 위해서는 속성들 간의 관련성[6]에 대한 수학적 지식이 요구된다. 그런데 속성 간의 유기적 결합을 이끌어내는 이와 같은 지식들은 문제 자체에 외현적으로 드러나 있기도 하지만, 문제 속에 내재되어 있는 것이 대부분이다. 위의 예에서도 삼각형의 결정조건 및 변이 갖는 제한 조건이 문제 자체에 표면적으로 드러나 있지 않음을 알 수 있다. 이런 측면에서 수학에서 문제는 내재된 지식[7]에 의한 속성 간의 유기적 결합으로 볼 수 있을 것이다. 따라서 문제설정에서 문제에 내재된 지식을 인식하는 것은 매우 중요하며, 이것이 결여될 경우 올바른 문제를 설정할 수 없게 되는 것이다. 이처럼 문제설정은 단순한 절차적 조작에만 그치는 것이 아니라 고도의 수학적 지식이 요구되는 사고 활동에 해당한다고 볼 수 있다.

그러나 문제설정과 관련된 기존 연구는 문제설정의 이러한 측면보다는, 문제설정과 정의적·인지적 측면 간의 관련성 및 문제설정을 효과적으로 적용하기 위한 교수·학습 모형 설

---

5) '속성 간의 관련성'이라는 용어의 사용이 문제설정 이전과 이후에서 나타날 수 있어 일견 혼란스러울 수 있으나, 주의 깊프 고려해보면 구분에 어려움은 없다고 여겨진다. 따라서 본 연구에서는 '속성 간의 관련성'이라는 용어에 대해 '원 문제에서의 속성 간의 관련성'과 '설정된 문제에서의 속성 간의 관련성'을 엄밀하게 구분하여 사용하지 않는다.

6) 삼각형의 결정조건은 변들 사이의 관련성이며, 변의 길이가 갖는 제한 조건은 변의 길이와 양의 실수 사이의 관련성이다. 이런 점에서 본 연구에서는 이들을 모두 속성 사이의 관련성으로 보는 것이다.

7) 본 연구에서는 주어진 문제에서 속성 간의 유기적 결합을 이끌어내는 매개 역할을 갖는 수학적 지식들을 '문제 속에 내재된 지식'이라고 조작적으로 정의하여 사용할 것이며, 이 후 논의에서 등장하는 '내재된 지식'은 모두 이러한 뜻을 가진 용어로서 사용될 것이다.

계에 관심을 가져왔던 것으로 생각된다. 이것은 문제설정에 대한 교수・학습의 긍정적 측면을 부각하고자 하는 취지이기는 하지만, 문제설정의 또 다른 긍정적 측면인 속성들 간의 관련성의 중요성을 인식하지 못하고 간과한 것으로 볼 수 있을 것이다. 이에 본 연구에서는 설정된 문제를 풀어보는 것뿐만 아니라, 주어진 속성이 갖는 의미를 문제 속에서 음미해 봄으로써 설정된 문제가 옳은지 그른지를 판단해 보고, 어떻게 설정해야 올바른 문제가 될 수 있는지를 파악해가는 일련의 활동을 의미 분석이라 하고, 의미 분석을 강조하여 문제설정을 다루어 보고자 한다. 문제설정에서 의미 분석을 강조하게 되면 문제해결자는 문제에서 주어지는 조건의 관련성을 인식하게 되므로 문제에 대한 더 깊은 이해와 문제 구조를 더 잘 알게 될 것이다. 이러한 입장에서 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 설계하고 학습 상황에 사용하게 할 수 있다면, 학생들은 문제설정의 진정한 의미를 보다 잘 이해할 수 있게 될 것이며 능동적 학습자로 거듭나게 될 것으로 생각된다.

연구자 자신도 문제설정이 갖는 여러 가지 교육적 가치를 인식하고, 이를 교수・학습 상황에 적용하는 과정에서 문제 속에 내재되어 있는 속성들 간의 관련성을 간과하여 문제설정의 오류를 범하는 경우가 몇 차례 있었다. 이러한 오류는 속성들 간의 유기적 관계를 올바르게 인식하지 못한 데 기인했다고 생각된다. 이러한 연구자의 경험에 기반하여 속성들 간의 유기적 관계를 올바르게 인식하게 할 모형의 설계가 요구되었다.

이에 본 연구에서는 문제설정자[8]들이 문제 속에 내재된 지식을 인식하여 올바르게 문제설정을 할 수 있도록 돕는 것을 목적으로 한다. 이러한 목적을 달성하기 위해 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 설계하고, 하나의 예를 통해 모형의 의의를 탐색하는 것을 연구문제로 설정하였다.

본 연구의 Ⅱ장에서는 문제설정의 여러 측면에서의 교육적 가치와 여러 학자들의 문제설정 전략을 살펴보았다. Ⅲ장에서는 Brown & Walter가 제시한 What If Not 전략을 이용한 문제설정 사례로부터 도출한 시사점을 논의하고, 이를 바탕으로 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 설계하였다. Ⅳ장에서는 Ⅲ장에서 설계한 모형을 적용한 구체적인 예를 보여줌으로써 구축된 모형의 이해를 돕고자 하였다. 마지막으로 Ⅴ장에서는 본 연구에 대해 요약하며, 이후 연구의 결론과 제언을 제시하는 것으로 본 논문을 마무리하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제 설정의 교육적 의의

문제설정은 학자에 따라 다양하게 정의되어 왔으나 그 의미는 크게 다르지 않다.

---

8) 본 연구에서 문제설정자는 문제를 설정하는 주체이며, 그 주체는 학생이 될 수도 있으며 교사가 될 수도 있다.

Kilpatrick(1987)은 문제형식화(problem formulation), Silver(1994)는 문제생성(problem generation), Brown & Walter(1990)는 문제제기(problem posing) 등으로 문제설정이라는 용어를 대신하여 사용해 오고 있다.

이러한 문제설정의 교육적 의의로 Kilpatrick(1987)은 문제설정(문제형식화)을 문제의 조건의 일부 또는 전부를 변경시켜 새로운 문제가 나올 수 있도록 하는 것이라고 하면서, 문제를 다양하게 수정하였을 때 학생들은 문제의 해답이 어떻게 영향을 받는지를 반성할 수 있다고 하였다.

문제설정은 크게 두 가지 측면에서 교육적 가치를 지니고 있는 것으로 볼 수 있다. 하나는 정의적 측면에서의 교육적 가치이며, 다른 하나는 인지적 측면에서의 교육적 가치이다.

먼저 문제설정의 정의적 측면에서의 교육적 가치로 Brown & Walter(1993), English(1997), Moses et al.(1990), Silver(1994) 등은 문제설정이 수학에 대한 두려움과 걱정을 감소시킨다는 것을 연구를 통해 보여주기도 하였다. NCTM(1989) 역시 문제설정의 정의적 측면에서의 교육적 가치에 대하여 주목하였으며, 문제설정은 학생들을 수동적인 문제해결자에서 능동적인 문제해결자로 변화시키고, 수학적 발견의 힘을 제공하는 장점이 있다는 점을 강조하였다. 뿐만 아니라 문제설정 수업에서는 단 하나의 정답만이 존재하는 것이 아니기 때문에 학생들에게 수학이 덜 위협적인 과목이 될 수 있다는 점을 제시하고 있다.

다음으로 인지적 측면에서의 교육적 가치에 대해 살펴보기로 하자. Polya(1981)는 문제설정의 인지적 측면에서의 교육적 가치에 주목하였으며, 문제설정을 문제해결의 수단으로써의 문제설정과 문제를 해결한 후 새로운 문제설정이라는 두 가지 측면을 논하고 있다. 이를테면, 초등 수학에서 자주 등장하는 단순화하기 전략은 문제해결의 수단으로서의 문제설정에 해당할 것이고, 일반화하기 위해 문제를 재설정하는 것은 문제해결 이후의 문제설정이 될 것이다. 같은 맥락에서 Brown & Walter(1990)는 문제설정의 교육적 측면을 문제해결과 관련지어 보다 자세히 설명하고 있다. 그들에 의하면, 문제설정은 두 가지 방식으로 문제해결 과정과 관련된다. 첫째, 문제해결 과정에서 새로운 문제를 설정해봄으로써 원 문제를 재해석하게 되고 문제를 해결할 수 있는 단서를 얻게 되는 것이다. 이는 Polya가 지적한 문제해결의 수단으로서의 문제설정에 해당하는 것이라 할 수 있다. 둘째, 원 문제와 다른 문제를 설정하고 그 문제를 분석해보지 않으면 문제를 해결하고 나서도 그 의미를 이해하지 못하는 경우가 발생할 수 있다는 것이다. 이는 Polya가 지적한 문제해결 이후의 문제설정이 될 수 있다.

한편, Brown & Walter(1990)는 정의적·인지적 측면에서의 교육적 가치를 다음과 같이 제시하였다. 첫째, 흥미를 유발하여 학습함으로써 수학 과목의 성적이 향상된다. 둘째, 생활속에서 필요한 흥미로운 지식을 얻게 된다. 셋째, 사고력을 도야하고 개념을 적용하는 능력이 길러진다. 넷째, 자율적 자기주도적 학습능력이 길러진다.

이상에서 문제설정은 단순히 새로운 문제의 만들기가 아니라 주어진 문제의 해결과 이 문제에 대한 보다 깊이 있는 통찰에 이르게 하는 수단임을 알 수 있었다. 본 연구에서는 원 문제로부터 문제를 설정하고 그 문제를 깊이 있게 분석해보지 않으면 문제를 해결하고 나서

도 원 문제에서 주어진 조건의 의미를 이해하지 못하는 경우가 발생될 수 있음에 주목하였다. 따라서 문제해결 이후 문제에 대한 보다 깊이 있는 이해에 이르게 하는 수단으로서 문제설정 모형을 설계하고자 한다.

2. 문제 설정의 단계

본 절에서는 문제설정의 단계에 대해 살펴볼 것이다. 문제설정의 교육적 의의가 학자들마다 조금씩 차이가 나는 만큼, 문제설정의 단계 또한 학자별로 차이를 갖는다.

먼저, Brown & Walter(1990)는 문제설정을 크게 수용(accepting)과 도전(Challenging)으로 구분하고 있다. 수용이란, 문제설정의 첫 단계로서 주어진 것을 있는 그대로 받아들이는 것으로, 관찰과 추측, 구체적이고 특별한 것, 내적 탐구와 외적 탐구, 정밀한 탐구와 근사적 탐구, 역사적 탐구의 다섯 가지로 분류할 수 있다. 문제설정의 두 번째 단계인 도전은 주어진 것을 그대로 수용하는 것이 아니라 원문제에서 주어진 조건이나 속성을 나열하고 그것을 여러 가지로 바꾸어 그 결과가 어떻게 변화하는지를 알아보는, 즉 새로운 질문을 제기하는 경우이다. Brown & Walter는 이 단계에서 사용되는 전략으로 What If Not전략을 제시하고 있으며, 이것을 다음 [그림 1]과 같이 5가지 수준[9]으로 보다 세분화하고 있다.

0수준	출발점 선택
⇓	⇓
Ⅰ수준	속성 나열
⇓	⇓
Ⅱ수준	‘What-if-not?’의 의문을 품을 것
⇓	⇓
Ⅲ수준	문제설정
⇓	⇓
Ⅳ수준	문제 분석

[그림 1] What If Not 전략

0수준은 정리, 구체적 대상 등의 출발점 선택, Ⅰ수준은 문제나 정리의 성질, 조건의 나열, Ⅱ수준은 위의 각 성질에 대해 ‘만약 그 성질이 아니었다면 어떻게 될까?’라고 그 성질을 부정하는 질문, Ⅲ수준은 문제설정, 4수준은 문제 분석으로 설정된 문제를 해결하는 단계이다.

9) Brown & Walter가 What If Not 전략에서 단계가 아닌 수준이라고 한 것은 앞서 수용과 도전의 단계라는 용어를 사용한 것과 구분하기 위한 용어 선정이라고 보여진다. 왜냐하면 그들이 구분한 5수준은 수준이라기보다 단계가 어울리며, 이들의 수준 구분을 근간으로 이루어진 후속 연구에서는 단계라는 용어로 구분되고 있기 때문이다.

Brown & Walter의 What If Not 전략은 새로운 문제를 만들 때 어떻게 접근해야 하는지를 보여주는 매우 좋은 전략이라 할 수 있다.

임문규(1992)는 Brown & Walter의 What If Not 전략을 근간으로 문제설정의 발전적 가능성에 주목하여, 보다 발전적인 문제의 설정을 최종 단계로 하는 다음의 5단계를 제시하고 있다. 1단계는 속성 나열, 2단계는 what-if-not? 의문을 통한 속성 변경, 3단계는 문제의 설정, 4단계는 설정한 문제의 해결, 5단계는 설정한 문제와 유사하거나 새로운 발전적인 문제의 설정이다.

橋本吉彦외는 문제의 발전이 다양하게 이루어질 수 있도록 하기 위하여 원 문제의 선택에 초점을 둔, 원문제의 선정을 첫 단계로 하는 다음의 5단계를 제시하고 있다. 1단계는 원제의 선정, 2단계는 원제의 해결, 3단계는 문제설정, 4단계는 설정된 문제의 발표, 5단계는 설정된 문제의 해결이다(황규애, 1997, 재인용).

한편, Brown & Walter(1983)가 제시하는 전략의 마지막에 등장하는 Ⅳ수준인 문제 분석에 대하여, 그들은 문제분석의 과정이 문제에 관한 보다 깊은 통찰을 제공할 수 있다고 주장하고 있다. 그들은 피타고라스의 정리를 예로 들면서 속성 $a^2+b^2<c^2$의 기하학적 의미를 숙고하는 과정에서, 이것은 오직 둔각삼각형에서 빚어지는 것임을 분석할 수 있다고 말한다. 또 그들은 부족분 $c^2-(a^2+b^2)$의 기하학적 의미를 숙고하는 과정에서 피타고라스 정리는 부족분이 0인 특수한 경우임을 이해하게 된다고 말하고 있다. 그들의 이러한 주장은 문제설정의 마지막 단계가 문제에 대한 깊은 통찰과 연결되어 있음을 보여준다. 그런데 그들이 주장하는 문제 분석은 추출되어 변형된 속성이 갖는 의미를 분석해봄으로서 문제에 대한 보다 깊은 이해를 돕는 것은 사실이지만, 이 속성의 변형 자체가 잘못될 수도 있다는 의구심을 갖는 분석까지 포괄하는 것으로 해석하기는 어려워 보인다. 그들이 주장하는 문제의 분석은 잘못된 설정인지 잘된 설정인지를 판단하는 것이 아니라, 이미 잘된 설정이라는 가정 아래 이 설정이 갖는 의미를 분석하는 과정이라고 생각된다. 이런 이유로 본 연구에서는 설정 자체가 옳고 그런지를 판가름할 수 있는 모형을 설계해보고자 하는 것이다.

이상에서 기존 연구의 문제설정의 단계에 대해 살펴보았으며, 이러한 단계들은 문제설정에서 어느 부분에 그 가치를 두느냐에 따라 조금씩 차이를 가지게 됨을 알 수 있다. 이처럼 연구자에 따라 다소 차이를 보이지만, 기존 연구의 문제설정 단계는 기존문제 선정, 속성 나열, What-if-not? 의문설정, 문제설정, 설정된 문제의 분석으로 구분해 볼 수 있을 것이다. 본 연구에서는 이를 바탕으로 문제 속에 내재된 지식을 인식할 수 있는 문제설정 모형을 구축하고자 한다. 전술한 바와 같이, Brown & Walter가 Ⅳ수준인 문제 분석에 대해 논하였지만, 그것은 잘된 설정을 염두에 두고 그 설정에 대한 분석이 이루어졌던 만큼, 잘못 설정된 상황을 두고 이 상황에 대한 분석 활동을 해야 한다는 주장은 찾아보기 어렵다. 이에 본 연구에서는 잘못 설정된 상황까지 아우를 수 있는 문제설정 모형을 설계하고자 하는 것이다.

Ⅲ. 의미 분석을 강조한 문제설정 모형 설계

문제설정은 단순히 새로운 문제의 설정이 아니라, 주어진 문제의 해결과 이 문제에 대한 보다 깊이 있는 통찰에 이르게 하는 수단임을 알 수 있다(Brown & Walter, 1983). 단순히 속성만을 결합한 것이 문제가 되는 것이 아니라, 문제가 되기 위해서는 속성들이 유기적으로 결합되어야 하는 것이다. 속성 사이의 관련성을 고려한 속성들의 결합이 이루어져야 모순이 없는 문제가 완성된다. 그러나 속성들의 단순 결합은 모순을 수반하게 하기도 한다. Brown & Walter(1983)가 제시한 What If Not 전략에서 속성 나열 이후, 이 속성을 부정하게 되는 단계가 뒤따르는데, 속성 간의 관련성 인식이 결여된 채 문제설정이 이루어지게 되면 문제설정 자체에 오류가 발생할 수 있는 것이다.

본 장에서는 이러한 관점에 입각하여 문제설정을 바라볼 것이며, 속성 간의 유기적 결합을 이끌어내는 내재된 지식을 인식할 수 있도록 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 설계해 보고자 한다. 먼저, 연구자가 수업에서 자주 활용해 온 문제설정에 대한 경험 중, 잘못 설정된 문제설정이 발생한 사례를 제시할 것이다. 이후, 이 사례를 분석함으로써 몇 가지 시사점을 도출하고자 한다. 그런 다음 이러한 분석의 시사점에 기반하여 잘못된 문제설정 상황까지 고려할 수 있는 문제설정 모형을 설계하고자 한다.

1. What If Not 전략을 통한 문제설정의 사례

다음의 내용은 고등학교 2학년 수업에서 연구자가 다룬 문제설정 과정을 기술한 것이다. 이는 연구자가 수업 과정에서 학습 내용을 좀 더 심화하기 위하여 시도한 작업이다. 그리고 학습 내용의 심화 도구로서 Brown & Walter가 제안한 What If Not 전략을 이용하였다.

0수준. 출발점 선택

> 문제1. 일차함수 $f(x)=mx+n$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(2)=3$, $(g \circ g)(2)=4$가 성립한다. 이때, $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$을 만족시키는 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A의 모든 성분의 합은?

1수준. 속성 나열

주어진 문제의 속성은 다양하게 나열될 수 있지만, 보통의 문제설정자들이 추출할만한 수준에서 연구자는 다음과 같은 속성들을 추출하여 나열하였다.

a. $f(x)$는 일차함수이다.
b. $f(x)=mx+n$

c. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.
d. $g(2)=3$
e. $(g \circ g)(2)=4$
f. 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & a \\ b & -3\end{pmatrix}$이다.
g. 행렬 A의 모든 성분의 합을 구한다.

2수준. What-if-not? 의문

1수준에서 나열된 속성을 바탕으로 What-if-not? 의문을 사용하여 다음과 같은 의문 설정을 하였다.

a′[10]. $f(x)$가 일차함수가 아니라면?
b′. $f(x)=mx+n$이 아니라면?
c′. $g(x)$가 $f(x)$의 역함수가 아니라면?
d′. $g(2)=3$ 이 아니라면?
e′. $(g \circ g)(2)=4$가 아니라면?
f′. 이차정사각행렬 A가 $\begin{pmatrix}-1 & a \\ b & -3\end{pmatrix}$이 아니라면?
g′. 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하는 것이 아니라면?

3수준. 문제설정

기존 문제로부터 나열한 7가지 속성들 중에 어느 하나를 선택하여 그것을 부정하여 문제를 설정할 수도 있고, 여러 속성들을 선택하여 그것들을 동시에 부정하여 문제를 설정할 수도 있을 것이다. 연구자는 속성f를 '이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$이다'로 변형하여 다음과 같이 문제를 설정하였다.

문제2[11]. 일차함수 $f(x)=mx+n$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(2)=3$, $(g \circ g)(2)=4$가 성립한다. 이때, $\begin{pmatrix}m \\ n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2 \\ 3\end{pmatrix}$을 만족시키는 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 A의 모든 성분의 합은?

4수준. 문제 풀이(분석)

연구자는 다음과 같은 방법으로 문제를 풀었다.

$g(2)=3$이므로 $f(3)=2$이다. 따라서 $2=3m+n$이 성립한다. 한편, $(g \circ g)(2)=g(g(2))=g(3)=4$이므로 $f(4)=3$이다. 따라서 $3=4m+n$이다. 행렬을 이용해서 표현하

10) I 수준에서 나열한 속성에 대한 what-if-not? 의문을 설정하는 것을 ( )′으로 나타낸다.
11) 속성을 추출하여 What-if-not? 의문 설정을 하여 속성을 바꾸어 만든 문제

면,

$$\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

$$\therefore \quad A=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}$$

그러므로 이차정사각행렬 A의 모든 성분의 합은 1이다.

이 풀이는 판서되어 학생들에게 소개되었으며, 그 당시 수업에 임했던 학생들은 문제설정이 잘못 되었음을 전혀 인식하지 못하였다. 심지어 연구자조차도 문제설정 자체에 오류가 있을지도 모른다는 의심을 갖지 못하였다.

2. What If Not 전략을 통한 문제설정의 사례에 대한 논의

먼저 문제1의 풀이과정을 검토해 보자. 주어진 조건 $g(2)=3$, $(g \circ g)(2)=4$로부터 미지수가 2개인 연립방정식 $\begin{cases}2=3m+n\\3=4m+n\end{cases}$을 이끌어 낸다. 그리고 연립일차방정식 $\begin{cases}2=3m+n\\3=4m+n\end{cases}$을 행렬식 $\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$으로 나타내어 역행렬을 이용하여 나타내면 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$이다. 여기서 미지수 m, n의 값을 구하지 않고 주어진 속성 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$의 꼴을 비교함으로써 $A=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}$라는 값을 구하였다. 그런데 이것은 잘못된 결론의 도출이다. 왜냐하면 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$을 비교하여 위와 같은 결론을 내리기 위해서는 행렬 A의 유일성(uniqueness)이 보장되어야 한다. 그러나 행렬 A는 미지수가 4개인 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$꼴의 이차정사각행렬이고 주어진 속성에서 얻을 수 있는 식이 2개이므로, 행렬 A는 무수히 많이 결정될 수 있다. 예컨대 $\begin{pmatrix}5&-3\\4&-3\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}8&-5\\7&-5\end{pmatrix}$은 위의 조건을 만족하는 행렬 A가 될 수 있으며, 두 경우 행렬 A의 성분의 합은 각각 3, 5가 된다. 이것은 설정된 문제가 잘못되었다는 것을 보여준다. 이러한 잘못된 설정은 속성 간의 관련성을 고려하지 않고, 속성을 단순히 변형함으로써 빚어진 결과이다. 즉, 속성의 단순한 변형은 문제설정 자체에 오류를 발생시킬 수 있는 것이다.

그런데 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$의 꼴을 비교함으로써 $A=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-3\end{pmatrix}$라고 결론내리는 부분에서 오류를 찾아내는 것은 쉽지 않은 일로 생각된다. 또한 행렬 A가 유일하면 위의 추론은 성립하지만, 행렬 A의 유일성이 보장되지 않는다면 잘못된 추론이 된다는 것도 찾아내기가 쉽지 않을 것으로 생각된다. 잘못된 문제설정 상황이 발생하였음에도 불구하고, 연구자와 학생 모두가 잘못된 문제설정임을 인식하지 못한 것은 그것의 인식이 쉽지 않음을

보여준다. 이는 문제설정의 옳고 그름을 판별할 수 있는 어떤 조치가 필요함을 반영하는 것으로 볼 수 있을 것이다.

한편, 잘못된 문제설정을 탐색하게 되면 문제설정에 대한 보다 깊은 이해에 도달할 수 있을 것으로 생각된다. 이는 문제설정의 오류가 갖는 긍정적 측면일 것이다. Borasi(1986)에 의하면, 오류는 문제해결 과정에서 학습의 어려움과 학생들의 현재 상태를 진단하기 위한 기회라는 교육적 의미를 갖는다. 또한 그는 오류가 수학적 탐구를 유발하고 이를 경험할 수 있는 긍정적인 역할을 한다고 지적한다. 잘못된 문제설정 상황 역시도 일종의 오류로 볼 수 있으며, 이에 대한 탐구는 깨닫지 못한 새로운 사실을 경험할 수 있는 기회가 될 수 있는 것이다.

실제 위 문제설정의 오류를 분석하고 탐색하게 되면, 다음의 사실을 추출할 수 있을 것이다. 먼저, 주어진 조건의 변형이 어떤 식으로 이루어져야 하는지를 알 수 있게 해준다. 속성 '이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & a\\ b & -3\end{pmatrix}$'을 '이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$'으로 변형할 경우 문제가 발생한 것은 다음의 이유 때문이다. 미지수가 2개 더 추가되었으므로 주어진 조건 $g(2)=3$, $(g\circ g)(2)=4$은 4개의 미지수를 하나로 결정짓기에 부족하다. 4개의 미지수가 하나로 결정되기 위해서는 조건 $g(2)=3$, $(g\circ g)(2)=4$ 이외에 2개의 조건이 추가되어야 하는 것이다. 따라서 '이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & a\\ b & -3\end{pmatrix}$'을 변형하여 문제를 설정하고자 한다면, 1행의 두 개의 성분 중 한 성분과 2행의 성분 중 한 성분의 값이 상수로 주어져야하는 것이다. 만약 속성 '이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}-1 & a\\ b & -3\end{pmatrix}$'을 '이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$'로 변형하고자 한다면, $g(2)=3$, $(g\circ g)(2)=4$ 이외에 두 개의 속성이 더 추가되어야 하는 것이다.

또한 이와 같은 분석과 탐색은 기존 문제의 속성이 왜 그렇게 주어졌는지를 더 잘 이해하게 한다. 즉, 기존 문제에서 행렬 A의 (1, 1)성분인 -1과 (2, 2)성분인 -3은 행렬 A가 유일한 값을 갖게 하는 속성임을 알 수 있다. 결국, 잘못된 문제설정 상황에 대한 반성은 문제에 주어진 속성 간의 관련성을 인지하게 하여 주어진 조건의 변형이 어떤 식으로 이루어져야 하는지를 알 수 있게 할 뿐만 아니라, 기존 문제에서의 속성에 대한 보다 깊은 이해를 돕는 것이다.

이상의 논의로부터 다음과 같은 시사점을 도출할 수 있었다. 첫째, 문제를 설정하는 과정에서 속성 간의 관련성을 고려하지 못하고 속성을 추출하여 그것의 단순한 변형을 꾀하게 되면 문제설정 자체에 오류가 발생할 수 있다. 따라서 속성 간의 관련성을 인식하지 못하여 문제설정 자체에 오류가 빚어지는 일이 발생할 가능성이 많은 만큼 이 점을 인식할 수 있도록 돕는 교수 방안 모색이 필요하다고 생각된다.

둘째, 문제설정 자체에 문제점이 도사리고 있을지라도 문제설정자는 이것을 간과하기 쉽다는 것이다. 단순히 문제를 풀이하는 것만으로 문제설정의 문제점을 인식하기 어렵다. 이는 문제설정의 문제점 인식을 돕는 새로운 조치가 필요함을 시사한다.

셋째, 잘못된 문제설정을 탐색하면 주어진 조건의 변형이 어떤 방법으로 이루어져야 하는

지를 알 수 있게 할 뿐만 아니라, 기존 문제에서의 속성에 대한 보다 깊은 이해를 도울 수 있다는 것을 알 수 있었다. 이런 이유로 문제설정의 문제점 인식만으로 잘못된 문제설정 상황의 이해에 그치게 된다면 교수·학습의 목적상 바람직스럽지 못하다고 생각된다. 오류는 수학적 탐색의 기회인 바, 문제점 인식 이상의 함의를 이끌어 내는 것이 필요하다. 즉, 문제설정의 문제점을 탐색함으로써 문제설정이 깊은 수학적 안목이 요구되는 활동임을 이해하는 경험을 갖게 하는 것이 필요하다 생각된다. 나아가 속성 간의 관련성을 보다 깊이 있게 탐구함으로써 문제에 대한 이해의 깊이를 더해 갈 수 있을 것으로 생각된다.

이상에서 논의된 시사점을 볼 때, 문제설정을 학교수학에서 온전히 지도하기 위해서는 잘못된 문제설정 상황까지 고려한 문제설정 모형의 설계가 필요하다고 생각된다.

3. 의미 분석을 강조한 문제설정 모형 설계

본 절에서는 앞 절에서 논의한 시사점을 바탕으로 잘못된 문제설정 상황까지 고려할 수 있는 문제설정 모형을 설계하고자 한다.

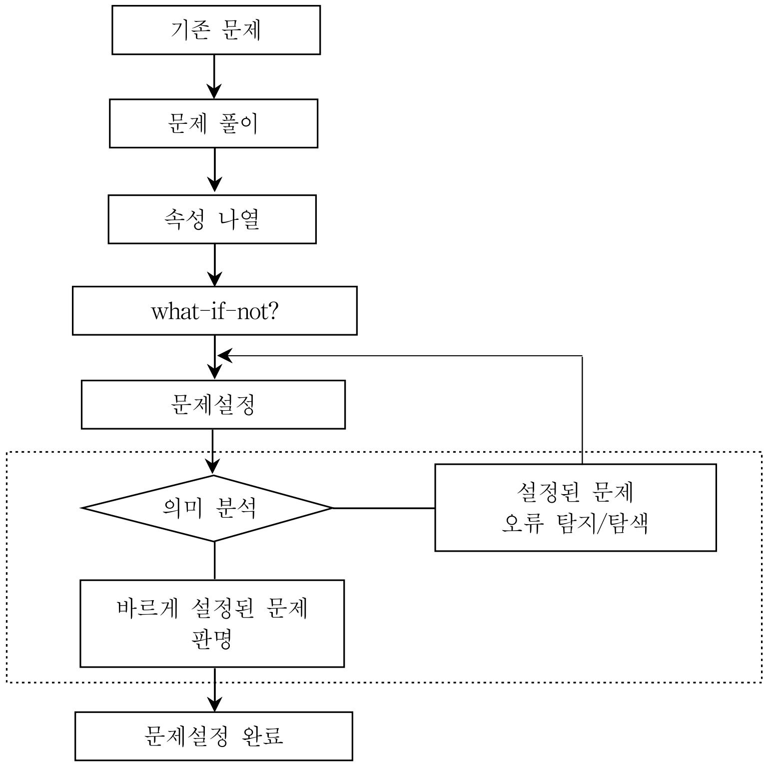
첫 번째 시사점으로, 문제설정이 항상 올바르게 이루어지는 것은 아니며 잘못된 문제설정이 발생할 수 있다는 것을 알 수 있었다. 그런데 기존의 연구들은 문제를 해결하는 과정에서 문제설정을 통해 수동적 입장에서 능동적 입장으로의 전환, 확산적 사고의 유발, 수학에 대한 불안과 두려움 해소 등에 그 초점을 두었으며, 문제설정 과정에서 잘못된 문제가 많이 설정됨에도 불구하고 여기에 주목하지 못하고 있는 것으로 생각된다. 이에 본 연구자는 잘못된 문제설정 상황의 긍정적인 측면에 주목하였다. 잘못된 문제설정 상황이 발생한 이유를 탐구해 봄으로써 문제설정에서 고려해야 하는 속성들 간의 관련성 인식을 돕고, 아울러 문제에 대한 이해를 보다 강화해 보고자 한다. 이러한 관점에 입각하여 본 연구자는 잘못 설정된 문제 상황까지 고려할 수 있는 문제설정 모형을 설계해 보고자 한다.

두 번째 시사점으로, 문제설정이 잘못되었을 경우 이것을 인식하기란 쉽지 않음을 알 수 있었다. 그렇다면 모형 설계에 있어 관심의 초점은 그 과정에서 문제설정의 옳고 그름을 판단하는 수단의 설정이 될 것이다. 본 연구에서는 이러한 수단으로서 반성 활동의 하나인 의미 분석을 선택하였으며, 이를 강조하고자 한다.

세 번째 시사점으로, 잘못된 문제설정 상황을 탐구하게 되면 주어진 조건의 변형이 어떤 식으로 이루어져야 하는지를 알 수 있게 할 뿐만 아니라 기존 문제에서의 속성에 대한 보다 깊은 이해를 도울 수 있다는 것을 알 수 있었다. 따라서 의미 분석은 문제설정의 옳고 그름을 판가름하는 활동 이상의 것이 되어야 할 것이다.

이에 본 연구에서는 의미 분석이란 설정된 문제를 풀어보는 것뿐만 아니라, 그 과정에서 속성의 의미를 음미해 봄으로써 설정된 문제가 옳은지 그른지를 판단해 보고, 어떻게 설정해야 올바른 문제가 될 수 있는지를 파악해가는 일련의 활동으로 정의하여 사용하고자 한다. 즉, 의미 분석은 문제 속에 내재된 지식을 파악해 가는 활동인 것이다.

한편 모형 설계는 연구자 4인의 상호 검증을 통해 이루어졌으며, 다각적 시뮬레이션을 통해 모형의 객관성을 높이고자 하였다. 다양한 모형을 그려두고 여러 문제에 대해 어느 것이 가장 적합한 모형인지를 숙고하는 과정이 이루어졌다. 예컨대 의미 분석 이후 피드백 화살표가 '속성 나열'의 단계, 'What-if-not?' 단계, 혹은 '문제 설정' 단계 이전에 들어가야 적합할지 고심해 보았다. 이러한 의미 분석이라는 새로운 활동과 여러 모형의 다각적 검토를 통해 문제 속에 내재된 지식의 발견을 돕기 위해 구안된 문제설정 모형은 다음의 [그림2]와 같다.



[그림 2] 의미 분석을 강조한 문제설정 모형

모형의 단계1은 '기존 문제'로서 원 문제를 선택하는 과정이다. 문제설정을 하기 위해서는 근원이 되는 수학 문제가 필요하며, Brown & Walter가 말하는 출발점 선택에 해당되는 것이다. 단계2는 '문제 풀이'로서 문제를 설정하기 이전에 선택한 문제를 푸는 단계이다. 기존 문제를 해결할 수 없는 상황에서 문제를 만들어보는 것은 무의미할 수 있다. 문제를 만들었다고 해도 기존 문제해결이 어렵다면 의미 분석이 어려울 수 있다. 단계3은 '속성 나열'로서 기존 문제로부터 성질이나 조건을 열거하는 과정을 의미한다. 단계4는 'What-if-not?'으로 단계3에서 나열한 속성들에 대해 '만약 그 속성이 아니라면 어떻게 될까?'라고 그 속성을 부정한 질문을 하는 단계이다. 나열된 속성 중에서 어떤 속성을 추출하여 'What-if-not?'을 하

느냐에 따라 다양한 문제가 설정될 수 있다. 단계5는 ‘문제설정’으로서 각 속성을 하나씩 또는 동시에 ‘그렇지 않았다면 …’으로 바꾸어 새로운 문제를 만드는 단계이다. 단계6은 ‘의미분석’으로 문제설정에 대한 반성의 과정이다. 전술한 바와 같이 의미 분석은 설정된 문제를 풀어보는 것뿐만 아니라, 그 과정에서 속성의 의미를 음미해 봄으로써 설정된 문제가 옳은지 그른지를 판단해 보고, 어떻게 설정해야 올바른 문제가 될 수 있는지를 파악해가는 일련의 활동이다. 여기서 문제 속에 내재된 지식은 곧 속성 간의 관련성을 의미한다. ‘삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a=2$, $b=3$, $c=5$일 때, 삼각형 ABC는 무슨 삼각형인가?’라고 설정된 문제에 대하여, 이 문제를 해결해보고[12], 설정된 문제가 옳은지 그른지를 판단하기 위하여 삼각형 ABC를 실제로 작도해보는 활동을 할 수 있을 것이다. 이를 통해 삼각형 ABC는 존재하지 않는 것임을 인식할 수 있을 것이다. 이와 같은 인식을 바탕으로 ‘왜 그러한 삼각형은 존재하지 않는 것인가?’를 탐구해 봄으로써, 종국에는 삼각형의 세 변 중 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다는 작도록 결정되어야 한다는 사실을 발견할 수 있게 될 것이다. 이처럼 도형의 구성 활동으로부터 삼각형의 비존재성을 파악함으로써 문제설정이 잘못되었음을 인식하고, 아울러 존재성이 성립하기 위해 필요한 조건으로 변들 사이의 관련성을 인식해가는 일련의 활동을 곧 의미 분석의 하나로 볼 수 있을 것이다. 즉, 의미 분석은 문제에 주어진 속성의 의미를 음미해보고, 이들 사이의 관계를 찾아봄으로써 설정된 문제의 옳고 그름을 판단할 뿐만 아니라 왜 옳고 왜 그른지에 대한 것까지 탐구하는 일련의 과정을 의미한다. 단계7은 ‘문제설정 완료’로서 설정된 문제가 의미 분석을 통하여 올바르다는 것이 판명되면 새로운 문제가 만들어졌으므로 일련의 문제설정 과정이 종결되는 것이다.

문제를 설정한 후 의미 분석을 해봄으로써 설정한 문제가 잘못 되었음을 파악하고 올바른 문제를 설정하기 위하여 어떻게 속성을 변형해야할 지를 인식하였다면, 일반적으로 [그림2]의 모형과 같은 문제설정 과정을 따를 것이다. 그런데 처음 문제를 설정하기 위해 추출한 속성뿐만 아니라 새로운 속성을 더 추출하여 변형해서 올바른 문제를 설정하고자 한다면, ‘문제설정’ 단계가 아니라 ‘속성 나열’ 단계로 되돌아가 문제를 재설정해야 할 것이다. 즉, 제한적으로 속성 추출을 한 학생을 고려하여 더 다양한 속성을 나열하고 문제를 설정하여 의미 분석을 해봄으로써 올바른 문제를 설정할 수 있을 것이다.

사실 문제설정자 단독으로 이 모형을 적용하여 설정된 문제가 옳은지 그른지에 대한 여부를 판단하고, 문제 속에 깃든 속성 간의 관련성을 인식하는 것은 쉬운 일이 아니라고 생각된다. 연구자가 경험한 위의 사례에서도 문제설정이 잘못된 것임을 연구 세미나를 통해 비로소 인식할 수 있었다. 만약 학생이라면 더욱 어려운 일이 될 것이다. 따라서 모형의 원활한 적용을 위해서는 문제설정자를 도울 수 있는 멘토가 필요하다고 생각된다. 학생이라면 교사가, 교사라면 동료 교사들이 도움을 주어야 모형의 적용에 도움이 될 것으로 생각된다.

12) ‘$c^2 > a^2+b^2$이므로 $\triangle ABC$는 둔각삼각형이다’라고 판단할 수 있으며, 이것이 모형에서 말하는 문제 해결을 의미한다.

이때 멘토로서 참여하게 되는 교사는 수학에 대한 지식, 논리적 사고력, 분석 및 종합적 사고 능력, 통찰력 등에 대한 충분한 소양을 갖추고 있어야 할 것이다. 또한 교수・학습 상황에서 모형을 원활하게 적용하기 위해서는 의미 분석 활동을 활발하게 이끌어내는 발문의 개발이 필요할 것으로 생각된다.

이상에서 우리는 잘못된 문제설정 상황까지 고려하여 '의미 분석을 강조한 문제설정 모형'을 설계해 보았다. 이 모형은 새로운 문제를 만들고 풀어보는 활동에 주안점을 둘 뿐만 아니라, 의미 분석이라는 활동을 추가하여 문제 속에 내재된 지식의 발견까지 강조한 문제설정 모형이다. 일반적으로 문제에 주어진 조건들은 서로 독립적인 관계를 가진 것이 아니라 서로 관련성을 지니고 있다. 이런 이유로 문제설정 상황에서 속성을 아무렇게 변화시킨다면 잘못된 문제설정 상황이 빚어질 수 있다. 그런데 잘못 설정된 문제에 대해 그것의 인식은 쉽지 않음을 알 수 있었다. 이에 본 연구에서는 이것을 인식하기 위해서는 문제설정에 대한 반성의 일환으로 '의미 분석'이 필요하다고 보았고, 이를 가미한 문제설정 모형을 설계한 것이다.

Ⅳ. 의미 분석을 강조한 문제설정 모형의 적용

본 장에서는 Ⅲ장에서 제시한 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 적용한 구체적 예를 보여줄 것이며, 이를 통해 구축된 모형의 이해를 돕고자 한다. 교사가 멘토로서 참여하여 학생에게 모형을 적용하는 가상적인 예를 제시할 것[13]이며, 이를 통해 본 연구에서 고안한 모형 적용의 실제를 보여줄 것이다. 앞 장에서 언급한 바와 같이 모형의 원활한 적용을 위해서는 멘토의 도움이 요구되며, 이 도움은 발문을 통해 이루어질 수 있을 것이다. 이에 본 장에서는 의미 분석 활동에 활기를 불어넣는 발문을 구체화하여 보여주고자 한다.

단계1. 기존 문제

문제설정을 하기 위한 근원이 되는 수학 문제를 선택하는 단계이다. 다음의 문제를 기존 문제로써 선택했다고 하자.

> 문제3. 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$, $\alpha+\beta=\sqrt{3}\,i$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?
> (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

단계2. 문제 풀이

기존문제를 변형하여 문제를 새롭게 설정하기 이전에 기존 문제를 해결해보는 단계이다.

13) 여기서 실제 사례가 아닌 가상적 예를 보여주는 것은 모형의 타당성을 타진하고 검증하는 것이 아니라, 적용의 실제를 구체화하여 보여주기 위함이다.

학생이 문제3을 다음과 같이 풀었다고 하자.

주어진 조건으로부터 $\alpha\overline{\alpha}=1$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$이고, $\beta\overline{\beta}=1$이므로 $\beta=\dfrac{1}{\overline{\beta}}$이다.

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}$이므로 $\overline{\alpha\beta}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}=\dfrac{-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i}=-1(\because\ \alpha+\beta=\sqrt{3}i)$이다.

즉, $\alpha\beta=-1$. 따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\sqrt{3}i)^2-2(-1)=-1$이다.

단계3. 속성 나열

기존 문제로부터 성질이나 조건을 열거하는 과정이다. 학생이 문제3의 속성을 다음과 같이 나열하였다고 하자.

a. α, β는 복소수이다.
b. $\alpha\overline{\alpha}=1$
c. $\beta\overline{\beta}=1$
d. $\alpha+\beta=\sqrt{3}i$
e. $\alpha^2+\beta^2$을 구한다.

단계4. What-if-not? 의문

속성들에 대해 ‘만약 그 속성이 아니라면 어떻게 될까?’라고 그 속성을 부정한 질문을 하는 단계이다. 두 가지 이상의 속성을 동시에 추출하여 의문 설정을 할 수도 있겠으나 아래와 같이 속성에 대하여 What-if-not? 의문 설정을 하였다고 하자.

a′. α, β가 복소수가 아니라면?
b′. $\alpha\overline{\alpha}=1$이 아니라면?
c′. $\beta\overline{\beta}=1$이 아니라면?
d′. $\alpha+\beta=\sqrt{3}i$가 아니라면?
e′. $\alpha^2+\beta^2$을 구하는 것이 아니라면?

단계5. 문제설정

속성을 바꾸어 새로운 문제를 만드는 단계이다. 기존 문제로부터 나열한 5가지 속성들 중에 어느 하나를 부정하여 바꾸어 문제를 설정할 수도 있고 여러 개를 동시에 부정하여 바꾸어서 많은 문제를 설정할 수 있다. 하지만 학생은 속성d ‘$\alpha+\beta=\sqrt{3}i$’을 추출하여 ‘$\alpha+\beta=\sqrt{5}i$’으로 변형하여 문제를 설정하였다고 하자.

문제4. 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$, $\alpha+\beta=\sqrt{5}i$일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?

(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

단계6. 의미 분석

문제설정에 대한 반성의 과정이다. 학생이 문제4를 다음과 같이 해결하였다고 하자.

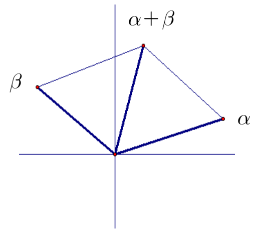
주어진 조건으로부터 $\alpha\overline{\alpha}=1$이므로 $\alpha=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$이고, $\beta\overline{\beta}=1$이므로 $\beta=\dfrac{1}{\overline{\beta}}$이다.

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}+\dfrac{1}{\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}$이고 $\overline{\alpha\beta}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}=\dfrac{-\sqrt{5}\,i}{\sqrt{5}\,i}=-1$이므로 $\alpha\beta=-1$이다.

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\sqrt{5}\,i)^2-2(-1)=-3$이다.

여기에서는 의미 분석을 유발할 수 있는 발문을 구체적으로 보여주기 위하여 교사와 학생 사이의 의사소통을 대화의 형식으로 기술하고자 한다.

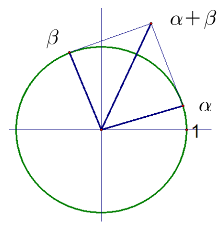
교사: 문제가 잘 해결되었다고 생각하니?
학생: 예.
교사: 그러면 네가 만든 문제는 이상 없다고 생각하니?
학생: 예. 별 이상이 없는 것 같아요.
교사: 왜 이상이 없다고 생각하니?
학생: 답이 잘 나오잖아요.
교사: $\alpha\overline{\alpha}=1$을 같은 의미의 다른 식으로 바꿀 수 있겠니?
학생: 무슨 소리인지 잘 모르겠는데요.
교사: 복소수 α에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}$에 관한 공식은 알고 있는 게 없니?
학생: 아! $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$라고 배웠어요. 그러면 $|\alpha|^2=1$라고 고칠 수 있겠네요.
교사: 그러면 그것의 의미는 뭐라고 생각하니?
학생: 음.....아! $|\alpha|=1$이니까 복소수 α의 크기는 1이네요.
교사: 이것이 복소평면 상에서 갖는 의미를 이야기해 줄 수 있겠니?
학생: 음.....식 $|\alpha|=1$은 원점이 중심이고 반지름이 1인 원 위의 점이에요.
교사: 그러면 $\beta\overline{\beta}=1$은 복소평면에서 어떤 의미이니?
학생: 음. 마찬가지로 $|\beta|=1$이므로 원점이 중심이고 반지름이 1인 원 위의 점이에요.
교사: 그러면 $\alpha+\beta$는 복소평면에서 어떻게 나타내는지 알고 있니?
학생: 음....벡터의 합처럼 나타나는 것 아니에요?
교사: 좀 더 자세히 말해줄 수 있겠니?
학생: (복소평면을 그려 다음과 같이 설명함) α와 β가 다음과 같을 때, 평행사변형을 그리면 $\alpha+\beta$가 나와요.



[그림3]

교사: 그럼 $\alpha\overline{\alpha}=1$이고 $\beta\overline{\beta}=1$인 경우에 $\alpha+\beta$는 어떻게 될 것 같니?

학생: 음......$\alpha\overline{\alpha}=1$와 $\beta\overline{\beta}=1$은 원점이 중심이고 반지름이 1인 원 위의 점이니까 이렇게 될 것 같네요.



[그림4]

교사: 그럼 이 상태에서 $\alpha+\beta=\sqrt{5}i$가 되려면 α와 β는 어디에 위치하면 될까?

학생: (이리저리 그래프 상에서 $\alpha+\beta=\sqrt{5}i$가 되도록 α와 β의 위치를 설정해보다가) 아! 이런 경우는 발생할 수 없는 것 같아요.

교사: 왜 그렇게 생각하니?

학생: 제가 방금 이 그래프에서 그려 봤는데요. α와 β가 어디에 위치하던 간에 $\alpha+\beta$는 원점이 중심이고 반지름이 2인 원을 넘어서지는 못하는 것 같아요.

교사: 그럼 왜 그런 현상이 발생한 거니?

학생: 문제를 잘못 만든 것 같아요.

교사: 왜 문제가 잘못 만들어졌다고 생각하니?

학생: $\alpha+\beta$는 원점이 중심이고 반지름이 2인 원을 넘어서지는 못하니까 $\alpha+\beta$의 값을 아무렇게나 주면 안되요. 그런데 제가 이 값을 $\sqrt{5}i$라고 주어서 잘못 만들어졌어요.

교사: 그럼 $\alpha+\beta$의 값을 어떻게 주어야 하는거니?

학생: $\alpha+\beta$의 값이 원점이 중심이고 반지름이 2인 원을 넘어서지 않도록 주어져야 해요.

교사: 그것을 수식으로 표현할 수는 없겠니?

학생: 음......아! $|\alpha+\beta|\leq 2$이어야 해요.

이상에서 연구자는 가상적 상황에서 의미 분석 활동의 예 하나를 보여주었다. 먼저 문제를 해결해 보고, 이후 문제 속에서 속성 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$와 $\alpha+\beta$의 의미를 음미해 봄으로써, 잘못된 설정임을 인식함과 아울러 올바른 문제를 설정하기 위해서는 $|\alpha+\beta|\leq 2$가 성립해야

함을 인식하는 일련의 과정이 곧 의미 분석인 것이다. 즉, 의미 분석은 속성 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$와 $\alpha+\beta$ 사이의 관련성을 인식해 가는 활동인 것이다. 이러한 의미 분석은 연구자가 제시한 것에 국한되는 것은 아니다. 삼각부등식 $|\alpha|+|\beta|\geq|\alpha+\beta|$ 을 이용하여 속성 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$와 $\alpha+\beta$ 사이의 관련성을 인식하는 것도 의미 분석 활동의 하나가 될 것이다. 사실 의미 분석은 설정의 주체와 멘토에 따라 다르게 이루어질 것으로 생각되지만, 어쨌든 문제에 주어진 속성이 문제 속에서 갖는 의미를 음미하여 속성 사이의 관련성을 인식하는 활동 전반으로 볼 수 있을 것이다.

단계5R[14]. 문제설정

의미 분석올 통하여 속성 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$와 $\alpha+\beta$의 의미를 음미해 봄으로써 설정된 문제가 잘못되었다는 것을 인식함과 아울러 올바른 문제를 설정하기 위해서는 $|\alpha+\beta|\leq 2$가 성립해야 함을 발견하였다. 따라서 학생은 다음과 같이 올바른 문제를 설정할 수 있을 것이다.

> 문제5. 두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$, $\alpha+\beta=\sqrt{2}\,i$일 때, $\alpha^2+\beta^2$ 의 값은?
> (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이다.)

단계6R. 의미 분석

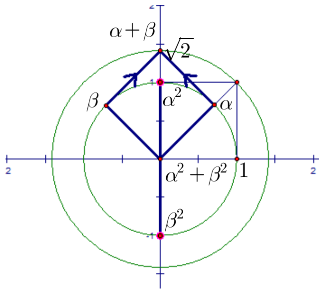
단계5R에서 설정된 문제5를 풀어보고 재음미해보는 과정으로 볼 수 있다. 아래와 같이 문제를 해결했다고 하자.

> 주어진 조건으로부터 $\alpha\overline{\alpha}=1$이므로 $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$이고, $\beta\overline{\beta}=1$이므로 $\overline{\beta}=\dfrac{1}{\beta}$이다.
>
> $\overline{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\overline{\alpha}\overline{\beta}}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}$이고 $\overline{\alpha\beta}=\dfrac{\overline{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}=\dfrac{-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}\,i}=-1$이므로 $\alpha\beta=-1$이다.
>
> 따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\sqrt{2}\,i)^2-2(-1)=0$이다.

속성 간의 관련성 인식 하에 올바르게 문제를 설정하여 해결하였지만, 이것만으로 의미 분석 행위가 그쳐서는 안 될 것이다. 문제가 올바르게 설정되었다 할지라도, 속성들을 문제 속에서 음미해보는 시간을 가져야 할 것이다. 이를테면, 위의 문제를 다음 그림과 같이 복소평면에 재현해 봄으로써 그 속성을 음미해 볼 수 있을 것이다.

---

14) 단계5R은 의미 분석을 통해 잘못된 문제설정이었음을 인지한 후, 단계5로 되돌아가서 올바르게 문제를 설정하는 단계를 의미한다. 이후의 논의에서 '단계(번호)R'은 의미 분석 이후 단계(번호)로 되돌아가는 것을 의미하는 코딩으로 사용될 것이다.



[그림5]

속성 $\alpha\overline{\alpha}=1$, $\beta\overline{\beta}=1$로부터 $|\alpha|=1$, $|\beta|=1$이므로 α, β는 반지름이 1인 원 위에 위치할 것이고, 속성 $\alpha+\beta=\sqrt{2}\,i$로부터 α, β는 유일하게 결정되고 그 값은 각각 $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$임을 알 수 있다. 또한, $|\alpha|=1$, $|\beta|=1$로부터 $|\alpha^2|=1$, $|\beta^2|=1$이므로 α^2, β^2은 반지름이 1인 원 위에 위치하고, α^2의 편각은 α의 편각의 2배이고 β^2의 편각 역시 β의 편각의 2배이므로 [그림5]와 같이 α^2, β^2은 y축 위에 위치하고 그 값은 $\alpha^2=i$, $\beta^2=-i$이다. 따라서 구하고자 $\alpha^2+\beta^2$의 값은 0이다.

단계7. 문제설정 완료

학생은 의미 분석을 통하여 설정된 문제가 올바르다는 것을 판단함으로써 일련의 문제설정 과정을 마무리한다.

본 연구에서 설계한 모형은 그 동안 문제설정에 관한 기존 연구가 주목하지 못한 한계점을 지적하고 이를 개선해 낸 것이라고 생각된다. 학습자가 문제설정 전략을 학습하고 이를 통해 문제설정을 해볼 경우 잘못된 문제설정 상황이 빚어질 수 있음에도, 이 설정의 문제점을 파악하지 못할 우려가 크다. 이런 점을 극복하기 위해 본 연구에서 제시한 모형은 의미분석이라는 활동을 강조하였다. 의미 분석 활동은 단순히 문제의 풀이 끝에 나타난 답을 문제의 뜻에 맞는지 해석해 보는 활동 이상의 것으로, 문제에 주어진 속성을 음미하고, 그들 사이의 관련성을 따져 보는 활동이었다. 이런 점에서 본 연구는 잘못 설정된 문제설정 상황의 인식을 돕고 탐구할 수 있는 대안을 제시한 것으로 볼 수 있을 것이다. 마지막으로 본 연구에서 제시한 모형은 잘못 설정된 상황으로부터 단순히 문제설정의 잘못을 인식하는 이상의 것을 이끌어 낼 수 있는 것이었다. 즉, 본 연구의 모형을 통해 문제 속에 속성들 간의 유기적 결합을 이끌어내는 내재된 지식의 실체를 표면적으로 드러나게 하여 이들을 인식할 수 있는 기회가 되게 할 수 있음을 알 수 있었다. 이것은 본 연구의 모형이 기존 연구에서 제시한 모형 이상의 것임을 시사한다.

Ⅴ. 결론

오늘날 문제설정의 긍정적 측면으로 인해 수학교육에서 문제설정은 날로 그 중요성을 더해가고 있다. Ellerton & Clarkson(1996)은 수학에서 문제해결은 단지 실험적 기술의 문제이지만, 문제설정은 기존의 문제를 새로운 각도에서 보는 것이 필요하고 창의적인 상상력이 요구되며 과학에서도 진정한 진보를 만들어 내는 것이라고 하였다.

문제설정의 중요성이 인식되면서 문제설정이 정의적 영역과 인지적 영역에 미치는 영향에 관한 연구, 문제설정 교수·학습 모형의 설계와 적용에 관한 연구가 날로 활기를 띄고 있다.

본 연구에서는 문제설정을 속성들의 단순한 결합이 아니라 이들 간의 유기적인 결합을 가능하게 하는 내재된 지식이 포함된 사고 활동의 관점으로 보았다. 그러나 기존 연구자들이 제시한 문제설정에 관한 교수·학습 모형은 이러한 점에 주목하지 못하고, 문제 속에 내재된 지식을 외연화하지 못하였던 것으로 생각된다. 그러나 문제설정이 올바르게 이루어지기 위해서는 반드시 속성들 간의 유기적 결합을 이끌어 내는 내재된 지식이 요구되기 때문에, 이 지식을 인식하는 것 또한 문제설정의 중요한 한 부분이라고 보았다.

이러한 인식 하에 본 연구는 문제 속에 내재된 지식을 이끌어내는 모형을 구축하고자 하였다. 먼저 잘못 설정된 문제 상황이 이러한 지식들을 이끌어내는 좋은 소재이자 기회라고 생각하였다. 즉 잘못 설정된 상황에서 이를 단순히 개선하고 지나치기보다, 왜 이런 상황이 발생했는지를 반성해 봄으로써 내재된 지식을 이끌어내는 데 도움이 될 것이라고 생각하였다. 이러한 입장에서 문제는 문제설정 상황에서 옳고 그름을 판가름하여 잘못 설정된 문제 상황을 인식하고 탐구할 수 있는 수단을 마련하는 것이 될 것이다. 본 연구에서는 문제설정 상황에서 진위여부를 판가름하는 수단으로 의미 분석 활동을 추가하였다. 의미 분석이란 설정된 문제를 풀어보는 것뿐만 아니라, 문제에 주어진 속성이 갖는 의미를 살펴보고, 이를 문제 속에서 음미해 봄으로써 설정된 문제가 옳은지 그른지를 판단해 보고, 어떻게 설정해야 올바른 문제가 될 수 있는지를 파악해가는 일련의 활동이다.

사실 누군가의 노력으로 이미 만들어진 문제를 접하게 되면, 우리는 이 문제에 대해 잘 만들어졌다는 신뢰를 갖고 의심 없이 문제해결을 시도하게 된다. 그러나 자신이 문제설정의 주체로서 문제를 새롭게 설정하는 입장에 처하게 되면 문제설정에는 누군가가 아닌 '나'의 노력이 수반되어야 한다. 이런 이유로 내가 만들게 된 새로운 문제는 반드시 잘 설정된다고 보기 어려우며, 그 설정이 잘되었는지를 의심해보아야 한다. 그럼에도 불구하고 이미 만들어진 문제를 접하면서 형성된 습성이 자신이 설정한 문제에서 조차도 의심을 갖지 못하도록 방해하는 요인이 되는 것 아닌가하는 생각을 갖게 된다. 사실 이미 만들어진 문제도 누군가의 노력이 반영되어 있다. 따라서 우리는 문제설정의 주체에게 반드시 요구되는 이러한 노력을 의미 분석으로 보았으며, 이러한 노력을 문제설정의 주체가 되어 직접 해봄으로써 문제를 보는 힘을 길러내고자 하는 것이다. 궁극적으로는 새롭게 설정한 문제뿐만 아니라 원 문제에서도 문제설정의 주체가 되어 봄으로써 원 문제를 만든 사람의 정신을 엿보고 그 문

제에 대한 보다 깊은 이해를 도모하고자 하는 것이다.

이러한 관점에 입각하여 본 연구에서는 문제 속에 내재된 지식을 인식하고 탐구할 수 있는 모형으로 '의미 분석을 강조한 문제설정 모형'을 설계할 수 있었다. 이 모형의 단계1은 기존 문제 선정, 단계2는 문제 풀이, 단계3은 속성 나열, 단계4는 what-if-not?, 단계5는 문제설정, 단계6은 의미 분석, 단계7은 문제설정 완료로 요약된다. 이 모형은 기존 연구자의 문제설정 전략에 의미 분석이라는 새로운 활동을 추가하여 기존 연구자들이 문제설정 모형에서 의도한 효과뿐만 아니라 그들이 주목하지 못한 문제 속에 내재된 지식의 발견까지 이르게 하는 모형으로 볼 수 있다.

연구자는 설계한 모형의 의의로 네 가지를 생각할 수 있다. 첫째, 설계한 모형은 올바르게 설정된 문제 상황뿐만 아니라 잘못 설정된 문제 상황까지 아우를 수 있는 문제설정 모형이다. 둘째, 문제설정에 관한 기존 연구에서 주목하지 못한, 속성 간의 관련성을 인지하게 하여 문제의 구조를 파악하고 문제를 더 깊이 있게 이해하도록 돕는 것이다. 셋째, 잘못 설정된 문제에 대한 깊이 있는 탐색과 분석을 통하여 주어진 속성의 제한 조건을 인식하게 하여 올바른 문제가 설정할 수 있는 모형을 제시하고 있다. 즉, 문제에 주어진 속성 간의 관련성을 인지하게 하여 주어진 조건의 변형이 어떤 식으로 이루어져야 하는지를 알 수 있게 한다. 넷째, 문제설정이 속성들 간의 단순한 결합에 의하여 이루어지는 것이 아니라 속성들 간의 유기적 결합이 필요한 복합적 과정임을 드러내는데 일조할 수 있었다.

본 연구를 통해 연구자는 문제설정에 관한 교수·학습 개선에 기여할 수 있기를 기대한다. 개정 교육과정 이후 문제설정이 교육과정 안에서 다루어지고는 있으나 문제설정의 구체적인 방법이나 안내는 부족하며 문제설정에 관한 교수·학습이 미흡한 실정이다. 문제설정 교수·학습 상황에서 의미 분석을 강조한 문제설정 모형을 적용하려면 교사와 학생 모두 부단한 관심과 노력이 필요하다. 교사는 학생들이 문제설정의 어려움을 겪을 때, 보다 전문적인 식견과 수학에 대한 통찰력을 바탕으로 적절한 발문을 통하여 의미 분석을 통한 문제설정을 할 수 있도록 이끌어야 할 것이다. 학생은 직접 문제설정을 해본 경험이 거의 없으므로 많은 시간이 소요되고 힘겨워 할 수 있지만, 흥미를 갖고 학생들 스스로 지속적으로 문제설정에 관심을 가져야 할 것이다.

비록 문제설정 모형으로 의미 분석을 강조하더라도 학생들의 의미 분석 능력을 어떻게 향상시킬 수 있는지에 대한 논의는 대단히 중요한 별개의 문제이다. 학생의 입장에서 의미 분석이 쉽지 않을 것으로 예상되며, 이것은 모형의 바람직한 교수·학습을 위한 새로운 노력이 필요함을 시사한다. 이런 이유로 본 연구에서는 설계한 모형의 실제를 파악하는 후속 연구를 제안한다. 즉, 모형을 실제로 학생들에게 적용해 봄으로써 모형의 가능성을 타진하고, 모형의 특징 및 어려움을 파악하여 학교 수학에서 의미 분석을 강조한 문제설정 모형의 바람직한 적용 방향을 제시하는 노력이 필요할 것이다.

참고 문헌

도종훈(2007). 학교수학에서 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계하기. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 46(1), 69-79.

윤남진(1999). 고등학교 수학과에서 문제설정학습이 학업성취도에 미치는 효과에 관한 연구. 한국학교수학회논문집, 2(1), 133-144.

이상원(2004). 문제설정 수업모형이 문제해결력과 수학 태도에 미치는 효과. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 43(3), 233-255.

이상원・방승진(2004). 문제설정이 수학 문제해결력과 창의력에 미치는 효과. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 18(2), 163-186.

이옥경・이종희(1995). 문제제기의 과정을 통한 문제해결 지도가 수학학습에 미치는 영향에 관한 연구. 한국수학교육학회 수학교육 프로시딩, 3, 275-295.

임문규(1992). 문제설정의 교수・학습에 관하여, 한국수학교육학회지 <수학교육>, 31(3), 55-62.

전미라・허혜자(1998). 문제제기 전략을 강조한 수업과 학업성취도와의 관계분석: 방정식을 중심으로. 대한수학교육학회 논문집, 8(2), 702-722.

조제호·신인선(1999). 4학년 아동들의 수학적 문제설정 활동의 효과. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 8, 121-135.

정동권·박정수(1998). 문제만들기(problem posing) 활동을 통한 수학의 학습 지도. 과학교육논총, 10, 275-299.

정지호·임문규(1992). 문제설정의 교수-학습에 관하여. 한국수학교육학회지 <수학교육>, 31(3), 55-62.

최정화(1994). 문제설정을 활용한 수업. 청람수학교육, 4, 179-200.

한옥동・박혜숙(1997). 수학과 학습에의 문제제기 이론의 적용 효과 분석-협력학습법을 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 36(1), 77-87.

황규애(1997). 문제 상황 제시 형태에 따른 문제설정 활동 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

Borasi, R.(1986). On the Educational Roles of Mathematical Errors: Beyond diagnosis and remediation, doctorial dissertation, State university of New York at Buffalo.

Brown, S. I. & Walter, M. I.(1983). The Art of problem posing. Philadelphia, PA: Franklim Institute.

Brown, S. I. & Walter, M. I.(1990). The Art of problem posing. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S. I. & Walter, M. I.(1993). Problem posing in mathematics education. In: S. I. Brown, & M. I. Walter (Eds.), Problem posing: reflection and applications 16-27, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ellerton, N. F. & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In: A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 987－-1033). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

English, L. D.(1996). Children's Problem Posing and Problem Solving Preferences' In J. Mulligan and M. Mitchelmore (Eds.). Research in Early Number Learning. Australian Association of Mathematics Teachers.

English, L. D.(1997). Promoting a problem posing classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.

Goldenberg, E. P.(1993). On building curriculum materials that foster problem posing. In S. Brown, & M. Walter(Eds.), Problems posing: reflections and applications(pp31-38). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J.(1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfel (Ed). Cognitive Science and mathematics education, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lavy, I. & Bershadsky, I.(2003). Problem posing via "What if not?" strategy in solid geometry - a case study. *Journal of mathematical behavior* 22(4), 369-387.

Mason, J.(2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97-111.

Moses, B., Bjork, E. & Goldenberg, E. P.(1990). Beyond Problem Posing, NCTM 1990 Yearbook.

NCTM(1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

NCTM(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Polya, G.(1981). Mathematical discovery. NY: Wiley.

Silver, E. A.(1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.

Silver, E. A. & Cai, J.(1993). Mathematical Problem Posing and Problem Solving by middle school students. In C. A. Maher, G. A. Galdin & R. B. Davis (Eds.), Proceedings of PME-NA(vol 1, pp263-269). New Brunswick, NJ: Rutgers University.

의미 분석을 강조한 문제설정 모형 설계하기

Designing a Model of Problem Posing focusing on the Analysis of Meaning

Jun, Young Bae[15] · Roh, Eun Hwan[16] · Kim, Dae Eui[17] · Kang, Jeong Gi[18]

Abstract

As an alternative of making students active and independent under the passive learning conditions in school math classes, many researchers have paid much attention to problem posing and done a lot of research on it. Above all, Brown and Walter proposed *What If Not* strategy as a means of problem posing. In this strategy, during the process of posing problems, the transformation of their attributes is inevitably made, and so after problem posing, the process is finished by explaining the problem. But only the simple transformation of attributes could pose wrong problems. It suggests that it is very important to recognize the relationship which leads to organic connection between attributes in order to pose the right problem. However, many other studies of problem posing haven't focused on this fact. Thus, this study tried to design a model of problem posing to help recognize inherent knowledge in the problem and then pose the right problem by adding an activity of meaning analysis. We concretely showed a model of problem posing emphasizing the analysis of meaning by means of an example, thereby examining the meaning of the model. This study expects students to have the chance to understand the true meaning of problem posing and to be active learners after all.

Key Words : Problem Posing, What If Not Strategy, Connection Between Attributes, A Model of Problem Posing, The Analysis of Meaning.

15) Gyeonsang National University(skywine@gmail.com)
16) Chinju National University of Education(idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr), Corresponding Author.
17) Hamyang Jeil High School(goodidea01@hanmail.net)
18) Namsan Middle School(jeonggikang@gmail.com)