

## 대변형 압밀방정식의 수식화

### Numerical Formulation of Consolidation Based on Finite Strain Analysis

신 호 성<sup>1</sup> Shin, Ho-Sung

이 승 래<sup>2</sup> Lee, Seung-Rae

#### Abstract

Embankments on soft ground experience significant deformation during time-dependent consolidation settlement, as well as an initial undrained settlement. Since infinitesimal strain theory assumes no configuration change and minute strain during deformation, finite strain analysis is required for better prediction of geotechnical problems involving large strain and geometric change induced by imposed loadings. Updated Lagrangian formulation is developed for time-dependent consolidation combining both force equilibrium and mass conservation of fluid, and mechanical constitutive equation is written in Jaumann stress rate. Numerical convergence during Newton's iteration in large deformation analysis is improved by Nagtegaal's approach of considering the effect of rotation in mechanical constitutive relationship. Numerical simulations are conducted to discuss numerical reliability and applicability of developed numerical code: deformation of cantilever beam, two-dimensional consolidation. The numerical results show that developed formulation can efficiently describe large deformation problems. Proposed formulation is expected to facilitate the upgrading of a numerical code based on infinitesimal strain theory to that based on finite strain analysis.

#### 요 지

연약지반위에 성토를 할 경우 초기 비배수 상태 뿐만 아니라 압밀 과정 중에도 큰 변형이 발생한다. 기존의 미소변형률 이론은 변형률이 작고 초기의 기하학적인 형상이 변형과정 동안 변하지 않는다고 가정하므로 큰 변형이 유발되는 지반공학 문제들을 해석하기 위해서는 대변형 해석을 수행하여야 한다. 힉핑형 방정식과 유체 연속방정식이 결합된 압밀지배 방정식을 Updated-Lagrangian 형태로 수식화하고, Jaumann stress rate을 이용하여 역학적 구성관계를 표현하였다. 그리고 Nagtegaal이 제안한 회전을 고려한 구성관계를 적용하여 Newton의 반복과정을 통한 해의 수렴성과 정확도를 향상시켰다. 개발된 대변형 압밀해석 프로그램을 검증하기 위하여 캔틸레버보와 이차원 압밀문제를 해석하였다. 수치해석 결과는 큰 변형률과 기하학적 회전을 포함하는 대변형 문제를 효과적으로 묘사할 수 있음을 보여주었다. 기존의 미소변형이론에 근거한 유한요소 프로그램은 제안한 방법을 통하여 대변형 해석 프로그램으로 용이하게 전환될 수 있다.

**Keywords :** Consolidation, Finite strain analysis, FEM

1 정희원, 울산대학교 건설환경공학부 조교수 (Member, Assistant Prof., Dept. of Civil & Environmental Engr., Univ. of Ulsan, Tel: +82-52-259-1723, Fax: +82-52-259-2629, shingeo@ulsan.ac.kr, 교신저자)

2 정희원, 한국과학기술원 건설및환경공학과 교수 (Member, Prof., Dept. of Civil & Environmental Engr., KAIST)

\* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2013년 12월 31일까지 그 내용을 학회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

# 1. 서론

경제성장과 활발한 무역활동으로 해안부근지역의 개발이 절실히 요구되고 있지만 항만시설, 공단, 공항시설 등의 대단위 기간구조물의 건설에 이용 가능한 부지가 매우 부족한 실정이다. 이에 열악한 지반조건을 가진 연약지반을 활용하거나 매립된 인공지반 등을 이용하는 데에 관심이 모아지고 있으며, 실제로 국내에서도 연약한 해안 점토지반 및 매립으로 조성된 연약지반을 각종 개량공법을 사용하여 개량한 후에 다양한 구조물을 건설하는 사례가 증가하고 있다.

전단강도가 매우 작고 압축성이 큰 연약지반 위에 구조물을 설치하거나 성토 등과 같은 상재하중이 작용하면 연약지반은 시간 의존적인 압밀침하 현상에 의해 기하학적인 형상변화와 더불어 변형률이 크게 발생한다. 그러나 기존의 미소변형률 이론(infinitesimal strain theory)은 변형률이 작고 초기의 기하학적인 형상이 변형과정 동안 변하지 않는다고 가정하므로 위와 같이 큰 변형이 유발되는 압밀과정은 수치해석으로 적절히 표현할 수 없다. 예로, 연약지반에 상재하중이 재하시 큰 연직방향 변형률이 발생하고(Fig. 1a,  $\epsilon_{22}$ ), 성토체 토우 부분에서는 큰 회전변형이 유발된다(Fig. 1b,  $\omega_{12}$ ). 이러한 변형 과정을 적절히 해석하기 위해서는 큰 변형률에 의한 단

면 변화를 고려하여야 하고(예, Fig. 1c), 강제회전에 의한 가상의 추가 내부응력이 발생하지 않아야 한다(예, Fig. 1d에서 미소변형률에 근거하면 강제회전은 허위의 내부 응력 유발). 이러한 연약지반에서 대변형에 대한 적절한 수치해석을 수행하기 위해서는 유한변형이론(finite strain theory)에 근거한 압밀 지배방정식을 적용하여야 한다.

압축성인 흙격자(soil skeleton)와 비압축성인 물(water)로 이루어진 포화된 지반에 하중이 가해지면, 초기에는 과잉간극수압이 유발되고 시간경과에 의하여 과잉간극수압이 소산되면서 유효응력이 증가하면서 침하가 발생하면서 최종 침하단계에 이른다. 이와 같은 압밀과정은 Terzaghi(1925)가 1차원 탄성인 경우에 대해 처음으로 연구하였으며, Biot(1941)가 1차원 이론을 3차원이론으로 확장하였다. 그러나 Terzaghi와 Biot는 탄성재료의 미소변형률이라는 가정하에서 압밀지배 방정식을 수식화하였기 때문에 가해지는 하중에 의한 기하학적인 형상변화와 변형률이 작을 경우에만 국한되어 적용할 수 있다. Gibson 등(1967)은 이런 한계를 극복하기 위하여 1차원 압밀이론에 대하여 유한 변형(finite deformation)을 고려할 수 있도록 하였다. Hibbit 등(1970)이 처음으로 연속체에 대한 Total Lagrangian(TL) 수식화를 이용하여 유한 회전(finite rotation)을 고려할 수 있는 대변형

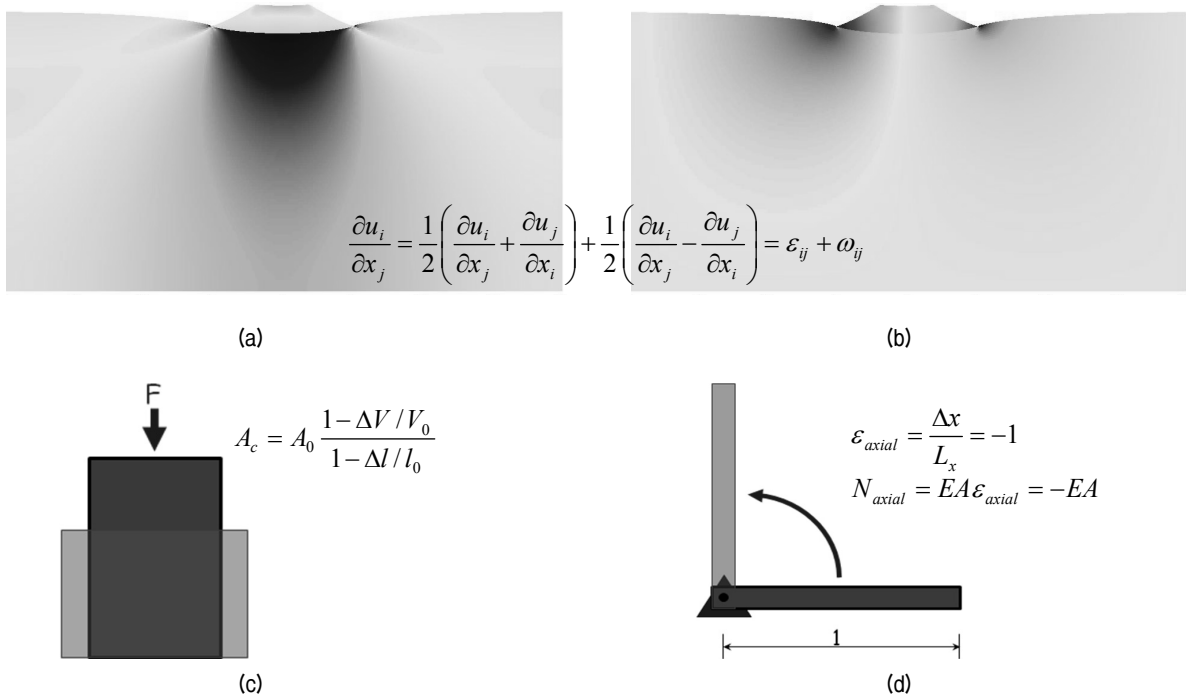


Fig. 1. (a) Vertical strain distribution under embankment, (b) Rotational strain under embankment, (c) Area update during compaction, (d) Pure rotation of truss element

알고리즘을 개발하였으나, TL법은 모든 변형이 초기형을 기준으로 하므로 강성행렬이 매우 복잡하게 나타난다. McMeeking & Rice(1975)는 비대칭인 1차 Piola-Kirchhoff 응력을 이용하여 매 증분의 바로 앞 형상을 기준형상(reference configuration)으로 선정하는 Updated Lagrangian(UL)법을 수식화하였다. Carter 등(1977, 1979)은 정적하중 조건하에서 대변형을 고려한 압밀해석을 수행할 수 있도록 하였으며 Prevost(1981)와 Zienkiewicz & Shiomi(1984)은 관성력을 고려한 대변형 수식화를 하였다.

본 연구에서는 압밀 지배 방정식을 Updated-Lagrangian 형태로 수식화하고 회전에 의한 효과를 고려한 Newton의 반복과정을 이용하여 비선형 해를 구하고자 하였다. 그리고 개발된 프로그램을 이용하여 캔틸레버빔과 2차원 압밀해석에 대하여 미소변형틀이론과 대변형 이론에 의한 해석결과를 비교 분석하였다.

## 2. 대변형 압밀방정식의 수식화

다공질 재료에서 변위와 간극수압은 압밀거동에 영향을 미치는 중요한 변수들이며, 힘평형(equilibrium) 방정식과 유체의 연속성(continuity)방정식에 의하여 서로 연관(coupled)되어 있다. 이 방정식들로부터 유도된 혼합 형태(mixed formulation)의 방정식을 사용하여 흡입자와 유체의 2상 구조를 갖는 포화된 점토의 거동을 해석할 수 있다. 그리고 연약지반의 압밀 변형 거동과 같이 대변형을 포함하는 문제는 Lagrangian 좌표계를 적용하는 것이 매우 유용하다(Irgens, 2008). 이때, 모든 방정식들은 기준형상에 대하여 수식화되고, Lagrangian 좌표계를 이용하여 모든 주 변수들을 정의하게 된다. 본 연구에서는 압밀 관련 지배 방정식을 UL 형태로 수식화하고 Newton의 반복과정을 적용할 수 있도록 하였다.

### 2.1 힘 평형 방정식

해석 영역이 Fig. 2와 같이 초기 영역( $V^{(0)}$ )과 주어진 경계조건( $\partial V^{(0)}$ )으로 이루어졌다고 가정하고, 임의의 시간  $t^{(n)}$  경과후에는 유사정적 조건하에서 영역과 경계조건이 각각  $V^{t^{(n)}}$ 과  $\partial V^{t^{(n)}}$ 으로 변화되었다고 가정할 때, 선형모멘트 보존법칙(conservation of linear momentum)으로부터 공칭응력텐서( $\bar{T}$ , nominal stress tensor)으로 표현되어지는 힘 평형 방정식은 다음 식 (1)과 같이 표

현된다. 이는 현재형상(current configuration)에서 Cauchy 응력에 대한 힘평형 방정식을 Lagrangian 좌표계를 사용할 수 있는 기준형상에 대한 방정식으로 대체한 것이다(Irgens, 2008).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}^{\xi}}{\partial x_i^{\xi}} + f_j^{\xi} &= 0 \quad \text{in } V^{\xi} \\ T_{ij}^{\xi} n_i^{\xi} &= \bar{t}_j^{\xi} \quad \text{on } \partial V_i^{\xi} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 윗첨자  $\xi$ 는 해석시 필요한 모든 측정에 대한 기준형상(reference configuration)이고,  $f_j^{\xi}$ 는 기준형상의 단위 체적당 작용하는 물체력(body force),  $\bar{t}_j^{\xi}$ 는 기준형상의 단위 면적에 작용하는 표면응력(traction),  $n_i^{\xi}$ 는 기준형상의 표면 단위 수직벡터이다.

가상일의 원리(principle of virtual work)로부터 식 (1)에서 임의의 가상변위에 의한 추가적인 외부 일(external work)과 내부에 저장된 변형에너지(strain energy)의 총합이 같게 된다.

$$\int_{\partial V_i^{\xi}} \bar{t}_i^{\xi} \omega_i dS + \int_{V^{\xi}} f_i^{\xi} \omega_i dV = \int_{V^{\xi}} T_{ij}^{\xi} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i^{\xi}} dV \quad (2)$$

여기서 물체력은  $f_i^{\xi} = \{(1 - \alpha^{\xi})\gamma_w + \alpha^{\xi}\gamma_s\}g_i$ ,  $\alpha^{\xi}$ 는 기준형상  $\xi$ 에서의 간극율(porosity),  $\gamma_w$ 는 물의 단위중량,  $\gamma_s$ 는 흡입자의 단위중량,  $\omega_i$ 는 운동학적으로 허용 가능한 가상 변위(kinematically admissible virtual displacement)를 나타낸다.

현재(current) 시간  $t^{(n+1)}$ 에서의 해를 구하기 위하여 Newton의 반복과정을 적용하면 다음 식 (3)과 같이 표

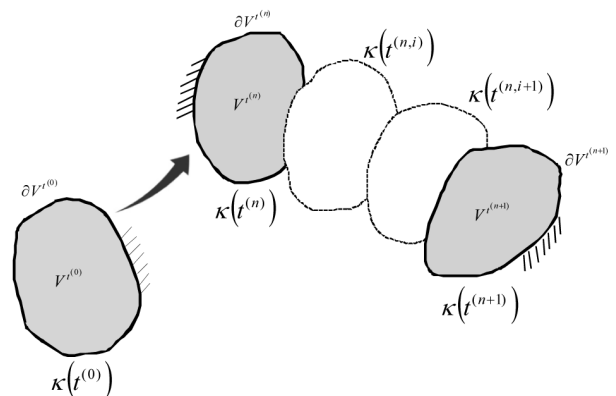


Fig. 2. Configuration change during deformation

현된다.

$$\int_{\partial V^\xi} \bar{t}_i^{\xi(n+1)} \omega_i dS + \int_{V^\xi} f_i^{\xi(n+1)} \omega_i dV = \int_{V^\xi} T_{ij}^{\xi(n+1)} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i^\xi} dV \quad (3)$$

대변형이론의 해석을 위한 수식화는 Total Lagrangian (TL) 수식화와 Updated Lagrangian(UL) 수식화 주로 사용하는데 간단히 정리하면 다음과 같다. Fig. 2와 같이 Newton방법의 반복과정을 통해서  $t^{(n,i)}$  까지의 변형을 구한 후  $t^{(n,i+1)}$ 의 변형을 구하고자 할 때, TL 형태의 수식화에서는 기준형상을 항상 초기형상( $\xi = \kappa(t^{(0)})$ )으로 고정시키지만, UL 형태의 수식화에서는  $t^{(n,i)}$ 의 형상을 기준형상으로 설정( $\xi = \kappa(t^{(n,i)})$ )한다. 본 연구에서는 식 (1)을 UL 수식화하기 위하여 가장 최근의 형상인  $\xi = \kappa(t^{(n,i)})$ 을 기준형상으로 설정하였다.

식 (3)에서  $T_{ij}^{\xi(n+1)}$ 는 식 (4)와 같이 간략화하여 표현될 수 있는데, Nominal 응력변화율(stress rate)  $\dot{T}_{ij}^\xi$ 이 객관성(objectivity)를 만족하지 못하므로 구성관계를 표현하기 적합하지 않다.

$$T_{ij}^{\xi(n+1)} = T_{ij}^{\xi(n,i)} + \dot{T}_{ij}^{\xi(n,i)} dt \quad (4)$$

여기서  $dt = t^{(n,i+1)} - t^{(n,i)}$ 이다.

역학에서 객관성의 개념은 관찰자의 위치가 관심대상의 양에 영향을 미치지 않음을 의미한다. 즉, 강체운동(rigid body motion)이 재료의 응력, 변형률, 또는 역학적 물성을 변화시키지 않아야 한다. 본 연구에서는 탄소성 이론에 가장 적합하고 객관성을 만족하는 Jaumann 응력변화율  $\dot{\tau}^J$ 을 이용하여 구성관계를 표현하였다(Chakrabarty, 2010).

$$\dot{\tau}_{ij}^J = \mathbf{L}_{ijkl} : D_{kl} - \dot{p} \delta_{ij} \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{L}_{ijkl}$ 은 구성관계(constitutive relation)를 나타내는 4<sup>th</sup>-order tensor이고  $D_{kl}$ 는 변형율(rate of deformation) 텐서이다. 모든 응력-변형률은 인장이 양의 값이고 간극수압은 압축이 양의 값이다.

그리고, 기준형상이 현재일 때 Nominal 응력변화율과 Jaumann 응력 변화율은 다음과 같은 관계에 있다.

$$\dot{T}_{ij}^J = \dot{\tau}_{ij}^J - \tau_{im}^J D_{mj} - D_{im} \tau_{mj} + \tau_{im}^J L_{jm} \quad (6)$$

여기서  $L_{jm}$ 는 현재(current) 시간에서의 속도기울기이고,  $\tau (= J \underline{\sigma})$ 는 Kirchhoff stress로 Cauchy stress  $\underline{\sigma}$ 와 Jacobian 값으로 표현되어 수식을 간략할 수 있다(Chakrabarty, 2010).

식 (4)에서 Nominal 응력변화율  $\dot{T}_{ij}^{\xi(n,i)}$ 의 형상이 기준형상과 일치하므로 식 (5)와 (6)을 결합하여 식 (4)에 대입하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} T_{ij}^{\xi(n+1)} - T_{ij}^{\xi(n,i)} &= \dot{T}_{ij}^{\xi} dt \\ &= \mathbf{L}_{ijkl}^{\xi(n,i)} d\varepsilon_{kl}^{\xi(n,i+1)} - \tau_{im}^{\xi(n,i)} d\varepsilon_{mj}^{\xi(n,i+1)} - d\varepsilon_{im}^{\xi(n,i+1)} \tau_{mj}^{\xi(n,i)} \\ &\quad + \tau_{im}^{\xi(n,i)} \frac{\partial du_j^{(n,i+1)}}{\partial x_m^\xi} - dp^{(n,i+1)} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $d\varepsilon_{ij}^{\xi(n,i+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial du_i^{(n,i+1)}}{\partial x_j^\xi} + \frac{\partial du_j^{(n,i+1)}}{\partial x_i^\xi} \right)$ , 그리고

$dp^{(n,i+1)} = p^{(n,i+1)} - p^{(n,i)}$ 이다.

힘평형 방정식에 관한 수식화는 식 (3)과 (7)로부터 기준형상을  $\xi = \kappa(T^{(n,i)})$ 로 설정하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{V^\xi} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i^\xi} \left\{ L_{ijkl}^{\xi(n,i)} d\varepsilon_{kl}^{\xi(n,i+1)} - \tau_{im}^{\xi(n,i)} d\varepsilon_{mj}^{\xi(n,i+1)} - d\varepsilon_{im}^{\xi(n,i+1)} \tau_{mj}^{\xi(n,i)} \right. \\ \left. + \tau_{im}^{\xi(n,i)} \frac{\partial du_j^{(n,i+1)}}{\partial x_m^\xi} - dp^{(n,i+1)} \delta_{ij} \right\} dV \\ = \int_{\partial V^\xi} \bar{t}_i^{\xi(n+1)} \omega_i dS + \int_{V^\xi} f_i^{\xi(n+1)} \omega_i dV - \int_{V^\xi} \tau_{ij}^{\xi(n,i)} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i^\xi} dV \end{aligned} \quad (8)$$

## 2.2 연속 방정식(continuity equation)

흡입자사이를 흐르는 유체의 거동은 Darcy의 법칙을 따른다고 가정하고 현재(current)의 실제 유체의 속도를  $v_f$ , 흡입자의 속도를  $v_s$ , 그리고 기준형상  $\xi$ 에서의 간극을  $\alpha^\xi$ 로 표현된다(Gibson 등, 1967). 그리고 Darcy의 법칙에서 유체의 가상 속도(superficial velocity)  $v_{fi} - v_{si}$ 는 동수경사(hydraulic gradient)에 비례한다.

$$\alpha^\xi (v_{fi} - v_{si}) = -\frac{k_{ij}^\xi}{\gamma_w} \left( \frac{\partial p}{\partial x_j^\xi} - \gamma_w g_j \right) \quad (9)$$

여기서  $k_{ij}^\xi$ 는 기준형상  $\xi$ 에서의 투수계수(permeability)이다.

단위체적  $V^\xi$ 내에서 유체의 질량보존의 법칙(conservation of mass)은 다음과 같이 표현된다.

$$\theta^\xi = -\frac{\partial}{\partial x_i^\xi} \left\{ \alpha^\xi (v_{fi} - v_{si}) \right\} = \int_{\partial V^\xi} v_{si} n_i^\xi dS \quad (10)$$

여기서  $\theta^\xi$ 는 체적변형률비(rate of volume strain)이며 만약  $\xi$ 가 현재시간의 형상이면 변형율(rate of deformation) 텐서의 합이 된다. 즉  $\theta^\xi (= \kappa(t^{current})) = D_{ii}$ 이 된다.

그리고, 식 (10)에 가상일의 원리를 적용하면 다음과 같다.

$$-\int_{V^\xi} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i^\xi} dV - \int_{V^\xi} \frac{\partial q}{\partial x_i^\xi} \frac{k_{ij}^\xi}{\gamma_w} \frac{\partial p}{\partial x_j^\xi} dV = \int_{\partial V^\xi} q s dS \quad (11)$$

여기서  $s$ 는  $\partial V^\xi$  경계에서 surface flux이다.

임의의 평형 상태에 대한 시간  $t^{(n)}$ 과  $t^{(n+1)}$  사이에서 식 (11)을 적분하고자 할 때 식 (12)와 같이 일반화된 사다리꼴 법칙을 적용하여 시간적분을 수행하고 Newton의 반복과정을 이용할 수 있도록 근사화시켰다.

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} p dt = (t^{(n+1)} - t^{(n)}) \left\{ \beta p^{(n+1)} + (1 - \beta) p^{(n)} \right\} \quad (12)$$

위 식에서  $\beta$ 는 안정성(stability)와 정확성(accuracy)을 지배하는 적분계수 값이다.  $\beta \geq 1/2$  일 때 무조건 안정한(unconditionally stable) 해를 구할 수가 있다.

유체의 연속방정식에 관한 수식화는 식 (11)에 시간적분과 Newton의 반복과정을 적용하고 변위 증분( $\Delta u^{(n,i)}$ )과 과잉간극수압 증분( $\Delta p^{(n,i)}$ )의 정의가 유효하기 위하여 기준형상을  $\xi = \kappa(t^{(n,0)})$ 로 잡으면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$-\int_{V^\xi} q \frac{\partial du_i^{(n,i+1)}}{\partial x_i^\xi} dV - \int_{V^\xi} \frac{\partial q}{\partial x_i^\xi} \frac{k_{ij}^\xi}{\gamma_w} \frac{\partial dp^{(n,i+1)}}{\partial x_j^\xi} dV \cdot \Delta t \beta$$

$$= \int_{\partial V^\xi} q s^{(n+1)} dS \cdot \Delta t + \int_{V^\xi} \frac{\partial q}{\partial x_i^\xi} \frac{k_{ij}^\xi}{\gamma_w} \frac{\partial (p^{(n,0)} + \beta \Delta p^{(n,i)})}{\partial x_j^\xi} dV \cdot \Delta t + \int_{V^\xi} q \frac{\partial \Delta u_i^{(n,i)}}{\partial x_i^\xi} dV \quad (13)$$

여기서  $\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$ ,  $\Delta u_i^{(n,i)} = u_i^{(n,i)} - u_i^{(n,0)}$ ,  $\Delta p^{(n,i)} = p^{(n,i)} - p^{(n,0)}$ 이다.

### 3. 대변형이론에서의 역학적 구성관계 적용

일반적으로 대변형이론에 의한 해석은 Newton 반복과정시 수렴성이 떨어지므로, 미소변형률이론에 의한 해석과는 달리 회전을 고려한 역학적 구성관계를 적용해야 한다. 이를 적용하기 않을 경우, mesh distortion에 의하여 수치해석의 수렴성과 안정성을 저해한다(Nazem 등, 2006). 구성관계식을 적용하는 방법에는 Hughes(1984)가 제안한 방법과 Nagtegaal(1988)이 제안한 방법이 있다. Hughes가 제안한 방법은 중첩된 강제회전(superimposed rigid body rotation)인 경우에 대해서는 객관성(objectivity)를 만족하지 못하고, 회전에 관한 1계 미분방정식을 적분해야 한다는 어려움이 있다. 따라서 본 논문에서는 Nagtegaal이 제안한 방법을 사용하였다.

#### 3.1 회전율(spin)과 회전(rotation)

연속체가 강제회전만을 하는 경우, 변형 기울기( $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ )와 속도 기울기( $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ )에서  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ 이 된다. 이를 변형 기울기와 속도 기울기의 관계인  $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}$ 을 이용하면 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{W}\mathbf{R} \quad (14)$$

여기서 변형기울기(deformation gradient,  $\mathbf{F}$ )는 polar decomposition에 의해 orthogonal rotation tensor( $\mathbf{R}$ )과 stretch tensor( $\mathbf{U}$ )로 분리할 수 있다. 그리고 변형기울기(velocity gradient,  $\mathbf{L}$ )은 비대칭의 rate of deformation tensor( $\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$ )와 비대칭의 spin tensor( $\mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2$ )의 합으로 표현할 수 있다.

위의 식은 주어진 회전율  $\mathbf{W}$ 와 이로 인하여 발생하는 회전  $\mathbf{R}$ 의 관계를 나타내는 식이다. 변형 기울기에서의

$\mathbf{R}$ 과 식 (14)에서의  $\bar{\mathbf{R}}$ 는 강체 회전(rigid body motion)일 경우에만 서로 같고 일반적인 경우에는 서로 다르다.

식 (14)의 1계 상미분 방정식을 시간 간격이 매우 짧아서  $\mathbf{W}$ 가 일정하다고 가정하고 회전의 초기조건에 대하여 해를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{R}}^{(n+1)} = e^{\theta} \bar{\mathbf{R}}^{(n)} \quad (15)$$

여기서  $\theta = \mathbf{W}t$  이다.

### 3.2 Nagtegaal의 접근법

Nagtegaal은 회전에 의하여 발생하는 회전을 산정하는 어려움을 극복하기 위하여 회전중립변수(rotation neutralized variables)를 도입하였다. Fig. 3에서 시간  $t = t^{(n)}$ 에서  $t = t^{(n+1)}$ 까지의 하중증분에 의해 형상이  $\kappa^{(n)}$ 에서  $\kappa^{(n+1)}$ 으로 변한다고 가정하였다. 기준형상  $\xi = \kappa^{(n)}$ 에  $\kappa^{(n)}$ 에서  $\kappa^{(n+1)}$ 으로의 변형기울기를  $\mathbf{F}$ 라고 하면, Polar-Decomposition에 의해 식 (16)과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{U}$ 는 신장(stretch)을 나타내는 텐서이고,  $\rho$ 는 회전을 나타내는 직교(orthogonal) 텐서이다.

Eulerian 텐서는 시간에 관하여 미분하였을 때 객관성을 만족하지 못하므로,  $\rho$ 를 이용하여  $\kappa^{(n+1)}$ 을 기준으로 하는 Eulerian 텐서를  $\kappa^{(n)}$ 을 기준으로 하는 Lagrangian 텐서로 변환시킨다. 이 변환된 텐서가 회전 중립 변수(rotation neutralized variable)이며, 이를 이용하여 구성관계를 적용하는 수치적인 절차는 다음과 같다.

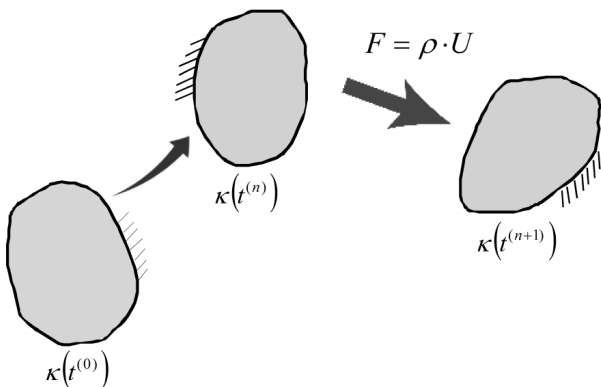


Fig. 3. Deformation and deformation gradient

(가) 형상의 변화( $\kappa^{(n)} \rightarrow \kappa^{(n+1)}$ )에 의한 변형증분( $\Delta \mathbf{u}$ )으로부터  $\mathbf{F}$ 를 구한다.

(나)  $\mathbf{F}$ 에서  $\mathbf{U}$ 를 분해하고, 회전중립 변형률텐서( $\hat{\mathbf{D}}$ )가  $t^{(n)}$ 과  $t^{(n+1)}$  사이에서 일정하다는 가정으로부터 회전중립 변형률증분( $\Delta \varepsilon^{RN}$ )을 구한다.

$$\Delta \varepsilon^{RN} = \ln \mathbf{U} \cong 2(\mathbf{U} - \mathbf{I})(\mathbf{U} + \mathbf{I})^{-1} \quad (17)$$

(다) 시간  $t^{(n)}$ 에서의 응력  $\sigma^{(n)}$ 과  $\Delta \varepsilon^{RN}$ 을 사용하여 구성관계로부터  $t^{(n+1)}$ 에서의 회전중립 응력( $\hat{\sigma}^{(n+1)}$ )과 회전중립 구성관계텐서( $\hat{\mathbf{L}}$ )를 구한다.

(라)  $\hat{\sigma}^{(n+1)}$ 과  $\hat{\mathbf{L}}$ 로부터  $\kappa^{(n+1)}$ 형상에서의 응력( $\sigma^{(n+1)}$ )과 구성관계텐서( $\mathbf{L}$ )를 다음과 같이 구한다.

$$\tilde{\sigma}^{(n+1)} = \rho \tilde{\sigma}^{(n+1)} \rho^T \quad (18)$$

$$\mathbf{L}_{ijkl} = \rho_{ia} \rho_{jb} \rho_{kc} \rho_{ld} \hat{\mathbf{L}}_{abcd} \quad (19)$$

### 3.3 수치적인 수행

제안된 압밀 지배방정식의 수식화에 보간(interpolation) 함수를 적용하여 변위와 과잉 간극수압을  $\mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ 로 표현하면 다음과 같은 행렬 형태의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{K}^{(n,i)} d\mathbf{D}^{(n,i+1)} = (\mathbf{F}_{\text{EXT}})^{(n+1)} - \mathbf{F}_{\text{INT}}(\mathbf{D}^{(n,i)}) \quad (20)$$

여기서  $\mathbf{K}^{(n,i)}$ 는  $t^{(n,i)}$ 에서의 비대칭 접선 강성행렬이고, 우측항은 잔여(residual) 하중벡터이다.

대변형이론에 의한 해석을 수행하기 위해서는 변위의 증분( $\Delta \mathbf{D}^{(n,i)}$ )에 3.2절의 회전을 고려한 역학적 구성관계를 적용하여 Newton의 반복과정을 통하여 안정적으로 수렴된 해를 산정한다.

### 4. 수치 예제 해석

개발된 대변형 해석 유한요소 프로그램을 이용하여 예제 문제들에 대한 수치해석을 수행하였다. 수치해석은 캔탈레버모 해석과 이차원 탄성압밀해석으로 미소 변형률 해석 결과와 비교 분석하여 프로그램의 안정성

과 적용성을 살펴보았다.

#### 4.1 캔틸레버보 예제

재료가 선형탄성이라는 가정하에 전단에 의한 처짐은 무시하고 휨모멘트에 의한 변형만을 고려하는 경우의 보의 정확한 처짐을 구하기 위한 미분방정식은 다음과 같다(Gere & Timoshenko, 1997).

$$\frac{d^2 u_y}{dx^2} \left/ \left[ 1 + \left( \frac{du_y}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \right. = -\frac{M}{EI} \quad (21)$$

여기서  $u_y$ 는 연직처짐,  $M$ 은 휨모멘트(bending moment)를 나타내고  $EI$ 는 휨강성도를 나타낸다.

Fig. 4는 캔틸레버보의 맨 끝단에 집중하중이 작용하

는 경우 대변형 해석, 미소변형 해석 그리고 이론식의 결과를 나타내었다. 미소변형 해석에서는 보 끝단의 연직변위는 하중에 정비례하고 수평변위가 발생하지 않지만, 대변형 해석은 보의 대변형 처짐을 관한 이론식을 잘 묘사할 수 있음을 알 수 있다(Fig. 4c & 4d). Fig. 4b는 3.2절의 회전을 고려한 구성관계를 적용한 경우와 적용하지 않는 경우의 Newton 반복과정에서의 해를 수렴도를 나타내었다. 회전효과를 고려하지 않은 구성관계의 적용은 해의 수렴을 크게 저하시키고 변형이 커질수록 기준 수렴도에 도달하기 위한 Newton 반복횟수가 급격히 증가한 후, 보다 큰 하중에서는 수렴상태에 도달하지 않고 발산함을 확인할 수 있었다.

#### 4.2 이차원 탄성 압밀 해석

개발된 유한요소프로그램을 이용하여 이차원 탄성

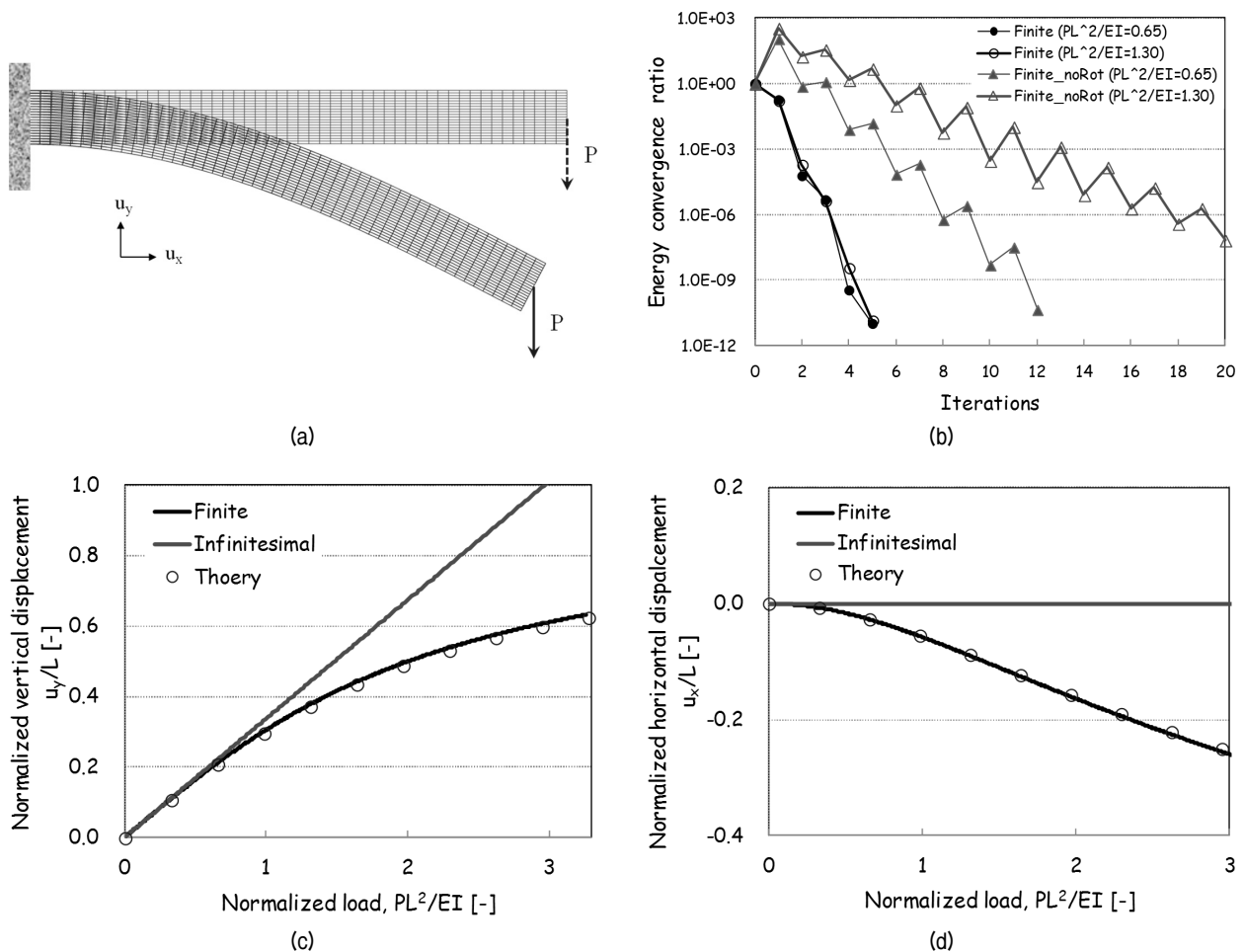


Fig. 4. Numerical analysis for cantilever beam. (A) Deformed shape due to vertical load at the tip of the beam with length  $L$ , (b) Energy convergence during Newton's iterations in Finite strain analysis, (c) Vertical displacement at the tip of the beam, (d) Horizontal displacement at the tip of the beam

압밀 문제에 대하여 대변형 및 미소변형 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 요소망은 Fig. 5a와 같고, 평면 변형률 조건하에서 물성치는  $E = 1.0 \times 10^3 t/m^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,

$k = 1.0 \times 10^{-4} m/s$ 이다. 그리고 상부 일면 배수조건에서 기초폭  $B$ 에 작용하는 단위면적당 상재하중은  $q$ 이다. 작용하중이 작은 경우( $q/E < 0.02$ ), 대변형 이론에 의

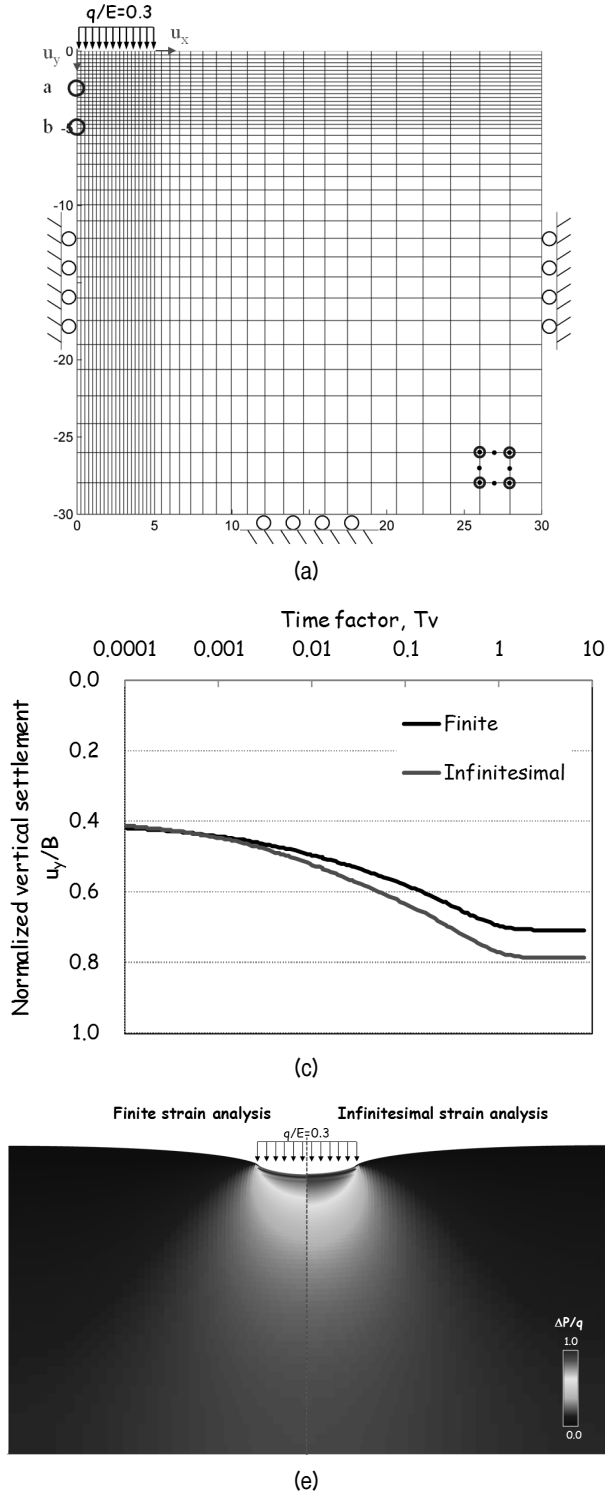


Fig. 5. Two-dimensional elastic consolidation. (a) FEM mesh and boundary conditions. (b) Evolution of excess pore-water pressure with time at location a and b. (c) Vertical settlement at the center of embankment with time. (d) Horizontal displacement at the toe of the embankment with time. (e) Comparison of developed excess pore-water pressure just after applying surface loading ( $T_v=0$ ). (f) Comparison of rotational strain at  $T_v=10$



한 해석결과는 침하, 과잉간극수압 등에 있어서 미소변형이론 해석결과에 매우 유사하게 예측되었다. 하지만 작용하중이 커질수록 대변형 이론과 미소변형이론에 의한 결과는 차이는 증가하였다. Fig. 5는 작용하중이  $q/E = 0.3$ 인 경우에 대한 수치해석 결과이다. 연직하중 재하직 후( $T_v = c_v t / H^2 = 0$ ), 작용하중에 의한 즉시 침하량은 두 이론에서 매우 비슷한 값을 예측하였으나(Fig. 5c), 과잉간극수압은 대변형 해석이 미소변형 해석보다 작게 예측하였다(Fig. 5b & 5e). 이는 압축성(compressibility) 정의에 사용되는 변형률의 차이에 기인한 것으로(대변형 해석:  $\varepsilon = \Delta l / l$ , 미소변형 해석:  $\varepsilon = \Delta l / l_0$ ), 대변형 해석에서 지반이 압축됨에 따라 압축성이 감소하고 최종 침하량이 미소변형률이론의 해석에 비해 작게 발생한다. 따라서 하중재해 직후 대변형 해석에서 적은 압축성으로 과잉간극수압이 상대적으로 작게 유발된다. 유발된 과잉간극수압이 완전히 소산에 의한 최종 변형량은 유효응력 증가에 의한 지반변형으로 압축성 감소로 대변형 해석이 미소변형해석 보다 작게 산정되었다(Fig. 5c & 5d). 그리고 성토하중의 선단부에서의 회전변형률은 대변형 해석이 작게 예측하였다(Fig. 5f).

이차원 하중조건에서 b지점에 비교하여 기초와 가까운 a지점이 상재하중에 의한 하중증가가 크고 이로 인하여 초기 과잉간극수압이 크게 발생하게 된다. 지점 a와 b에서의 시간경과에 따른 과잉 간극수압의 소산은 Coupled 문제에서 응력전이효과로 인하여 상재하중을 가한 직후 과잉간극수압이 즉시 감소하지 않고 일시적으로 증가하다가 감소하는 Mandel-Cryer 효과(Mandel 1953; Cryer 1963)를 잘 표현하고 있다(Fig. 5b).

## 5. 결론

연약지반위에 성토를 할 경우 초기 비배수 상태 뿐만 아니라 압밀 과정 중에도 기하학적인 큰 변형이 유발된다. 기존의 미소변형률 이론은 변형률이 작고 초기의 기하학적인 형상이 변형과정 동안 변하지 않는다고 가정하므로 큰 변형이 유발되는 경우를 적절히 묘사할 수 없다. 본 논문에서는 연약지반에서 대변형 해석을 수행할 수 있도록 압밀 지배방정식들을 수식화하고 예제 해석을 수행하였다.

힘평형 방정식과 유체 연속방정식이 결합된 압밀 지배 방정식을 Updated-Lagrangian 형태로 수식화하고, 탄

소성 이론에 가장 부합되고 객관성을 만족하는 Jaumann stress rate을 이용하여 역학적 구성관계를 표현하였다. 그리고 Nagtegaal이 제안한 회전을 고려한 구성관계를 적용하여 Newton의 반복과정을 통하여 정확한 해를 효율적으로 구할 수 있도록 하였다.

개발된 대변형 압밀해석 프로그램을 검증하기 위하여 켈틸레버보와 이차원 탄성 압밀문제를 해석하였다. 켈틸레버보해석에서 대변형 해석은 보의 처짐 이론식을 적절히 묘사할 수 있었으며, 역학적 구성관계 적용시 회전을 고려하지 않을 경우 Newton 반복과정에서의 해의 수렴도를 크게 저하됨을 확인할 수 있었다. 이차원 압밀해석에서 대변형해석이 압축성의 감소로 인하여 미소변형해석에 비하여 하중재해 직후의 과잉간극수압이나 최종침하량이 작게 발생함을 알 수 있었다. 그리고 시간경과에 따른 과잉 간극수압의 소산은 Mandel-Cryer 효과를 잘 표현하였다.

본 연구에서 제안한 방법을 이용하여 기존의 미소변형이론에 근거한 유한요소 프로그램을 대변형 해석을 위한 프로그램으로 용이하게 전환할 수 있을 것으로 기대된다. 그리고 향후 대변형을 유발하는 지반의 모형실험이나 현장실험에 대하여 미소변형에 의한 수치해석 결과와 비교 검증을 수행하고자 한다.

## 감사의 글

본 연구는 국토교통부와 국토교통과학기술진흥원 과제인 “환경친화적 준설토 확보, 매립 및 운송거리 30km 이상급 이송 기술 개발(12기술혁신E12)”의 연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고 문헌

1. Biot, M. A. (1941), “General theory of three dimensional consolidation”, J. Appl. Phys., 12, 155-169.
2. Carter, J. P. (1977), “A theory of finite elastic consolidation”, Int. J. Solids Structure, 13, 467-478.
3. Carter, J. P. (1979), “The analysis of finite elasto-plastic consolidation”, Int. J. Num. Anal. Meth. Geom., 3(2), 107-129.
4. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P. (1997), “Mechanics of materials”, Pws-kent publishing company.
5. Chakrabarty, J. (2010), “Applied Plasticity”, Springer, p.758.
6. Gibson, R. E., England, G. L., and Hussey, M. J. L. (1967), “The theory of one dimensional consolidation of clays”, Geotechnique, 17, 261-273.
7. Cryer, C. W. (1963). “A comparison of three dimensional theories

- of Biot and Terzaghi”, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 16, 72-81.
8. Hibbit, H. D., Marcal, P. V., and Rice, J. R. (1970), “A finite element formulation for problems of large strain and large displacement”, Int. J. Solids Structure, 6, 1069-1086.
  9. Hughes, Thomas. J. R. (1984), “Numerical implementation of constitutive models: rate- independent deviatoric plasticity”, Martinus Nijhoff Publishers.
  10. Irgens, F. (2008), “Continuum mechanics”, Springer, p.679.
  11. Mandel, J. (1953), “Consolidation des sols (étude mathématique)”, Géotechnique, 3, 287-299.
  12. Memeeking, R. M. and Rice, J. R. (1975), “Finite-element formulation for problems of large elastic-plastic deformation”, Int. J. Solids Structure, 11, 601-616.
  13. Nagtegaal, J.C. (1988), “On the development of a general purpose finite element program for analysis of forming process”, Int. J. Numer. Meth. Eng., 25, 113-131.
  14. Nazem, M., Sheng, D.C., and Carter, J.Pl. (2006), “Stress integration and mesh refinement for large deformation in geomechanics”, Int. J. Num. Anal. Meth. Geom., 65(7), 1002-1027.
  15. Prevost, J. H. (1981), “Consolidation of an elastic porous media”, Proc. ASCE EMI, 169-186.
  16. Terzaghi, K. (1925), “Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage”, F. Devtike, Viena.
  17. Zienkiewica, O. C. and Shiomi, T. (1984), “Dynamic behavior of saturated porous media: the generalized Biot formulation and its numerical solution”, Int. J. Numer. Meth. Eng., 8, 71-96.

(접수일자 2013. 6. 11, 심사완료일 2013. 6. 24)