

Value at Risk with Peaks over Threshold: Comparison Study of Parameter Estimation

Minjung Kang^a · Jiyeon Kim^a · Jongwoo Song^b · Seongjoo Song^{a,1}

^aDepartment of Statistics, Korea University; ^bDepartment of Statistics, Ewha Womans University

(Received April 1, 2013; Revised April 26, 2013; Accepted April 26, 2013)

Abstract

The importance of financial risk management has been highlighted after several recent incidences of global financial crisis. One of the issues in financial risk management is how to measure the risk; currently, the most widely used risk measure is the Value at Risk(VaR). We can consider to estimate VaR using extreme value theory if the financial data have heavy tails as the recent market trend. In this paper, we study estimations of VaR using Peaks over Threshold(POT), which is a common method of modeling fat-tailed data using extreme value theory. To use POT, we first estimate parameters of the Generalized Pareto Distribution(GPD). Here, we compare three different methods of estimating parameters of GPD by comparing the performance of the estimated VaR based on KOSPI 5 minute-data. In addition, we simulate data from normal inverse Gaussian distributions and examine two parameter estimation methods of GPD. We find that the recent methods of parameter estimation of GPD work better than the maximum likelihood estimation when the kurtosis of the return distribution of KOSPI is very high and the simulation experiment shows similar results.

Keywords: Value at Risk, Peaks over Threshold, Generalized Pareto Distribution.

1. 서론

서브프라임 모기지 사태, 미국, 일본과 유럽의 연이은 신용등급 하락과 같은 국제적인 금융위기가 연달아 발생하면서, 리스크 관리의 중요성이 커지고 있다. 이에 따라 리스크를 측정하는 가장 보편적인 지표인 Value at Risk(VaR)에 대한 관심도 더욱 높아진 상황이다. VaR는 정상적인 시장 여건 하에서, 주어진 신뢰수준에서 목표기간 동안에 발생하는 최대손실 금액을 의미한다. 기존에는 금융 자료가 정규성을 따른다고 가정하여 사용하는 것이 일반적이었으나 금융시장이 점점 정규성 가정을 떠나 극단값들을 포함하게 되면서 정규성 가정으로는 적절한 VaR가 얻어지지 않는 경우가 늘어나게 되었다. 그리하여 실제 자료에 보다 잘 적합할 수 있는 방법론들이 개발되었는데 그 가운데 하나가 극단치 이론을 이용한 방법이다. 이 논문에서는 극단치 이론 가운데 Peaks over Threshold(POT)를 이용하여 VaR를 구하는 방법을 다루고 있다. POT는 극단치 이론을 사용할 때 극단값에 포함시킬 관측치들을 선택하는 방법으

This research was supported by a 2012 Korea University Grant(S. Song) and by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(No. 2012-0003739)(J.Song).

¹Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Korea University, Anam-Dong, Seongbuk-Gu, Seoul 136-701, Korea. E-mail: sjsong@korea.ac.kr

로서, 극단치 이론에 따르면 분포의 꼬리가 시작되는 임계치 위쪽에 존재하는 초과분포는 임계치가 커질 때 일반화 파레토 분포(Generalized Pareto distribution; GPD)로 수렴하게 된다. 그러므로 POT 방법으로 VaR을 구하기 위해서는 꼬리부분의 분포를 GPD로 적합시킨 다음 이 분포의 누적분포함수와 원래 표본의 경험적 누적분포함수를 이용하여 전체 표본이 따르는 누적분포함수를 추정하고, 이 누적분포함수에서 구하고자 하는 백분위수, 즉 VaR값을 추정하게 된다. 이 과정에서 필요한 것이 임계치의 설정과 GPD적합을 위한 모수추정이다. 임계치의 설정에 대해서도 여러 논의가 있지만, 이 논문에서는 GPD 분포의 모수추정 방법에 대하여 살펴보고자 한다.

일반화 파레토 분포는 두꺼운 꼬리를 갖는 대표적인 분포로 형상 모수, 척도 모수와 위치 모수의 3가지 모수를 갖는다. 보통 위치 모수를 0으로 조정해주어 형상 모수와 척도 모수를 추정하며 POT 방법에서도 자료를 통해 이 두 가지 모수를 추정한다. 현재까지 가장 일반적으로 사용하고 있는 일반화 파레토 분포 모수추정 방법은 최대우도추정법(MLE)이라 할 수 있다. 최대우도추정법은 계산이 상대적으로 쉽고 방법이 단순하다는 장점이 있지만 일반화 파레토 분포의 형상 모수가 1보다 클 때 우도함수가 수렴하지 않아 모수 값을 추정할 수 없으며, 관측치가 많지 않은 경우 성능이 떨어진다는 단점이 있다. 이러한 이유로 대체방법들이 많이 연구되었는데, 예를 들면, 적률추정법(Method of moments), Hosking과 Wallis (1987)의 확률가중적률법(Method of probability weighted moments), Coles (2001)의 최대적합도 추정법(method of goodness-of-fit), Coles와 Dixon (1999)의 제한된 최대우도추정법(penalized maximum likelihood estimation), Zhang (2007)의 우도적률추정법(likelihood moment estimation), Juarez와 Schucany (2004)의 최소 밀도함수 먹거리차 추정법(minimum density power divergence estimation) 등이 있다.

이와 같이 여러 GPD 모수추정 방법들이 연구된 만큼 추정 방법 간 비교 연구도 많이 이루어져 있는데, 대부분 최대우도추정법, 확률가중적률법과 적률추정법을 위주로 비교되어 있다. 예를 들어, Hosking과 Wallis (1987)는 최대우도추정법, 확률가중적률법과 적률추정법을 비교하였고, Singh와 Guo (1995)는 최대우도추정법, 확률가중적률법, 적률추정법 및 엔트로피 추정법을 비교하였다. Juarez와 Schucany (2004)는 별점을 주어 새롭게 우도함수를 정의한 후 최대우도추정값을 계산하는 최소 밀도함수 먹거리차 추정법과 최대우도추정법, 중앙값을 비교하였다. 이와 같이 자료를 바꾸어 기존의 방법들을 다시 비교해 보는 방식의 비교 연구에 비해, 기존의 방법보다 더 나은 결과를 보이는 최신 모수추정 방법들에 대한 비교 연구는 아직 부족하다고 볼 수 있다. 그래서, 이 논문에서는 최근에 만들어진 기법들을 위주로 VaR의 성능을 통해 GPD의 모수추정 방법을 보고자 하며, 비교 대상은 가장 보편적으로 사용되고 있는 방법인 최대우도추정법과 최근에 연구된 베이지안적 방법 (Zhang, 2010), 비선형 최소제곱법 (Song과 Song, 2012)이다. 위의 방법들을 KOSPI 자료를 바탕으로 비교하고, 추가적으로 normal inverse Gaussian(NIG) 분포에서의 모의실험으로 최대우도추정법과 비선형 최소제곱법의 실효성을 VaR의 사후검증을 통해 살펴보고자 한다.

2. Value at Risk와 일반화 파레토 분포의 모수추정법

2.1. Value at Risk와 Peaks over Threshold

2.1.1. Value at Risk Value at Risk(VaR)란 정상적인 시장여건 하에서 주어진 신뢰수준으로 목표기간동안에 발생 가능한 최대손실금액으로 정의될 수 있는데 (Jorion, 2007), 통계학적으로 말하면 백분위수와 같은 개념이 된다. 리스크 측정 지표 중에서 계산과 해석이 간단하고 용이하여 현업에서도 많이 사용되고 있는 지표로서 시장 리스크를 정량화하고 관리하는데 유용하게 사용된다. 상업은행들은 바젤위원회의 결정에 따라 시장에서의 포지션별로 내부 모형을 토대로 VaR를 항상 계산해야 하고, 계산

된 값의 어느 정도 이상을 자본금으로 보유해야만 한다. 따라서 VaR의 계산은 금융기관들에게 중요한 과제이며 과대추정도 과소추정도 하지 않도록 적당한 값이 계산되는 모형이 필요하다. 과소추정을 하게 되면 사후검증을 통해 벌집이 부과되며 과대추정을 하게 되면 너무 과도한 자본금을 보유해야 하기 때문에 자금운용에 어려움을 겪게 되므로 정확한 VaR의 추정이 절실하게 된다.

관측되는 자료 X 가 누적분포함수 $F_X(x)$ 를 따르고 신뢰수준이 $100q\%$ 일 때, VaR를 수식으로 표현하면 $F_X(\text{VaR}) = q$ 와 같이 쓸 수 있다. VaR을 구하는 방법은 크게 모수적 방법과 비모수적 방법으로 구분되는데, 비모수적 방법은 관측치들의 분포를 따로 가정하지 않는 것으로 역사적 시뮬레이션 방법이 있다. 과거 자료가 미래의 분포를 설명한다는 가정하에, 과거 자료를 통해 얻어진 경험적 분포로부터 주어진 신뢰수준에 해당하는 분위수를 추정하는 것이다. 모수적 방법은 관측치들의 분포를 특정한 모형으로 가정하고 분위수를 찾는 것으로, 정규분포 등의 분포를 가정하여 분포함수로부터 백분위수를 추정하는 방법과 모의실험을 통해 백분위수를 추정하는 몬테카를로 시뮬레이션 방법 등이 있다. VaR에 대한 자세한 설명은 Jorion (2007)을 참조하면 된다.

2.1.2. Peaks over Threshold 극단치 이론은 분포의 중앙에서 많이 떨어져 있는 극단적인 자료를 다루는 이론으로서, 금융 보험 분야 뿐 아니라 공학, 지구과학, 지질학 등 많은 분야에서 널리 사용되고 있다. 극단값을 정의하는 방법은 크게 Block maxima 방법과 이 논문에서 사용하는 POT 방법이 있는데, 관측치들을 여러 그룹으로 나눈 다음 각 그룹의 최대값을 골라 극단값으로 정의하는 Block maxima 방법과는 다르게, POT 방법은 특정 값을 임계치로 설정하고 임계치보다 큰 관측치들을 극단값으로 정의한다. 임계치보다 큰 관측치들의 초과분포는 임계치가 커질 때 일반화 파레토 분포로 수렴함이 알려져 있으며, POT 방법을 사용하여 VaR를 추정하는 경우에는 이 일반화 파레토 분포를 적합시킨 다음 그 분포함수로부터 백분위수를 추정하여 VaR로 사용하게 된다. 극단치 이론에 대한 자세한 설명은 Embrechts 등 (1997)을 참조할 수 있다.

형상 모수 ξ 와 척도 모수 σ 를 갖는 일반화 파레토 분포의 누적분포함수 $F_{\xi,\sigma}$ 는 다음과 같다.

$$F_{\xi,\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

POT는 특정 임계치보다 큰 값들로 GPD를 적합시키게 되므로 임계치 설정이 매우 중요하다. 임계치 설정 방법으로는 임계치 선택 그림(Threshold choice plot), 평균 잔여 수명 그림(Mean residual life plot), L-적률 그림(L-moments plot), 산포지수 그림(Dispersion index plot) 등이 있으나, 이 논문에서는 임계치 설정보다는 GPD의 모수추정법의 비교가 주된 목표이기 때문에 일반적으로 자료의 90% 백분위수값을 임계치로 설정하여 사용하였다.

2.2. 모수추정 방법론

이 논문에서 비교할 세 가지 모수추정 방법은 다음과 같다. 아래 방법들에서 주어진 자료는 GPD에서 나온 임의 표본 X_1, \dots, X_n 이라 하고, $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ 은 그 순서통계량이라 하자.

2.2.1. 최대우도추정법(MLE) 우도함수를 최대화하는 모수를 찾는 방법이다. 가장 간단하고 일반적으로 널리 알려져 있는 방법이라 보통 많이 사용된다. 확률분포에 따라서 우도 함수의 계산이 복잡하거나 불가능한 경우도 많으며 표본의 수가 많아 최대우도추정법의 장점인 효율성을 얻을 수 있다는 한

계가 있다. 그리고 GPD의 경우 형상 모수가 1 이상일 경우 우도 함수가 수렴하지 않는다는 점이 단점이 있어 다른 모수추정법들이 연구되고 있다.

2.2.2. 베이지안 기법(ZHANG) 이 방법은 우도 적률 추정법(Likelihood Moments Estimation; LME)을 고안한 Zhang과 Stephens (2009)의 연구를 더 발전시킨 Zhang (2010)의 추정법으로 형상 모수가 -1 이하 일 때 성능이 떨어지던 LME의 단점을 보완하였다. 우선 $\theta = -\xi/\sigma$ 라고 새로운 모수를 정의하여 θ 와 ξ 를 추정한 후, $\hat{\sigma} = -\hat{\xi}/\hat{\theta}$ 로 결정한다. θ, ξ 에 대한 로그우도함수는

$$l(\theta, \xi) = n \log \left(-\frac{\theta}{\xi} \right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \log(1 - \theta X_i)$$

이 되고, θ 를 안다고 가정하면 ξ 의 MLE는 $\xi_\theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n \log(1 - \theta X_i)$ 가 될 것이다. θ 에 대한 추정량은 사전분포 $\pi(\cdot)$ 와 프로파일 로그우도함수 $l(\theta) = \ln L(\theta) = n[\log(-\theta/\xi_\theta) - \xi_\theta - 1]$ 에 대하여 다음과 같이 구하게 되는데,

$$\hat{\theta} = \frac{\int \theta \pi(\theta) L(\theta) d\theta}{\int \pi(\theta) L(\theta) d\theta},$$

직접 계산은 복잡하므로 $m = 20 + \lceil \sqrt{n} \rceil$, 사전분포의 $(j - 0.5)/m$ 백분위수인 θ_j 와 가중치 $w_j = L(\theta_j) / \sum_{t=1}^m L(\theta_t)$ 를 이용하여 $\hat{\theta} = \sum_{j=1}^m w_j \theta_j$ 와 같이 구한다. 여기서 $[x]$ 는 x 보다 작거나 같은 정수 가운데 가장 큰 것이다. Zhang (2010)에서는 Zhang과 Stephens (2009)와는 다른 사전분포를 사용하였는데, $\{(n-1)/(n+1)\} X_{(n)}^{-1} - \theta$ 가 σ^*, ξ^* 를 모수로 갖는 GPD를 따른다고 가정하였다. 그리고, 모의실험을 통하여, $\xi^* = 1$ 이고 $\sigma^* = [2\text{median}(\hat{\sigma}_{0.3}, \hat{\sigma}_{0.4}, \dots, \hat{\sigma}_{0.9})]^{-1}$ 일 때 가장 효율적임을 보였다. 여기서, $\hat{x}_\alpha = X_{(n\alpha+0.5)}$ 일 때 $\hat{\sigma}_p = -\hat{\xi}_p \hat{x}_{1-p} / (1 - p^{-\hat{\xi}_p})$, $\hat{\xi}_p = -\log_p(\hat{x}_{1-p^2} / \hat{x}_{1-p} - 1)$ 이다.

2.2.3. 비선형 최소제곱법(NLS) 관측된 경험적 누적분포함수를 일반화 파레토 분포의 누적분포함수로 비선형 회귀시켜 제곱합을 최소화시키는 모수를 찾는 Song과 Song (2012)의 방법이다. 다른 모수 추정 방법들에 비해 계산이 느리지 않으면서도 형상 모수가 -0.5 이상일 때 즉, 꼬리가 너무 짧지 않을 때 작은 누적평균제곱오차(Mean Squared Error)값을 가지므로, 그 구간에서의 추정력이 좋음을 알 수 있다. 하지만 형상 모수가 -0.5 미만일 때는 적절한 초기값의 설정이 필요하다. 관측치가 형상 모수 ξ , 척도모수 σ 를 갖는 일반화 파레토 분포를 따른다고 가정할 때, 다음의 4단계 과정을 통해 모수추정값을 얻는다.

1단계: 임계치 u 를 설정한 뒤, u 보다 큰 관측치들의 경험적 분포함수(EDF)의 값을 구한다.

2단계: $\log(1 - \text{EDF})$ 와 $\log(1 - \text{GPD의 이론적 분포함수})$ 를 아래와 같이 각각 반응변수와 설명변수로 설정하여 회귀식을 세운다. F_n 은 EDF이다.

$$\log(1 - F_n(x)) = -\frac{1}{\xi} \log \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma} \right) + \text{error}$$

$y_i = \log(1 - F_n(x_i))$ 일 때, $\sum (y_i + (1/\xi) \log(1 + \xi x_i / \sigma))^2$ 를 최소화시키는 ξ 와 σ 를 구한다.

3단계: 단계 2의 과정대로 $(\sigma, \xi) = (0.1, 0.01)$ 을 초기값으로 설정하여 비선형 최소제곱법을 실행한다.

4단계: 3단계에서 추정된 모수값; $(\hat{\sigma}^1, \hat{\xi}^1)$ 을 가지고 원래의 GPD 분포함수와 EDF로(로그를 취하지 않은) 비선형 최소제곱법을 실행하여 모수의 추정치를 얻는다.

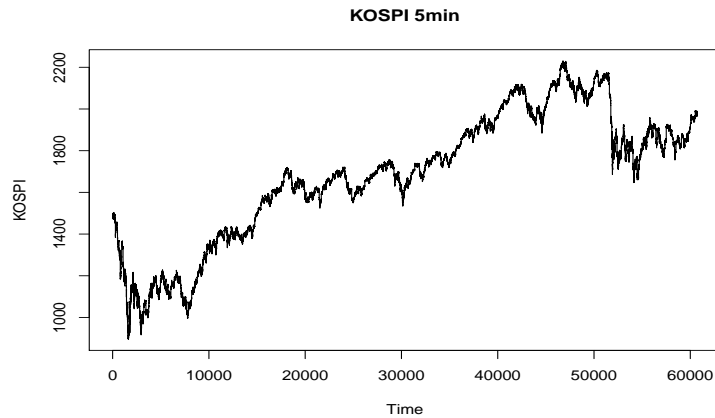


Figure 3.1. KOSPI 5 minute-data, from Sep. 24, 2008 to Feb. 6th, 2012

3. VaR를 통한 모수추정 방법의 성능 비교

3.1. 자료의 구성

우선, KOSPI 5분 종가 자료를 사용하여 일반화 파레토 분포의 모수추정 방법을 비교하고자 한다. 분석에 사용된 자료는 2008년 9월 24일부터 2012년 2월 6일까지의 KOSPI로서, 총 845일에 대하여 장이 열리는 오전 9시부터 오후 3시까지 하루당 각 72개의 5분 기준 종가 자료를 이용하였다. 이 기간은 2007년 서브프라임 모기지 사태로 촉발된 글로벌 경제위기와 2011년 미국과 일본의 연이은 신용등급 하락으로 인한 KOSPI의 급락시기를 포함하고 있다. 사용자료의 시계열은 Figure 3.1과 같으며, x 축의 1은 2008년 9월 24일 오전 9시 6분을 의미하고 x 축의 마지막 값인 60733은 2012년 2월 6일 15시 1분을 의미한다. VaR를 구하기 위해 자료를 로그 수익률로 변환하였으며, 로그 수익률의 평균은 4.7929, 표준편차는 0.0021, 첨도 146.1058, 왜도 2.1416으로 수익률의 분포가 매우 두꺼운 꼬리를 가지며 오른쪽으로 꼬리가 조금 긴 분포임을 알 수 있다. 따라서 매우 두꺼운 꼬리를 가진 분포에 적합한, 극단치 이론을 이용한 VaR의 계산이 유의미함을 짐작할 수 있었다.

3.2. 사후 검증

사후검증은 추정된 VaR의 정확성을 검증하는 과정으로서, 가장 간편하게 검증할 수 있는 방법은 실패율을 이용하는 것이라고 할 수 있다. 이것은 자료를 이용하여 추정된 t 시점의 VaR와 t 시점에서 실제 발생한 손실을 비교한 후 실제 발생한 손실이 추정된 VaR보다 클 때를 실패라고 보고, 이 실패율을 기준으로 모형의 정확성을 평가하는 방법이다. 예를 들어 100일 동안의 95% 일일 VaR를 각각 추정한 뒤 사후 검증을 이용하여 평가하였을 때, 실제 발생한 손실이 추정한 VaR보다 큰 경우가 95개, 즉 실패율이 5%인 것이 이상적이며 이런 경우 VaR이 잘 추정되었다고 할 수 있다. 이 사후 검증 방법은 3장과 4장에서 VaR의 성능평가를 위해 사용되고 있다.

3.3. 5분 VaR

MLE, NLS, ZHANG의 세 가지 모수 방법을 사용한 POT 방법으로 5분 기준 VaR를 추정하였다. 또 기준값(benchmark)으로 삼기 위해 정규분포를 가정하는 기본적인 분산-공분산 방식도 함께 사용하였

Table 3.1. Number of losses over the estimated 95% VaR: 5 minute-data

| | MLE | NLS | ZHANG | Normal |
|-----------|------|------|-------|--------|
| 100 days | 84 | 86 | 86 | 94 |
| 200 days | 170 | 176 | 175 | 191 |
| 500 days | 389 | 408 | 416 | 451 |
| 1000 days | 792 | 830 | 829 | 926 |
| 2000 days | 1622 | 1702 | 1695 | 1885 |
| 5000 days | 4150 | 4359 | 4307 | 4784 |

Table 3.2. Number of losses over the estimated 99% VaR: 5 minute-data

| | MLE | NLS | ZHANG | Normal |
|-----------|------|------|-------|--------|
| 100 days | 84 | 94 | 93 | 97 |
| 200 days | 170 | 193 | 190 | 197 |
| 500 days | 389 | 455 | 462 | 478 |
| 1000 days | 792 | 922 | 917 | 969 |
| 2000 days | 1625 | 1868 | 1854 | 1951 |
| 5000 days | 4153 | 4740 | 4665 | 4899 |

Table 3.3. Number of losses over the estimated 99.9% VaR: 5 minute-data

| | MLE | NLS | ZHANG | Normal |
|-----------|------|------|-------|--------|
| 100 days | 84 | 98 | 98 | 98 |
| 200 days | 170 | 198 | 198 | 198 |
| 500 days | 389 | 496 | 496 | 494 |
| 1000 days | 792 | 992 | 993 | 986 |
| 2000 days | 1635 | 1990 | 1992 | 1979 |
| 5000 days | 4178 | 4968 | 4976 | 4951 |

다. 분산-공분산 방식은 수익률의 분포를 정규분포로 적합시켜 평균과 분산을 추정한 다음 정규분포의 백분위수를 구하여 VaR를 추정하는 방법이다. 역시 모수추정 방법에 따라 조금씩 다른 값을 제공하게 된다. 여기서는 단순히 표본평균과 표본분산을 사용하였다.

100일, 200일, 500일, 1000일, 2000일, 5000일의 VaR를 추정하고 실제 관측된 수익률과 비교하였는데, 100일, 200일, 500일을 추정할 때는 추정시작 전 500개의 자료를 이용하여 모수를 추정하고, 이동식 윈도우(moving window)방식을 써서 사용되는 자료의 갯수를 동일하게 유지하였다. 1000일, 2000일, 5000일의 VaR를 추정할 때는 모수추정에 사용되는 자료의 갯수를 1000개로 설정하였다. 이렇게 사용하는 자료의 갯수를 달리한 것은, 과거 자료가 너무 많이 포함되거나 너무 적게 포함되면 추정력이 떨어질 수 있다고 보았기 때문이다. 이러한 설계에서 $n = 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000$ 일 가운데 제대로 VaR를 추정할 날짜수를 세었다. 제대로 VaR를 추정했다는 것은 실제 관측된 수익률의 자료가 VaR에서 추정된 값을 넘어가지 않는 것을 의미한다. 95%, 99%, 그리고 99.9% VaR를 추정할 결과가 Table 3.1, 3.2, 3.3에 나타나 있다.

Table 3.1, 3.2, 3.3의 결과를 보면 정규분포 가정(Normal), POT 방법 중 MLE, NLS, ZHANG의 모수추정 방법을 비교할 수 있다. 우선 95%의 신뢰수준에서는 POT보다는 정규분포 가정이 더 나은 결과를 보였다. 즉, 정규분포를 이용한 경우 VaR가 잘 추정된 날짜수가 전체의 95%에 가장 근접하고 있다는 것이다. 하지만 사용 자료의 첩도가 140을 넘는 특징을 지녔기 때문에, 95%보다는 99%, 99.9%의 신뢰수준을 살펴보는 것이 유의미할 것이다. Table 3.2와 Table 3.3을 보면 POT의 MLE 방법은 현적

Table 3.4. 99% Expected Shortfall: 5 minute-data

| | MLE | NLS | ZHANG | Normal |
|-----------|-------|-------|-------|--------|
| 100 days | 0.492 | 0.313 | 0.342 | 26.244 |
| 200 days | 0.318 | 0.157 | 0.177 | 26.244 |
| 500 days | 0.504 | 0.254 | 0.233 | 90.134 |
| 1000 days | 0.492 | 0.134 | 0.099 | 18.920 |
| 2000 days | 0.318 | 0.067 | 0.050 | 18.920 |
| 5000 days | 0.504 | 0.068 | 0.064 | 51.555 |

Table 3.5. 99.9% Expected Shortfall: 5 minute-data

| | MLE | NLS | ZHANG | Normal |
|-----------|-------|-------|-------|---------|
| 100 days | 0.492 | 0.134 | 0.099 | 18.920 |
| 200 days | 0.318 | 0.067 | 0.050 | 18.920 |
| 500 days | 0.504 | 0.068 | 0.064 | 51.555 |
| 1000 days | 0.493 | 0.064 | 0.057 | 110.934 |
| 2000 days | 0.410 | 0.038 | 0.029 | 163.903 |
| 5000 days | 0.450 | 0.086 | 0.059 | 569.202 |

히 그 성능이 떨어지고, POT의 NLS와 ZHANG 모수추정 방법과 기본 정규 분포 방법이 비슷하게 좋은 결과를 보이고 있음을 볼 수 있다.

한편, VaR는 그 값을 넘어가는 손실이 발생하였을 때 그 추가손실의 크기가 어느 정도인지에 대한 정보를 주지 않기 때문에, 금융리스크 관리에서는 종종 추가손실의 크기를 가늠할 수 있는 Expected Shortfall(ES)을 사용하여 정보를 보충하곤 한다. 100p% 분위수를 u 라 하면, 100p% Expected Shortfall은

$$\text{Expected shortfall} = E(X - u | X > u)$$

와 같이 정의된다. 즉, 100p% Expected shortfall은 추정된 100p% VaR을 넘어가는 추가손실의 평균치로 계산할 수 있다.

Table 3.4와 Table 3.5에는 5분 기준 자료를 통해 계산한 99%와 99.9% Expected Shortfall이 나타나 있다. 각각의 경우 추정된 VaR보다 크게 나타난 손실을 모아서 평균을 내어 계산하였는데, 정규분포를 가정하는 방법은 POT 방법에 비해 매우 큰 ES를 주고 있음을 볼 수 있다. 앞서의 결과와 종합해 보면, 정규분포를 가정하는 방법은 VaR를 잘 추정할 날짜의 수는 비교적 잘 맞추지만, VaR를 넘어가는 손실이 발생하는 경우 그 손실의 크기가 매우 크기 때문에, 이 방법을 사용하게 되면 위험에 대한 안전한 대비를 하기는 어려울 것이다. 반면, POT 방법은 ES를 작게 함으로써 위험에 대해 보수적으로 대응하도록 한다고 볼 수 있다. 그리하여, 꼬리가 두꺼운 분포일 경우에는 정규분포를 가정하는 방법보다 POT 방법이 더 안전한 결과를 주며, 특히 MLE보다는 NLS나 ZHANG 방법을 이용하여 VaR를 추정하는 것이 합리적일 것이다.

3.4. 1일 VaR 모의 실험

3.3절에서는 5분 수익률을 이용하여 VaR를 계산함으로써, 5분 후의 손실에 대한 예측을 기준으로 비교해 보았다. 그러나, 금융시장에서 관심이 있는 손실은 5분 후와 같은 아주 짧은 기간의 손실보다는 좀 더 긴 기간에 대한 손실이며, 실제로 흔히 계산되는 VaR는 1일 또는 10일 기준이다. 즉 5분 간격의 KOSPI값을 그대로 사용하여 5분 기준 VaR를 얻는 것보다는 1일 기준 VaR값을 얻는 것이 현실적

Table 3.6. Number of losses over the estimated 95% VaR: daily data

| | 100 days | | | 200 days | | | 300 days | | |
|---------|----------|-----|-------|----------|-----|-------|----------|-----|-------|
| | MLE | NLS | ZHANG | MLE | NLS | ZHANG | MLE | NLS | ZHANG |
| Method1 | 94 | 96 | 96 | 179 | 186 | 187 | 268 | 278 | 274 |
| Method2 | 66 | 82 | 79 | 130 | 162 | 160 | 201 | 240 | 240 |
| Method3 | 70 | 83 | 83 | 141 | 165 | 163 | 211 | 246 | 248 |

으로 더 의미가 있으며 해석도 용이하다는 것이다. 따라서 1일 기준 VaR를 추정하기 위해, 먼저 5분 KOSPI자료를 가지고 모의실험으로 1일 수익률분포를 얻고자 하였다. 5분 KOSPI자료로 GPD를 적합시키면 1일 증가를 모의실험을 통해 얻을 수 있기 때문이다. 모의실험은 아래와 같은 단계로 진행하였다.

한국 금융시장은 9시부터 15시까지 열리므로 1일은 72번의 5분 자료로 이루어진다. 즉, 모의실험으로 1일 증가를 얻기 위해서는 랜덤하게 발생된 72개의 5분 수익률을 더해야 한다는 것이다. 이를 위해 72개의 난수를 0과 1사이 균등분포에서 발생시킨 후, 그 값이 0.9 미만일 때는 관찰된 경험적 누적분포함수에서 자료를 추출하고 난수의 값이 0.9 이상일 때는 일반화 파레토 분포의 누적분포함수에서 자료를 추출하여 모의실험을 진행하였다. 이 때 일반화 파레토 분포의 모수를 추정하는 방법으로 MLE, NLS, ZHANG 기법을 각각 사용해 보았다. 그리고 경험적 누적분포함수를 구성하고 일반화 파레토 분포의 모수추정에 사용되는 자료는 추정을 시작하는 시점으로부터 과거 100일치의 5분 KOSPI자료를 사용하였다. 예를 들어, 2011년 9월 13일 증가를 가지고 14일의 증가를 생성하기 위해서는 72개의 난수를 0과 1사이 균등분포에서 발생시켜, 값이 0.9 미만일 때는 2011년 9월 13일로부터 이전 100일치의 5분 KOSPI수익률 자료의 경험적 분포함수에서 자료를 추출하고, 0.9 이상인 경우에는 100일치 5분 KOSPI수익률 자료를 일반화 파레토 분포의 모수를 추정한 다음 그 분포에서 자료를 추출한다. 그런다음 9월 13일 KOSPI 증가를 시작점으로 설정하고 추출된 72개의 수익률 자료를 시작점에 더하여 14일의 증가를 만들어 낸다. 15일의 증가는 14일의 증가를 시작점으로 하여 같은 단계를 거쳐 생성하는데, 이 때 사용하는 자료는 9월 14일로부터 이전 100일치의 5분 자료이다. 이러한 방식으로 MLE, NLS, ZHANG 기법에 대하여 100일, 200일, 300일의 KOSPI증가를 생성하였으며, 각 경우에 대해 1000회씩 모의실험을 반복하였다. 따라서 모든 하루에 해당하는 증가 자료가 1000개씩 존재하며, 이 1000개의 분포에서 원하는 수준의 VaR를 추정한 뒤 실패율을 이용하여 사후검증하였다. 100일치 증가를 생성한 경우는 2011년 9월 14일부터 2012년 2월 6일까지의 KOSPI증가를 만들어내어 사후검증하였고, 200일의 경우는 2011년 4월 19일부터 2012년 2월 6일까지의 증가를, 300일의 경우에는 2010년 11월 23일부터 2012년 2월 6일의 증가를 생성하여 사후검증하였다. 사용한 기간의 특성상 기간이 길어질수록 2010년 후반기와 2011년 전반기의 주가의 큰 움직임, 즉 극단치들이 포함되기 때문에 100일, 200일, 300일로 나누어 성능을 비교하게 되면 꼬리 분포의 차이에 따른 모수추정 방식의 성능을 파악할 수 있을 것이다.

만들어진 증가자료는 GPD에서 생성된 72개의 5분 자료를 더한 꼴로서, 그 자체가 GPD를 따른다고 생각하기는 어려우나, 이 논문에서는 GPD 모수추정 방법을 비교하는 것이 목적이므로 이 자료의 분위수도 POT 방법으로 구해보았다. 자료를 생성할 때 MLE를 쓴 경우는 분위수 추정에도 MLE를 사용하였고, NLS와 ZHANG에 대해서도 그렇게 하였다. 또, 1일 증가의 분위수를 추정하기 위해 쉽게 생각할 수 있는 경험적 분포의 분위수로 VaR를 추정해 보았고, 증가자료가 72개의 5분 자료를 더하여 만들어졌으므로 중심극한정리에 따라 그 분포가 정규분포에 근사될 것이라 볼 수 있으므로 정규분포를 이용하여 VaR를 추정하는 방법도 사용하였다.

이 세 가지 방법으로 95% VaR를 추정하여 사후검증한 결과는 Table 3.6과 같다. Method1은 POT를 이용한 추정이고, Method2는 경험적 분위수, Method3은 정규분포의 분위수이며, 각 방법을 MLE,

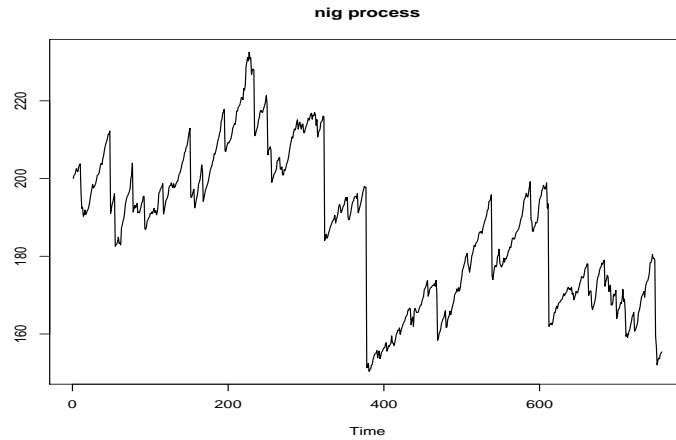


Figure 4.1. NIG process: A sample path with $\alpha = 65, \beta = -60, \delta = 0.5, \mu = 1$

NLS, ZHANG 방법으로 생성된 자료에 적용시켰다. 결과를 보면, 전반적으로 모든 경우에 있어서 NLS와 ZHANG 방법이 MLE보다 나은 결과를 보임을 알 수 있다. 특히 100일보다는 200일과 300일, 즉 자료 내에 극단값들이 더 포함될 수록 NLS와 ZHANG이 더 좋은 결과를 보이고 있다. VaR의 추정 방식 별로 보자면 Method2와 Method3은 거의 비슷하며, 그보다는 Method1이 더 적합해 보인다. 결과적으로 어떠한 VaR 추정방식을 사용하든지, NLS와 ZHANG이 MLE보다는 나은 결과를 주고 있으며 특히 극단치를 포함한 자료를 사용하는 경우 NLS와 ZHANG 방법을 사용하는 것이 합리적이라고 할 수 있겠다.

4. NIG 모형을 이용한 VaR 모의 실험

지금까지는 실제 금융시장에서 얻은 KOSPI 자료를 통해 VaR를 구함으로써 GPD의 모수추정 방법을 비교하였다. 이 장에서는 일반적으로 금융자료에 잘 적합되는 것으로 여겨지는 NIG 모형 가운데 몇 가지 다른 추세와 변동성, 첨도를 갖는 자료를 생성하여 이를 통해 비교해보고자 한다. 3장의 결과에서 NLS 방법과 ZHANG 방법의 성능이 많은 경우 비슷하여, 여기에서는 MLE 방법과 NLS 방법을 주로 비교하였다.

NIG 분포는 Barndorff-Nielsen (1997)에 의해 금융자료에 이용되기 시작하였는데, 꼬리가 두꺼운 금융 시계열 자료를 잘 적합한다는 특성을 지니고 있다. NIG 분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(x) = \frac{\delta\alpha}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1(\alpha g(x - \mu))}{g(x - \mu)},$$

여기서 $x \in R, \mu \in R, \delta > 0, 0 \leq |\beta| \leq \alpha$ 이고, $g(x) = \sqrt{\delta^2 + x^2}$ 이다. α 와 β 는 각각 꼬리의 두꺼운 정도와 비대칭성을 결정하는 모수이고 μ 는 위치모수이며, δ 는 첨도모수이다. K_1 는 제 3종 Bessel 함수이다.

3.1절에서 보았듯이 KOSPI 5분 자료는 첨도가 매우 높은 성질을 지니며, 이렇게 첨도가 높은 수익률분포의 백분위수를 추정할 때 POT 방법이 그 장점을 발휘할 수 있다. 모의실험에 사용하는 NIG자료도 이와 같이 첨도가 높은 경우로 생성해 보기 위해서 모수를 $\alpha = 65, \beta = -60, \delta = 0.5, \mu = 1$ 로 두었다. 이 경우 첨도는 266.613으로 계산되는데, 3.1절에서 보았던 5분 KOSPI 자료의 첨도 146.1058보다 좀

Table 4.1. Mean no. of losses over the estimated VaR under NIG model with kurtosis 266.613(std. dev. in parentheses)

| | 95% | 99% | 99.9% |
|-----|-------------|-------------|-------------|
| MLE | 36.90(6.64) | 21.92(6.97) | 13.04(5.68) |
| NLS | 24.83(3.87) | 6.34(2.39) | 0.44(0.58) |

Table 4.2. Mean no. of losses over the estimated VaR under NIG model with kurtosis 61.285(std. dev. in parentheses)

| | 95% | 99% | 99.9% |
|-----|-------------|--------------|-------------|
| MLE | 31.65(4.63) | 15.020(4.35) | 7.130(3.57) |
| NLS | 26.73(4.10) | 7.117(2.49) | 0.375(0.54) |

큰 값이 된다. 초기주가는 200으로 설정하였고 1년의 거래일을 252일로 가정하여 3년간의 표본경로를 만들었다. 초기 주가를 포함하여 총 757일이며 이러한 경로를 1000개 생성하였다. 그 중 하나의 경로를 그림으로 나타낸 것이 Figure 4.1이다.

생성한 NIG의 경로를 이용하여 POT의 MLE, NLS 방법으로 구한 VaR의 성능을 비교하였다. 여기서 첫 252일 자료는 모수추정에만 이용하고, 나머지 505일에 대한 VaR를 추정하였다. 추정할 때는 역시 이동식 윈도우 방식으로 자료를 하나씩 더하고 빼서 매번 직전 252개의 자료를 이용해서 모수추정 하도록 하였다. 505일에 대한 VaR를 추정하여 미리 생성해둔 NIG 경로에서 관찰되는 자료와 비교하여 VaR를 넘어가는 손실이 발생하는지를 확인하였는데 505일의 5%는 25.25일, 1%는 5.05일, 0.1%는 0.505일이 되므로, VaR를 넘는 초과손실이 발생하는 경우가 95% 수준에서 25.25일, 99% 수준에서 5.05일, 99.9% 수준에서 0.505일과 비슷하게 발생하면 VaR의 추정이 잘 되었다고 볼 수 있다. Table 4.1의 결과를 보면 NLS 방법이 VaR를 확연히 과소추정한 MLE 방법보다 더 좋은 결과를 보였다. 추가적으로 첨도가 다소 낮은 NIG 확률과정에 대해서도 같은 방법으로 비교해보았다. 이때 모수는 $\alpha = 65, \beta = -50, \delta = 1, \mu = 1$ 를 갖도록 하였고, 이 경우 첨도는 61.285로 계산된다. Table 4.2를 살펴보면 MLE 방법의 성능이 Table 4.1에서보다는 나아졌으나, 이 경우에도 NLS 방법이 MLE 방법에 비해 훨씬 좋은 성능을 보인다.

5. 논의

이 논문에서는 POT 방법의 주요 논제 중 하나인 GPD의 모수추정 방법을 금융자료에서 계산된 VaR를 이용하여 살펴보았다. 특히, 세 가지 모수추정 방법을 비교하였는데 이는 일반적으로 가장 많이 사용되는 MLE 방법과 최근에 좋은 성능을 가지는 것으로 발표된 NLS 방법과 ZHANG 방법이다. KOSPI 5분 자료를 이용하여 MLE 방법, NLS 방법과 ZHANG 방법으로 VaR를 추정함으로써 각 모수추정 방법을 비교하였다. 또, NIG 확률과정에서의 모의실험을 통해 MLE와 NLS 방법으로 VaR의 성능을 살펴보기도 하였다.

KOSPI 5분 수익률과 같이 꼬리가 매우 두꺼운 분포의 경우 정규분포를 가정하는 분산-공분산방법보다 POT 방법이 Expected Shortfall과 사후검증 측면에서 더 나은 결과를 보임을 알 수 있었고, POT 방법 중에서는 NLS와 ZHANG이 MLE보다 나은 모수추정 방식임을 볼 수 있었다. 모의실험을 통해 구해 본 1일 VaR의 경우, 꼬리가 두껍지 않은 100일의 경우 MLE, NLS, ZHANG 방법이 유사했으나 첨도가 큰 경우 NLS와 ZHANG이 MLE보다 좋은 성능을 보였다. 첨도가 높은 NIG 확률과정의 모의실험에서는 MLE 방법이 과소추정의 결과를 보였고 NLS는 이상적인 기각 횟수에 가깝게 나타났다.

KOSPI 자료를 통해 살펴본 한국 금융시장의 경우, 1일 기준 자료는 침도가 높지 않으므로 POT를 이 용하게 되면 NLS, MLE, ZHANG 중 어느 모수추정 방법을 사용하여도 무방하다고 할 수 있으나, 정의 된 자료의 시간 간격이 짧아질수록 꼬리가 두꺼워지는 특징을 가지므로, 1일 미만의 시간 간격을 가지게 되면 POT 방법의 NLS, ZHANG 모수추정 방법을 사용하는 것이 MLE를 사용하는 것보다 낫다고 할 것이다.

References

- Barndorff-Nielsen, O. (1997). Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 1–13.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer Series in Statistics, London.
- Coles, S. and Dixon, M. (1999). Likelihood-based inference for extreme value models, *Extremes*, **2**, 5–23.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer.
- Hosking, J. and Wallis, J. (1987). Parameters and quantile estimation for the Generalized Pareto Distribution, *Technometrics*, **29**, 339–349.
- Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd ed., McGraw Hill.
- Juarez, S. and Schucany, W. (2004). Robust and efficient estimation for the Generalized Pareto Distribution, *Extremes*, **7**, 237–251.
- Singh, V. P. and Guo, H. (1995). Parameter estimation for 3-parameter generalized Pareto distribution by the principle of maximum entropy (POME), *Hydrological Sciences*, **40**, 165–181. 입니다.
- Song, J. and Song, S. (2012). A quantile estimation for massive data with Generalized Pareto Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 143–150.
- Zhang, J. (2007). Likelihood moment estimation for the Generalized Pareto Distribution, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **49**, 69–77.
- Zhang, J. (2010). Improving on estimation for the Generalized Pareto Distribution, *Technometrics*, **52**, 335–339.
- Zhang, J. and Stephens, M. (2009). A new and efficient estimation method for the generalized Pareto distribution, *Technometrics*, **51**, 316–325.

Peaks over threshold를 이용한 Value at Risk: 모수추정 방법론의 비교

강민정^a · 김지연^a · 송종우^b · 송성주^{a,1}

^a고려대학교 통계학과, ^b이화여자대학교 통계학과

(2013년 4월 1일 접수, 2013년 4월 26일 수정, 2013년 4월 26일 채택)

요약

국제적인 금융위기가 연달아 발생하면서, 금융리스크관리의 중요성이 어느 때보다 더 커지고 있다. 금융리스크관리의 주요 현안 가운데 하나는 리스크를 어떻게 측정할 것인가이며, 가장 널리 사용되고 있는 방법이 Value at Risk(VaR)이다. 금융자료가 최근 시장에서처럼 두꺼운 꼬리를 갖는 분포를 보일 때, 우리는 극단치 이론을 이용하여 VaR를 측정하는 방법을 고려할 수 있다. 이 논문에서는 꼬리가 매우 두꺼운 분포를 갖는 자료를 적합시킬 때 많이 사용되는 Peaks over Threshold(POT)를 이용하여 VaR를 측정하는 방법을 연구하였다. POT를 이용하기 위해서는 우선 일반화 파레토 분포(GPD)의 모수를 추정해야 하는데, 여기서 우리는 KOSPI 5분 자료를 이용하여 추정된 VaR의 성능을 살펴봄으로써 세 가지 다른 모수추정 방법을 비교하였다. 또한, Normal Inverse Gaussian(NIG) 분포에서 자료를 생성하여 두 가지 다른 모수추정 방법을 비교하기도 하였다. 이러한 비교를 통하여 KOSPI 수익률 자료의 첨도가 매우 큰 경우에는 최근 제안된 모수추정 방법들이 최대가능도 추정법에 비해 월등히 나은 성능을 보임을 알 수 있었고, 모의실험 자료에서도 같은 결과를 확인하였다.

주요용어: Value at Risk, Peaks over Threshold, 일반화 파레토 분포.

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업이며 (No. 2012-0003739)(송종우) 2012년 고려대학교 특별연구비의 지원을 받았음(송성주).

¹교신저자: (136-701) 서울시 성북구 안암로 145, 고려대학교 통계학과, 교수. E-mail: sjsong@korea.ac.kr