

# 동일 평면상에서 연성된 반무한 Mindlin 판의 파동전달해석

## Wave Transmission Analysis of Co-planar Coupled Semi-infinite Mindlin Plate

박 영 호†  
Young-Ho Park

(Received May 3, 2013 ; Revised June 4, 2013 ; Accepted June 11, 2013)

**Key Words** : Wave Transmission Analysis(파동전달해석), Semi-infinite(반무한), Diffuse Field(분산장), Energy Analysis(에너지해석법), Mindlin Plate Theory(Mindlin 판이론), Classical Plate Theory(고전 판이론)

### ABSTRACT

At high frequencies, the statistical approach such as statistical energy analysis(SEA) and energy flow analysis(EFA) has been applied for estimation of vibroacoustic responses of various built-up structures. The energy coupling relationship between finite coupled structures is required to estimate vibrational energetics of built-up structures. Mindlin plate theory includes the rotatory inertia and shear deformation effects which are dominant as frequency increases. In this paper, the wave transmission analysis is successfully performed for EFA of co-planar coupled Mindlin plates.

### Nomenclature

- $\omega_c$  : Mindlin판의 임계주파수
- $k_1$  : 면외전단파(OPSW)의 파수
- $k_2$  : 굽힘우세횡파(BDFW)의 파수
- $k_3$  : 전단우세횡파(SDFW)의 파수
- $\phi, \psi$  : 변위 포텐셜 함수

### 1. 서 론

고주파수 대역에서는 동적 시스템(dynamic system)의 물리적 파라미터(physical parameters)의 주파수 민감도가 높아지고 모드간격이 좁기 때문에, 기존 저주파수 대역에서 높은 신뢰성을 갖고 적용되었던 변위해에 기반한 전통적인 유한요소법(FEM)이나 경계요소법(BEM)과 같은 결정론적 방법(deterministic

approach)은 비용적 측면에서 보나 예측 결과의 타당성 측면에서나 해석 기법으로 적절하지 않다. 이런 이유로 에너지에 기반한 통계적 방법(statistical approach)은 고주파수 대역에서 합리적인 대안으로 받아들여지고 있다.

통계적 방법 중에 대표적인 방법으로 통계적에너지해석법(SEA)은 모드밀도가 높은 동적 시스템의 진동소음 에너지 레벨을 예측할 수 있는 기법으로 선형 연립방정식 형태의 파워평형식(power balance equation)을 기반으로 하여 매우 간단하게 분산장의 에너지 분포를 예측할 수 있다<sup>(1)</sup>. 또한 열전도 방정식(heat conduction equation) 형태의 에너지지배방정식에 기반한 에너지흐름해석법(EFA)은 통계적에너지해석법과 같이 저댐핑(light damping)의 분산장 에너지밀도의 공간 분포를 예측할 수 있으며, 편미분 방정식 형태의 지배방정식을 갖고 있어, 국부적인 제진 처리 및 유한요소법과 같은 수치기법의 적용에 용이

† Corresponding Author ; Member, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Changwon National University  
E-mail : parkyh@changwon.ac.kr  
Tel : +82-55-213-3684, Fax : +82-55-213-3689

# A part of this paper was presented at the KSNVE 2013 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor SungSoo Na

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

한 보다 진보된 방법이다<sup>(2)</sup>.

앞에서 설명한 것과 같이 모드밀도가 높은 고주파수 대역에서 합리적인 소음진동 예측기법이 통계적 기법임에도 불구하고 기존 통계적에너지해석법이나 에너지흐름해석법은 복합 연성 구조물의 소음진동해석을 수행할 경우, 고주파수 대역에서 무시할 수 없는 전단변형 효과(shear distortion effect)와 회전관성 효과(rotatory inertia effect)를 반영하지 못하고 있다. 박영호와 홍석윤은<sup>(3-5)</sup> Timoshenko 보와 Mindlin 판의 에너지흐름모델을 개발했고 Timoshenko 연성 구조물의 에너지흐름해석을 위해 파동전달해석을 수행하였다. 그들은 고주파수 대역에서 구조물의 진동레벨 예측 시 전단변형 효과와 회전관성효과의 중요성을 보여줬다.

이 논문에서는 연성된 Mindlin 판의 통계적에너지 해석이나 에너지흐름해석을 수행하기 위해서 우선적으로 요구되는 파동전달해석(wave transmission analysis)을 수행하였다.

## 2. Mindlin 판 이론

### 2.1 Mindlin 판의 면외 운동방정식

Mindlin 판의 면외 운동방정식은 Hamilton의 변분원리(variational principle)를 이용하여 얻어질 수 있다. 변분원리에 사용되는 라그랑지안(Lagrangian)은 위치에너지에서 운동에너지의 차로 정의되며 Mindlin 판의 면외 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$D \left[ \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial x \partial y} \right] + \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) - I\rho \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$D \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial y^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial x \partial y} \right] + \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right) - I\rho \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$-\kappa Gh \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

여기서  $w$ 은 횡방향 변위를 나타내며,  $\alpha_x$ 와  $\alpha_y$ 는 굽힘

에 의한 각 축방향의 회전각,  $h$ 는 판의 두께,  $I = h^3/12$ 는 단위 폭 당 관성모멘트,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 은 굽힘 강성률,  $\nu$ 는 푸아송비,  $E$ 는 탄성계수,  $\kappa = 20(1+\nu)/(24+25\nu+\nu^2)$ 는 전단보정계수,  $G = E/[2(1+\nu)]$ 는 전단계수를 나타낸다.

### 2.2 Mindlin 판의 면외 운동

Mindlin 판의 면외 운동방정식의 해를 유도하기 위해서 다음과 같이 변위 포텐셜 함수(displacement potential function)를 정의하여 각 축 방향의 회전각을 표현할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$\alpha_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \alpha_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4,5)$$

여기서  $\phi$ 와  $\psi$ 은 각각 변위 포텐셜을 나타낸다.

이와 같은 변위 포텐셜을 이용하여 운동방정식(1~3)을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$D\nabla^2 \phi + \kappa Gh(w - \phi) - I\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (6)$$

$$D \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \nabla^2 \psi \right] - \kappa Gh(\psi) - I\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

$$-\kappa Gh(\nabla^2 w - \nabla^2 \phi) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

또한 식(4,5)를 이용하면 다음과 같은 변위 포텐셜의 라플라시안(Laplacian)을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial y}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \quad (9,10)$$

여기서  $\gamma_{xz} = \partial w / \partial x - \alpha_x$ 와  $\gamma_{yz} = \partial w / \partial y - \alpha_y$ 은 전단 변형률(shear strain)이다.

식(9), (10)을 보면 변위 포텐셜  $\phi$ 는 전단 변형과 회전 관성을 포함하고 있고,  $\psi$ 는 전단 효과만 반영되어 있음을 알 수 있다. 따라서 식(7)은 조화운동(time-harmonic motion)에 대해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\nabla^2 \psi + \left( \frac{\rho I \omega^2 - \kappa Gh}{GI} \right) \psi = 0. \quad (11)$$

식 (11)의 일반해(general solution)는  $\omega > \omega_c$  일 경우 다음과 같은 원거리 영역 파동해(far-field wave solution)가 얻어진다.

$$\psi(x, y, t) = (\bar{A}e^{-jk_{1x}x} + \bar{B}e^{jk_{1x}x})(\bar{C}e^{-jk_{1y}y} + \bar{D}e^{jk_{1y}y})e^{j\omega t} \tag{12}$$

여기서  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ 는 상수이고  $\omega_c = \sqrt{\kappa Gh/\rho I}$ 는 파수(wavenumber)  $k_1 = \sqrt{(\rho I \omega^2 - \kappa Gh)/GI}$ 을 갖고 있는 변위 포텐셜  $\psi$  파동의 임계주파수(critical frequency)이며,  $k_{1x}, k_{1y}$ 는 각각 파수  $k_1$ 의  $x, y$ 방향 성분이다.

식 (6), (8)의 조화운동에 대한 일반해를 구하기 위해 식 (13)과 같은 해 형태를 가정할 수 있고 식 (14)과 같은 파수에 대한 특성방정식(characteristic equation)이 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ w \end{Bmatrix} = C\bar{d} \exp(K_x x + K_y y) e^{j\omega t}, \tag{13}$$

$$K^4 + \rho\omega^2 \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{I}{D} \right) K^2 + \rho\omega^2 \left( \frac{\rho I \omega^2}{\kappa G D} - \frac{h}{D} \right) = 0. \tag{14}$$

여기서  $C$ 는 상수이고  $\bar{d}$ 는 상수 벡터,  $K$ 는 파수이다. 식 (14)의 근은 식 (11)의 임계주파수와 동일한 값 ( $\omega_c = \sqrt{\kappa Gh/\rho I}$ )을 기준으로  $\omega > \omega_c$  일 경우 두 종류의 허근이,  $\omega < \omega_c$ 에서는 한 종류의 허근이 얻어진다.

따라서 Mindlin 판의 면외 운동에서,  $\omega > \omega_c$ 에서는 총 세 종류의 원거리 영역 파동해(wave solution)가 얻어지고,  $\omega < \omega_c$ 에서는 단 한 종류의 원거리 영역 파동해가 얻어진다.  $\omega > \omega_c$ 에서 변위 포텐셜  $\phi$ 와 횡방향 변위  $w$ 의 파동해는 다음과 같이 원거리 영역 성분으로 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \phi \\ w \end{Bmatrix} = \left[ \begin{Bmatrix} \rho h \omega^2 - \kappa G h k_2^2 \\ -\kappa G h k_2^2 \end{Bmatrix} \left( \bar{A}e^{(-jk_{2x}x - jk_{2y}y)} + \bar{B}e^{(-jk_{2x}x + jk_{2y}y)} \right) + \bar{C}e^{(jk_{2x}x - jk_{2y}y)} + \bar{D}e^{(jk_{2x}x + jk_{2y}y)} \right] + \left[ \begin{Bmatrix} \rho h \omega^2 - \kappa G h k_3^2 \\ -\kappa G h k_3^2 \end{Bmatrix} \left( \bar{E}e^{(-jk_{3x}x - jk_{3y}y)} + \bar{F}e^{(-jk_{3x}x + jk_{3y}y)} \right) + \bar{G}e^{(jk_{3x}x - jk_{3y}y)} + \bar{H}e^{(jk_{3x}x + jk_{3y}y)} \right] e^{j\omega t}. \tag{15}$$

여기서 각 파수는

$$k_2 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{I}{D} \right) + \sqrt{\frac{\rho^2\omega^4}{4} \left( \frac{1}{\kappa G} - \frac{I}{D} \right)^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D}}} \tag{16}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{2} \left( \frac{1}{\kappa G} + \frac{I}{D} \right) - \sqrt{\frac{\rho^2\omega^4}{4} \left( \frac{1}{\kappa G} - \frac{I}{D} \right)^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D}}} \tag{17}$$

이다.

박영호와 홍석운<sup>(5)</sup>은 가진주파수에 관계없이 항상 원거리 영역 파동해인 파수  $k_2$ 를 가진 파동을 굽힘 우세횡파(BDFW: bending dominant flexural wave)로, 순수하게 전단의 영향이 반영된 파동해인 파수  $k_1$ 을 가진 파동을 면외전단파(OPSW: out-of-plane shear wave), 임계주파수 위에서 전단의 영향이 지배적인 파동해인 파수  $k_3$ 를 가진 파동을 전단우세횡파(SDFW: shear dominant flexural wave)로 각각 분류 명명하였다.

### 3. 동일 평면상의 Mindlin 판의 파동전달해석

#### 3.1 Mindlin 판의 면외 운동의 진동 파워

Mindlin 판의 면외 진동에서  $x$ 방향의 시간평균된 파워는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\langle q_x \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ -D \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial t} \right)^* - (1-\nu) \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \alpha_y}{\partial t} \right)^* - \kappa Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^* \right] \tag{18}$$

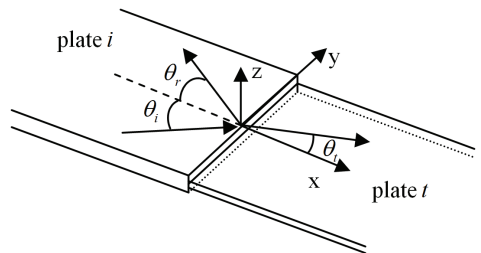


Fig. 1 Coupled coplanar semi-infinite Mindlin plates

여기서 \*는 켈레복소수를 의미한다.

먼저 Fig. 1의 평판  $i$ 에서, 임계주파수보다 높은 주파수 영역일 경우  $\bar{A}$ 의 크기를 가진 원거리 면외 전단파(far-field OPSW)가 두 판의 경계로  $\theta_i$ 의 각도로 입사할 때 평판  $i$ 에 존재하는 면외전단파는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi_i(x,y) = \bar{A}e^{-jk_{1x,i}x - jk_{1y,i}y} + Be^{jk_{1x,i}x - jk_{1y,i}y} \quad (19)$$

여기서  $\theta_i = \theta_r$ ,  $k_{1x,i} = k_{1,i} \cos \theta_i$ ,  $k_{1y,i} = k_{1,i} \sin \theta_i$ 이다.

마찬가지로 평판  $i$ 에서  $\bar{C}$ 의 크기로 입사하고  $D$ 의 크기로 반사하는 원거리 굽힘우세회파는 주파수에 상관없이 다음과 같다.

$$\begin{cases} \phi_i \\ w_i \end{cases} = \begin{cases} \rho_i h_i \omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2 \\ -\kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2 \end{cases} \left( \bar{C}e^{(-jk_{2x,i}x - jk_{2y,i}y)} + D e^{(jk_{2x,i}x - jk_{2y,i}y)} \right) \quad (20)$$

여기서  $k_{2x,i} = k_{2,i} \cos \theta_i$ ,  $k_{2y,i} = k_{2,i} \sin \theta_i$ 이다.

또한 평판  $i$ 에서, 임계주파수보다 높은 주파수 영역일 경우  $\bar{E}$ 의 크기로 입사하고  $F$ 의 크기로 반사하는 원거리 전단우세회파는 주파수에 상관없이 다음과 같다.

$$\begin{cases} \phi_i \\ w_i \end{cases} = \begin{cases} \rho_i h_i \omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2 \\ -\kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2 \end{cases} \left( \bar{E}e^{(-jk_{3x,i}x - jk_{3y,i}y)} + F e^{(jk_{3x,i}x - jk_{3y,i}y)} \right) \quad (21)$$

여기서  $k_{3x,i} = k_{3,i} \cos \theta_i$ ,  $k_{3y,i} = k_{3,i} \sin \theta_i$ 이다.

평판  $i$ 에서 입사한 파동의 투과로 인해 평판  $t$ 에서 존재하는 투과파는 다음과 같이 표현된다.

$$\psi_t(x,y) = Ge^{-jk_{1x,t}x - jk_{1y,t}y} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \phi_t \\ w_t \end{cases} = \begin{cases} \rho_t h_t \omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2 \\ -\kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2 \end{cases} \left( H e^{(-jk_{2x,t}x - jk_{2y,t}y)} \right) \quad (23)$$

$$\begin{cases} \phi_t \\ w_t \end{cases} = \begin{cases} \rho_t h_t \omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2 \\ -\kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2 \end{cases} \left( I e^{(-jk_{3x,t}x - jk_{3y,t}y)} \right) \quad (24)$$

여기서 경계에서  $y$ 방향 파수 매칭(matching)과 전반

사 조건을 고려하면

$$k_{1y,i} = k_{2y,i} = k_{3y,i} = k_{1y,t} = k_{2y,t} = k_{3y,t} \quad (25)$$

$$k_{1,2,3x} = \begin{cases} k_{1,2,3} \sqrt{(k_{1,2,3y}/k_{1,2,3})^2 - \sin^2 \theta_i} & (k_{1,2,3y}/k_{1,2,3} > \sin \theta_i) \\ -jk_{1,2,3} \sqrt{\sin^2 \theta_i - (k_{1,2,3y}/k_{1,2,3})^2} & (k_{1,2,3y}/k_{1,2,3} < \sin \theta_i) \end{cases} \quad (26)$$

이다.

Mindlin 판의 경계조건은 변위, 각 연속조건과 모멘트, 전단력의 평형조건을 적용하게 된다. 두 판의 경계에서의 경계조건을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$w_i(0,y) = w_t(0,y) \quad (27)$$

$$\alpha_{x,i}(0,y) = \alpha_{x,t}(0,y) \quad (28)$$

$$\alpha_{y,i}(0,y) = \alpha_{y,t}(0,y) \quad (29)$$

$$M_{x,i}(0,y) = M_{x,t}(0,y) \quad (30)$$

$$M_{xy,i}(0,y) = M_{xy,t}(0,y) \quad (31)$$

$$V_{x,i}(0,y) = V_{x,t}(0,y) \quad (32)$$

여기서

$$\alpha_{x,i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \quad \alpha_{y,i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_i}{\partial x},$$

$$M_{x,i} = D \left( \frac{\partial \alpha_{x,i}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \alpha_{y,i}}{\partial y} \right),$$

$$M_{xy,i} = (1-\nu) \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \alpha_{x,i}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{y,i}}{\partial x} \right),$$

$$V_{xy,i} = (1-\nu) \frac{D}{2} \left( \frac{\partial \alpha_{x,i}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{y,i}}{\partial x} \right)$$

이다.

위와 같은 6개의 경계조건을 적용하면 파동장 식(19)~(24)의 6개의 미지수를 얻을 수 있고 각 파동의 시간평균된  $x$ 방향의 파워는 다음과 같이 표현된다.

$$P_{OPSW,i}^{inc} = \frac{1}{2} \left[ \frac{D_t}{2} (1 - \nu_i) \omega k_{1x,i} k_{1z,i}^2 \right] \times |A|^2, \quad (33)$$

$$P_{OPSW,i}^{refl} = \frac{1}{2} \left[ \frac{D_t}{2} (1 - \nu_i) \omega k_{1x,i} k_{1z,i}^2 \right] \times |B|^2, \quad (34)$$

$$P_{BDFW,i}^{inc} = \frac{1}{2} \left[ D_i (\rho_i h_i \omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2)^2 \omega k_{2x,i} k_{2,z,i}^2 + (\rho_i h_i \omega^2) (\omega k_{2x,i}) (\kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2)^2 \right] \times |C|^2, \quad (35)$$

$$P_{BDFW,i}^{refl} = \frac{1}{2} \left[ D_i (\rho_i h_i \omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2)^2 \omega k_{2x,i} k_{2,z,i}^2 + (\rho_i h_i \omega^2) (\omega k_{2x,i}) (\kappa_i G_i h_i k_{2,i}^2)^2 \right] \times |D|^2, \quad (36)$$

$$P_{SDFW,i}^{inc} = \frac{1}{2} \left[ D_i (\rho_i h_i \omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2)^2 \omega k_{3x,i} k_{3,z,i}^2 + (\rho_i h_i \omega^2) (\omega k_{3x,i}) (\kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2)^2 \right] \times |E|^2, \quad (37)$$

$$P_{SDFW,i}^{refl} = \frac{1}{2} \left[ D_i (\rho_i h_i \omega^2 - \kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2)^2 \omega k_{3x,i} k_{3,z,i}^2 + (\rho_i h_i \omega^2) (\omega k_{3x,i}) (\kappa_i G_i h_i k_{3,i}^2)^2 \right] \times |F|^2, \quad (38)$$

$$P_{OPSW,t}^{trans} = \frac{1}{2} \left[ \frac{D_t}{2} (1 - \nu_t) \omega k_{1x,t} k_{1z,t}^2 \right] \times |G|^2, \quad (39)$$

$$P_{BDFW,t}^{trans} = \frac{1}{2} \left[ D_t (\rho_t h_t \omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2)^2 \omega k_{2x,t} k_{2,z,t}^2 + (\rho_t h_t \omega^2) (\omega k_{2x,t}) (\kappa_t G_t h_t k_{2,t}^2)^2 \right] \times |H|^2, \quad (40)$$

$$P_{SDFW,t}^{trans} = \frac{1}{2} \left[ D_t (\rho_t h_t \omega^2 - \kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2)^2 \omega k_{3x,t} k_{3,z,t}^2 + (\rho_t h_t \omega^2) (\omega k_{3x,t}) (\kappa_t G_t h_t k_{3,t}^2)^2 \right] \times |I|^2, \quad (41)$$

### 3.2 Mindlin 판의 면외 파워투과반사계수

분산장에 대한 파워투과반사계수는 식 (33)~(41)에서 얻은 파를 입사각에 대한 평균을 취하면 다음과 같은 분산장에 대한 파워투과반사계수가 유도된다<sup>(7)</sup>.

$$\langle P_x \rangle_{diffuse} = \int_0^\pi P(\theta) d\theta \quad (42)$$

$$T_{OO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, T_{OB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, T_{OS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{OPSW,i}^{inc}},$$

$$R_{OO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, R_{OB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}}, R_{OS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{OPSW,i}^{inc}}$$

$$T_{BO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, T_{BB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, T_{BS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{BDFW,i}^{inc}},$$

$$R_{BO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, R_{BB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}}, R_{BS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{BDFW,i}^{inc}}$$

$$T_{SO12} = \frac{P_{OPSW,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, T_{SB12} = \frac{P_{BDFW,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, T_{SS12} = \frac{P_{SDFW,t}^{trans}}{P_{SDFW,i}^{inc}},$$

$$R_{SO11} = \frac{P_{OPSW,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, R_{SB11} = \frac{P_{BDFW,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}}, R_{SS11} = \frac{P_{SDFW,i}^{refl}}{P_{SDFW,i}^{inc}} \quad (43)$$

여기서  $T_{OB12}$ 는 OPSW가 입사할 경우 BDFW로 투과되는 파워 비율을 의미하며,  $R_{OB11}$ 는 OPSW가 입사하여 BDFW로 반사되는 파워 비율을 나타낸다.

유도된 동일 평면상에서 연성된 Mindlin 판의 수치해석을 위해 Fig. 1과 같은 반무한 평판구조물에 알루미늄 재료의 각각 0.04 m, 0.02 m의 입사평판, 투과평판이 채택되었다. 각 평판의 임계주파수는 248 kHz, 493 kHz이다.

동일 평면상에서 연성된 Mindlin 판에 대한 파동 전달해석결과가 Figs. 2~4에 나타나 있다. 일반적으로 파워손실이 없는 보존 조인트인 경우 파워투과반사계수의 합은 1이다. Figs. 2~4에서 모두 파워투과반사계수들의 합은 모든 주파수 대역에서 정확히 1이 됨을 확인할 수 있고 이를 통해 앞에서 전개한 이론식의 타당성을 검증할 수 있다. Fig. 3은 첫 번째 평판의 임계주파수(248 kHz) 아래 영역의 파워투과반사계수로 단  $T_{BB12}$ ,  $R_{BB11}$  두 가지만 0이 아님을 확인할 수 있다. 이는 입사평판, 투과평판 모두 굽힘우세횡파(BDFW)만이 진행파이기 때문이며 Kirchhoff 판 이론의 경우와 동일하다.

이와 달리 Fig. 4에서와 같이 입사평판의 임계주파수 위에서는 다양한 진행파동이 존재하며 그에 따른 파워투과반사계수가 예측된다. Fig. 4에 493 kHz 이상에서는 입사평판과 투과평판의 모든 임계주파수보다 높은 주파수 영역이기 때문에 18개의 모든 파워투과반사계수의 값이 0이 아닌 값을 갖게 되며 248 kHz에서 493 kHz까지의 주파수 영역에서는 투과평판에서 굽힘우세횡파(BDFW)만 진행파이기 때문에 굽힘우세횡파의 파워투과계수만 값을 가지게

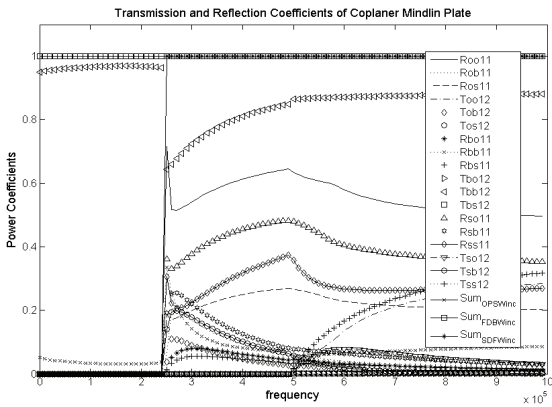


Fig. 2 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates

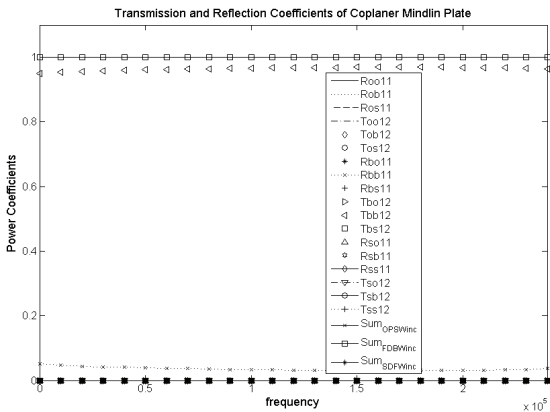


Fig. 3 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates below critical frequency(248 kHz) of incident plate

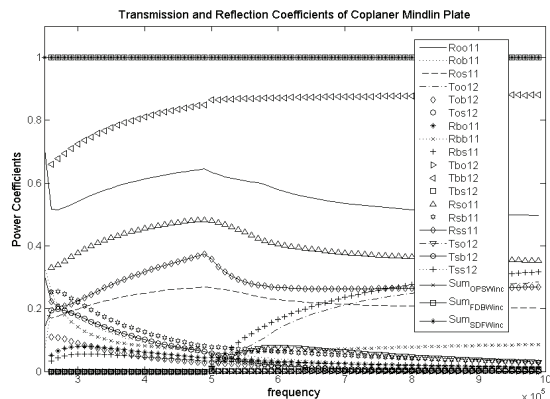


Fig. 4 Power transmission and reflection coefficients of coupled coplanar Mindlin plates above critical frequency(248 kHz) of incident plate

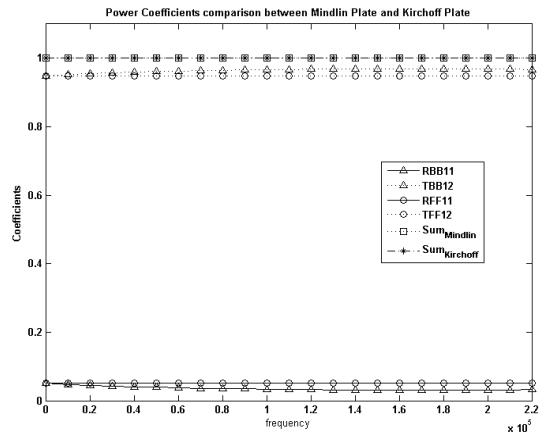


Fig. 5 Power coefficients comparison between Mindlin plate and Kirchoff plate below critical frequencies of all plates: RBB11(Mindlin plate), TBB12 (Mindlin plate), RFF11(Kirchoff plate), TFF12 (Kirchoff plate)

된다. 전반적으로 파워투과반사계수의 경향은 입사 평판이 투과평판보다 두껍기 때문에 동일 파동의 반사계수의 크기보다 투과계수의 크기가 훨씬 큼을 확인할 수 있다.

Fig. 5는 회전관성효과와 전단변형효과를 고려하지 않는 Kirchoff 판 이론에 근거한 파워투과반사계수<sup>(7)</sup>와 이 연구에서의 Mindlin 판 이론에 근거한 파워투과반사계수를 비교한 결과이다. Mindlin 판의 경우 두 평판에서의 임계주파수 아래에서는 Kirchoff 판 이론과 유사하게 오직 굽힘우세형파(BDFW)만 존재한다. Fig. 5에서 나타난 대로 각 판 이론에 근거한 투과계수와 반사계수는 거의 유사한 값과 경향을 나타내지만 1000 Hz 이상에서부터 차이가 발생하기 시작해서 100 kHz 이상에서는 거의 동일한 차이를 내는 것을 알 수 있다. 따라서, 비록 임계주파수 아래에서 유사한 값을 같더라도 정확한 에너지전달관계를 표현하기 위해서는 Mindlin 판 이론에 근거한 파워투과반사계수의 적용이 반드시 필요하다.

### 3. 결론

에너지흐름해석법은 고주파수 대역의 진동해석에 유용한 방법이다. 일반적인 보나 판과 같은 구조요소인 경우 주파수가 높아지고 단면적이나 두께가 커짐에 따라 회전관성효과와 전단변형효과가 증가한

다. 따라서 판 구조물의 에너지흐름해석을 위해서는 이런 효과를 반영할 수 있는 이론에 기반한 에너지 흐름해석이 필수적이다. 이 연구에서는 고주파수 대역의 진동에너지 예측의 신뢰성을 높이기 위해 Mindlin 판의 에너지배방정식에 기반한 파동전달 해석을 성공적으로 수행하였다.

연구의 범위는 동일 평면상에 연성된 Mindlin 판에 국한되었으며, 변위해를 통해 Mindlin 판의 면외 진동과의 파워투과반사계수를 유도하였다. 이를 통해 동일 평면상에서 서로 다른 두께를 갖고 불연속적으로 연성된 Mindlin 판 구조물의 에너지흐름해석이 가능해졌으며, 전 주파수 영역에서 보다 정확한 에너지흐름해석이 가능해졌다.

## 후 기

이 논문은 2011~2012년도 창원대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

## 참 고 문 헌

- (1) Park, Y. H., Hong, S. Y. and Kil, H. G., 2010, Prediction of Vibrational Responses of Automotive Door System Using Energy Flow Analysis in Medium-to-high Frequencies, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 20, No. 11, pp. 1097~1102.
- (2) Wohlever, J. C. and Bernhard, R. J., 1992, Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 153, No. 1, pp. 1~19.
- (3) Park, Y. H. and Hong, S. Y., 2006, Vibrational Energy Flow Analysis of Corrected Flexural Waves in Timoshenko Beam - Part I: Theory of an Energetic

Model, Shock and Vibration, Vol. 13, No. 3, pp. 137~165.

(4) Park, Y. H. and Hong, S. Y., 2006, Vibrational Energy Flow Analysis of Corrected Flexural Waves in Timoshenko Beam - Part II: Application to Coupled Timoshenko Beams, Shock and Vibration, Vol. 13, No. 3, pp. 167~196.

(5) Park, Y. H. and Hong, S. Y., 2008, Vibrational Power Flow Models for Transversely Vibrating Finite Mindlin Plate, Journal of Sound and Vibration, Vol. 317, No. 3-5, pp. 800~840.

(6) Nelson, H. M., 1978, High Frequency Flexural Vibration of Thick Rectangular Bars and Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 60, No. 1, pp. 101~118.

(7) Cho, P. E., 1993, Energy Flow Analysis of Coupled structures, PhD Thesis, Purdue University.



**Young-Ho Park** was born in Seoul, Korea, in 1975. He studied Naval Architecture and Ocean Engineering at Seoul National University for a bachelor's degree in 1999. He received a PhD in engineering of Seoul National

University in 2006. He has 5 years' experience in automotive NVH engineering by working in Hyundai Motor Company. In 2011, he moved to Changwon National University, Changwon-si, Korea, where he became an assistant professor and continued research on the vibro-acoustics of transport machines in Department of Naval Architecture and Marine Engineering.