

운동방정식 유도에 의한 액추에이터 모드 주파수 분석

A Mathematical Approach for Modal Frequency Analysis in Actuators

이 경 택*

Kyung Taek Lee

(Received April 5, 2013 ; Revised May 22, 2013 ; Accepted May 27, 2013)

Key Words : Suspension(서스펜션), Rigid Body(끝단강체), Coupled Bending-torsional Vibration(굽힘-비틀림 연성진동), Actuator(액추에이터), Focusing Mode(포커싱 모드), Tracking Mode(트래킹 모드), Tilting Mode(틸팅 모드), Modal Frequency(모드 주파수)

ABSTRACT

In this paper, the vibration for actuators having lens module, confined to lateral and torsional directions of suspensions, is described by mathematically analyzing its suspension configuration and motion. In order to prove the accuracy of this result, it is compared to a finite element analysis. Also it is shown that modal frequencies can be modified by changing design parameters in mathematical motion expressions.

Nomenclature

- s : 서스펜션 번호
- l : 서스펜션 길이
- $(\rho A)_s$: s번째 서스펜션의 밀도와 단면적의 곱
- $(EI)_s$: s번째 서스펜션의 탄성계수와 단면 2차 모멘트의 곱
- $(GI_p)_s$: s번째 서스펜션의 전단탄성계수와 단면의 극관성모멘트의 곱
- b_1, b_2 : 각각 첫 번째 서스펜션으로부터 3번째(4번째), 5번째(6번째), 서스펜션까지의 y방향 거리
- m : 끝단강체의 질량
- c, r : 첫 번째 서스펜션의 끝단과 끝단강체의 질량중심 사이의 y축, z축 방향 거리
- h : 끝단강체의 질량 중심을 통과하고,

서스펜션에 나란한 축에 대한 끝단강체의 회전 반지름(radius of gyration)

$\phi_s(x,t)$: s번째 서스펜션의 비틀림운동에 의한 비틀림각

$v_s(x,t), w_s(x,t)$: s번째 서스펜션의 y, z방향 굽힘 변형(deflection)

ω : 라디안 고유진동수(rad/s)

1. 서 론

광디스크 드라이브에서 광픽업(optical pickup)은 대물렌즈를 구동하여 디스크 위에 있는 신호 트랙에 광스팟(optical spot)을 정확하게 맺히도록 하기 위해 광픽업 액추에이터(optical pickup actuator)를 사용하고 있다. 이 액추에이터는 포커싱(focusing) 및 트래킹(tracking) 동작이 허용되고 있으며, 디스크 스큐(skew)에 대응하기 위해 틸팅(tilting) 동작

* Corresponding Author ; Member, Korea National University of Education
E-mail : ktlee@knue.ac.kr
Tel : +82-43-230-3772, Fax : +82-43-230-3775

A part of this paper was presented at the KSNVE 2013 Annual Spring Conference

‡ Recommended by Editor Don Chool Lee

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

까지 가능하도록 설계되고 있다. 이러한 동작을 위해 광픽업 액추에이터는 대물렌즈를 포함하고 있는 가동부(moving part)와 이를 지지하기 위한 서스펜션을 구비하고 있으며, 구동을 위해 가동부에 코일이 부착되고 고정부에는 자석이 설치되어 있다^(1,2). 지지 목적 외에 서스펜션의 또 다른 역할은 가동부에 부착된 코일로의 전기공급을 위한 경로이며, 이러한 목적을 위해 3축 구동 액추에이터는 보통 6개의 서스펜션을 사용하게 된다.

액추에이터에서 가동부에 부착된 코일에 전류를 흐르게 하면 고정부에 부착된 자석과의 상호작용에 의해 힘이 발생하여 가동부는 힘을 받게되고, 서스펜션의 변형을 통해 앞에서 언급한 포커싱, 트래킹 동작과 서스펜션의 길이방향과 나란한 임의의 축을 중심으로 회전하는 틸팅동작이 이루어지게 된다. 이 방향 이외 다른 방향으로의 동작은 최대한 억제하여야 하므로 설계자들은 구조해석 프로그램을 사용하여, 액추에이터를 구성하는 재료의 물성과 치수와 관련된 설계 변수를 변경해 가면서 각종 진동모드를 분석하여 불필요한 모드를 억제하고 있다. 그러나 구조해석 프로그램의 결과는 사용자의 경험에 의지한 각종 설계값에 따라 그 결과가 달라질 수 있으며, 더욱이 구조해석 프로그램으로의 결과로는 설계변경을 위한 설계 변수의 변경방향을 판단하기가 어려워 해석에 소요되는 시간도 상당하다고 할 수 있다.

이 연구는 이러한 문제점을 보완하고자, 설계 변수에 따른 진동모드 및 주파수를 수학적으로 표현하려는 노력의 일환이다. 포커싱, 트래킹 모션과 동일 방향의 고차 모드에 관한 정보를 수학적으로 구하는 과정을 보여주는 선행 연구⁽³⁾에 이어 이 연구에서는 디스크 반경방향의 틸팅 모드와 관련된 정보를 수학적 전개를 통해 구하는 것을 주요한 내용으로 한다.

이를 위해, 이 연구에서는 6개의 서스펜션이 끝단강체에 의해 연결되어 있는 액추에이터 구조물의 진동해석을 위해, 서스펜션의 굽힘-비틀림 연성진동(coupled bending-torsional vibration)을 위한 특성행렬을 유도하고 모드 주파수를 얻으려 하며, 해석 결과의 정확성을 검증하기 위해 동일 조건 하에서 수행된 FEM 해석 결과와 비교하려고 한다.

2. 수학적 전개과정

Fig. 1과 같이 3축 광픽업 액추에이터는 6개의 서스펜션을 가지고 있다. 이 서스펜션은 축을 따라 굽힘변형(bending deformation)을 할 수 있고 축을 중심으로 비틀림변형(torsional deformation)을 할 수 있다고 가정한다.

이 모델에서는 서스펜션의 단면적이 매우 작은 경우에 국한하여, 서스펜션의 전단변형에 의한 굽힘은 무시하기로 한다.

먼저 에너지 보존법칙에 의하면, 주어진 계의 운동에너지와 포텐셜에너지의 합은 항상 일정하다고 할 수 있다. 따라서

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{s=1}^7 T_s + \sum_{s=1}^7 V_s \right) = 0 \tag{1}$$

여기에서 $s=1\sim 6$ 은 장착된 서스펜션을 지칭하고, $s=7$ 은 끝단강체를 의미한다. 모든 서스펜션의 운동 및 포텐셜에너지를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_{s=1}^6 T_s = \sum_{s=1}^6 \int_0^l \left[\frac{1}{2} (\rho I_p)_s \dot{\theta}_s^2(x,t) + \frac{1}{2} (\rho A)_s \{ \dot{v}_s^2(x,t) + \dot{w}_s^2(x,t) \} \right] dx, \tag{2}$$

$$\sum_{s=1}^6 V_s = \sum_{s=1}^6 \int_0^l \left[\frac{1}{2} (GI_p)_s \theta_s^2(x,t) + \frac{1}{2} (EI)_s \{ v_s'^2(x,t) + w_s'^2(x,t) \} \right] dx. \tag{3}$$

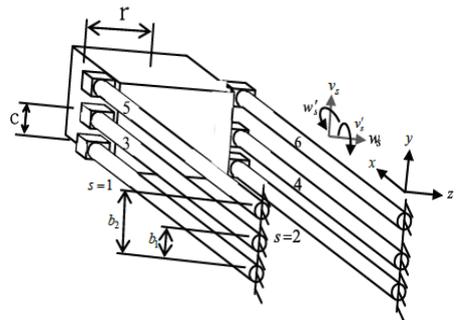


Fig. 1 Optical pickup actuator with six suspensions

끝단강체의 운동에너지식은 첫 번째 서스펜션의 자유단의 운동과 강체의 기하학적인 조건을 이용하여 표현할 수 있다.

$$T_7 = (1/2)[m\{\dot{v}_1(l,t) - r\dot{\phi}_1(l,t)\}^2 + m\{\dot{w}_1(l,t) + c\dot{\phi}_1(l,t)\}^2 + J\dot{\phi}_1^2(l,t)] \tag{4}$$

여기에서 J 는 끝단강체의 질량관성모멘트로서 x 축에 나란하며, 끝단강체의 질량중심을 통과하는 축에 대한 것으로서 다음과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$J = mh^2, \tag{5}$$

여기에서 h 는 회전반지름(the radius of gyration)이다. 따라서 식(4)는

$$T_7 = \frac{1}{2}m\dot{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{w}_1^2 + \frac{1}{2}m(c^2 + h^2 + r^2)\dot{\phi}_1^2 - mr\dot{v}_1\dot{\phi}_1 + mc\dot{w}_1\dot{\phi}_1 \tag{6}$$

여기에서 $v_1=v_1(l,t)$, $w_1=w_1(l,t)$, $\phi_1=\phi_1(l,t)$ 이다. 강체로 가정했기 때문에 끝단강체의 변형에 의한 포텐셜에너지는 무시한다($V_7=0$).

이 모델의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi_s(0,t) = v_s(0,t) = v'_s(0,t) = w_s(0,t) = w'_s(0,t) = 0, \tag{7}$$

$s = 1 \sim 6.$

그리고 서스펜션의 자유단에 연결된 끝단강체를 고려하면 다음과 같은 연결조건(joint conditions)을 얻을 수 있다.

$$\phi_s(l,t) = \phi_1(l,t), s = 1 \sim 6, \tag{8}$$

$$v'_s(l,t) = 0, s = 1 \sim 6, \tag{9}$$

$$v_2(l,t) = v_1(l,t) - 2r\phi_1(l,t), v_3(l,t) = v_1(l,t), \tag{10}$$

$$v_4(l,t) = v_2(l,t), v_5(l,t) = v_1(l,t),$$

$$v_6(l,t) = v_2(l,t),$$

$$w'_s(l,t) = 0, s = 1 \sim 6, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} w_2(l,t) &= w_1(l,t), & w_3(l,t) &= w_1(l,t) + b_1\phi_1(l,t), \\ w_4(l,t) &= w_3(l,t), & w_5(l,t) &= w_1(l,t) + b_2\phi_1(l,t), \\ w_6(l,t) &= w_5(l,t). \end{aligned} \tag{12}$$

식(2), (3)과 (6)에 조건식(7)~(12)를 대입한 후 시간 t 에 대해 미분하고, 이를 이용해서 식(1)을 전개하면 운동방정식(13)~(15) 및 $x=l$ 에서의 연속조건식(continuity condition equation) (16)~(18)을 얻게 된다(부록 (가) 참조).

$$\left(\rho I_p\right)_s \ddot{\phi}_s(x,t) - \left(GI_p\right)_s \phi_s''(x,t) = 0, \tag{13}$$

$0 \leq x \leq l, 0 \leq t, s = 1 \sim 6,$

$$\left(\rho A\right)_s \ddot{v}_s(x,t) + \left(EI\right)_s v_s^{(4)}(x,t) = 0, \tag{14}$$

$0 \leq x \leq l, 0 \leq t, s = 1 \sim 6,$

$$\left(\rho A\right)_s \ddot{w}_s(x,t) + \left(EI\right)_s w_s^{(4)}(x,t) = 0, \tag{15}$$

$0 \leq x \leq l, 0 \leq t, s = 1 \sim 6,$

$$\left[\begin{aligned} &m(c^2 + h^2 + r^2)\ddot{\phi}_1 - mr\dot{v}_1 + mc\dot{w}_1 + 2r(EI)_2 v_2''' \\ &+ 2r(EI)_4 v_4''' + 2r(EI)_6 v_6''' \\ &- b_1(EI)_3 w_3''' - b_1(EI)_4 w_4''' - b_2(EI)_5 w_5''' \\ &- b_2(EI)_6 w_6''' + \sum_{s=1}^6 (GI_p)_s \phi_s' \end{aligned} \right]_{x=l} = 0, \tag{16}$$

$$\left[m\ddot{v}_1 - mr\ddot{\phi}_1 - \sum_{s=1}^6 (EI)_s v_s''' \right]_{x=l} = 0, \tag{17}$$

$$\left[m\ddot{w}_1 + mc\ddot{\phi}_1 - \sum_{s=1}^6 (EI)_s w_s''' \right]_{x=l} = 0, \tag{18}$$

여기에서 $u_s = u_s(x,t)$, $v_s = v_s(x,t)$ 이다.

운동방정식(13)~(15)의 해를 다음과 같이 시간함수와 공간함수의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\phi_s(x,t) = \phi_s(x) \cos \omega t, s = 1 \sim 6, \tag{19}$$

$$v_s(x,t) = v_s(x) \cos \omega t, s = 1 \sim 6, \tag{20}$$

$$w_s(x,t) = w_s(x) \cos \omega t, s = 1 \sim 6. \tag{21}$$

이를 이용하게 되면 식(7)~(18)에 포함된 시간

항을 제거할 수 있게 된다. 그리고 이 식들 속에 시간항이 제거된 운동방정식이 포함되어 있는데, 이 운동방정식의 해를 삼각함수의 형태로 가정하면 해의 미정계수를 벡터로 하는 행렬식을 얻을 수 있다(부록 (나) 참조).

$$[a_{ij}]\{g_j\} = \{0\}, \quad i, j = 1 \sim 3. \tag{22}$$

행렬 $[a_{ij}]$ 의 성분은 부록 (다)에 제시되어 있으며, 이 행렬식에 포함된 모드벡터는 다음과 같다.

$$\{g_j\} = \{B_1, C_1, F_1\}^T. \tag{23}$$

식 (22)의 해가 존재하기 위해서는 다음과 같은 조건이 필요하다.

$$\det[a_{ij}] = 0. \tag{24}$$

주어진 대상을 위한 실제 물성값을 식 (24)에 대입하고 계산프로그램⁽⁴⁾을 사용하게 되면 ω (radian natural frequency)의 함수로 표현되는 특성방정식(characteristic equation)을 얻게 된다.

3. 정확성 검증

위에서 구한 특성방정식 (24)의 물리적 의미와 그 정확성을 증명하기 위해 실제 값을 사용하여 모드 주파수를 구해보고, 가동부(끝단강체) 및 서스펜션의 운동을 yz평면에서 허용하는 경계조건 아래에서 계산된 FEM결과와 비교해 본다. Table 1은 이때 사용된 물성값이다.

Table 1에서 제시된 물성값들은 6개의 서스펜션이 모두 동일하며, 끝단 강체도 서스펜션에 대칭적으로 배치된 경우의 것이다. 이 값들을 특성방정식 (24)에 대입하여 Table 2에서와 같은 ω (radian natural frequency)를 얻게 되며, 동시에 FEM결과와 비교된다. 한편 서스펜션의 중심과 가동부의 질량중심이 일치하는 경우에 대해 서스펜션의 등가강성에 관한 식을 유도하고, 이를 사용하여 모드 주파수를 구한 기존 계산방법⁽⁵⁾에 의해 얻어진 주파수 값도 제시하였다. 이들 결과와 비교하면 특성방정식 (24)에 의한 결과가 FEM이나 기존 계산법에 의한 결과와 잘 부합함을

Table 1 Mechanical properties for an six-beam structure

| Item | Property |
|--------------------------|--|
| Suspension | $l = 20\text{mm}, d_s = 0.1\text{mm}, \rho_s = 8250\text{kg/m}^3, \nu_s = 0.36, E_s = 15\text{GPa}$. |
| Suspension configuration | $r = 6.5\text{mm}, b_1 = c, b_2 = 2c$. |
| Rigid body | $c = 1.25\text{mm}, m = 0.434 \times 10^{-3} \text{kg}, J = 6.537 \times 10^{-9} \text{kg} \cdot \text{m}^3$. |

Table 2 Comparison of Eq. (24), FEM result and etc

| | Focusing | Tracking | Tilting |
|----------|----------|----------|---------|
| (24) | 38.95 | | 82.12 |
| FEM | 38.69 | 39.03 | 80.63 |
| Ref. (5) | 39.08 | | 81.14 |

Table 3 Mechanical properties for an six-beam structure

| Item | Property |
|------------|---|
| Suspension | $d_2 = d_1, d_3 = d_4 = 1.1d_1, d_5 = d_6 = 1.2d_1, E_2 = E_1, E_3 = E_4 = 1.05E_1, E_5 = E_6 = 1.1E_1$. |

알 수 있다. Fig. 2는 FEM 해석으로 부터 얻어진 모드형상이며 포커싱, 트랙킹, 틸팅 모드를 보여주는 그림이다.

동일한 방법으로, 서로 다른 서스펜션을 사용하고 있으며, 비대칭적인 배치를 포함하는 경우에도 비교해 볼 수 있다. Table 1에서 제시한 물성값에서, 서스펜션의 물성값을 다르게 하기 위해, Table 3에서와 같이 일부는 다른 물성값을 적용해 보았다.

상기 조건에 의한 비교 결과는 Table 4에 나타나 있으며, 역시 FEM 결과와 잘 부합함을 알 수 있다.

이러한 결과에 비추어볼 때, 유도된 특성방정식 (24)는 주어진 경계조건 하에서 6개 빔 구조물(six-beam structure)의 진동특성을 잘 나타낸다고 할 수 있다.

Table 4 Comparison of Eq. (24) and FEM result

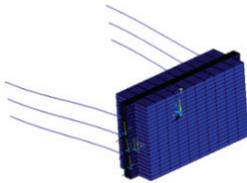
| | Focusing | Tracking | Tilting |
|------|----------|----------|---------|
| (24) | 49.27 | 49.32 | 103.91 |
| FEM | 48.69 | 48.91 | 100.56 |



(a) Focusing mode



(b) Tracking mode



(c) Tilting mode

Fig. 2 Mode shapes by FEM simulation

4. 결과의 응용

액추에이터 설계자들이 관심을 가져온 문제 중 하나는, 서스펜션과 그 배치에 의해 결정되는 지지 중심이, 가동부의 질량중심과 일치하지 않는 경우라 하더라도 모드 주파수를 구할 수 있고, 설계 변수에 따라 이를 변경할 수 있도록 하는 것이다. 그러나 이를 분석할 수 있는 이론적 근거가 미비했기 때문에, 현실적인 대안으로서 구조 해석 프로그램을 이용하고 있다. 그러나 이러한 해석의 문제점은, 그 과정의 특성상 상당한 시간이 소요되며, 프로그램을 운용할 수 있는 전문인력이 필요하다는 것이다. 그래서 이 논문의 수학적 전개 결과를 이용하여 이런 어려움을 해결할 수 있음을 보이려고 한다.

이 논문에서는 상중하 다른 물성이며 좌우 같은 물성을 갖는 6개의 서스펜션에 가동부가 부착되어 있는 액추에이터의 경우, 위에서 구한 특성방정식 (24)에

Table 5 Mechanical properties for a real actuator

| Item | Property |
|--------------------------|--|
| Suspension | $l = 11\text{mm}$, $d_1 = d_2 = 0.11\text{mm}$, $d_3 = d_4 = 0.09\text{mm}$, $d_5 = d_6 = 0.07\text{mm}$, $\rho_s = 8250\text{kg/m}^3$, $\nu_s = 0.36$, $E_s = 127\text{GPa}$. |
| Suspension configuration | $r = 6.5\text{mm}$, $b_1 = 1\text{mm}$, $b_2 = 2\text{mm}$. |
| Rigid body | $c = 1.25\text{mm}$, $m = 0.35 \times 10^{-3}\text{ kg}$, $h = 1.5 \times 10^{-3}\text{ m}^2$. |

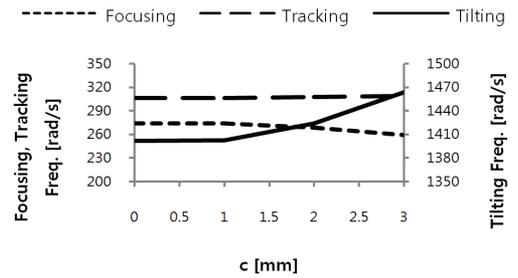


Fig. 3 Modal frequency with respect to the variation of c

포함되어 있는 액추에이터의 몇 가지 설계 변수를 변경하면서 포커싱, 트래킹 모드 및 틸팅 모드의 주파수가 어떻게 달라지는지를 관찰해 본다. 이는 이 연구에서 제시하는, 수학적 전개 결과가 실제 설계에 적용되기 위한 한 예가 될 것이다.

우선 대상계의 물성값 및 검토 대상으로 삼은 설계 변수와 변경 범위는 실제 액추에이터에서 많이 사용하는 값으로서 다음과 같이 정보보았다.

위에서 제시한 설계값들과 함께 y 방향으로 끝단 강체의 중심위치를 나타내는 설계 변수 c 와 서스펜션의 y 방향 간격 b_1 , b_2 를 변경하면서 특성방정식 (24)로부터 모드 주파수를 얻는다.

Figs. 3~6은 각각 설계 변수 c , b_1 , b_2 , r 의 변화에 따라 모드 주파수의 변화 추이를 관찰한 것이다. 그 결과, 설계 변수 c 가 포커싱, 틸팅 모드 주파수에 영향을 주는 것을 알 수 있다. 그리고 설계 변수 r 은 포커싱, 트래킹 모드 주파수에 끼치는 영향이 적으나, 틸팅 모드 주파수의 변화에는 크게 기여하는 것으로 나타났다. 한편 그 외 다른 설계 변수는 모드

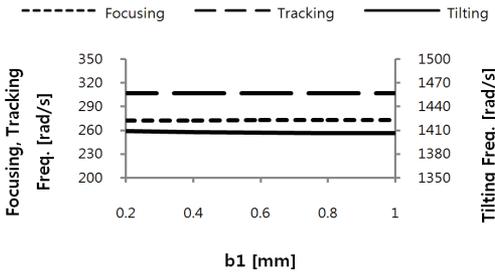


Fig. 4 Modal frequency with respect to the variation of b_1

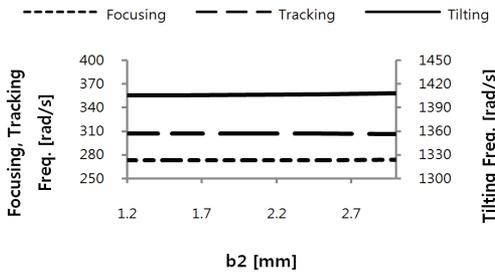


Fig. 5 Modal frequency with respect to the variation of b_2

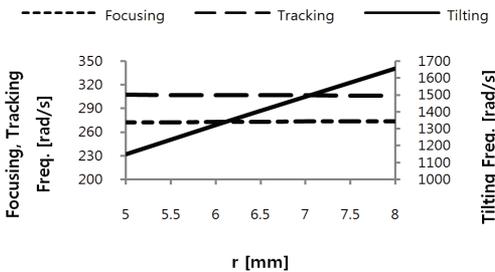


Fig. 6 Modal frequency with respect to the variation of r

주파수에 별로 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서 설계자는 설계 변수 c 를 포커싱, 틸팅 모드 주파수 변경을 위해 사용할 수 있고, 설계 변수 r 을 틸팅 모드 주파수 변경을 위해 사용할 수 있다. 설계 변수 b_1 , b_2 는 모드 주파수의 변경과 관련이 적으므로, 적어도 모드 주파수와 관련해서는 자유롭게 변경할 수 있다는 것을 알 수 있게 된다. 그러나 위의 결과는 주어진 설계 변수 및 그 변경 조건에 따라서 나온 결과이므로, 설계 조건이 달라지면 그 결과도 달라질 수 있음을 주지해야 한다.

최근, 픽업 액추에이터뿐만 아니라, 휴대폰카메라

에 사용되고 있는 초소형 렌즈 모듈의 손떨림 보정 장치(optical image stabilizer)^(6,7)에 유사한 구조를 적용하기 위한 연구가 진행되고 있다. 보통 4개의 서스펜션을 가진 진동 구조물이 연구되고 있으므로, 6개의 서스펜션에 대해 살펴본 이 연구의 결과를 일부 수정하여 적용할 수 있으며, 손떨림 보정 장치의 제어 시에 필요한 모드 주파수와 모드 형상(mode shape) 정보를 얻을 수 있을 것으로 기대한다.

결론적으로 이 연구에서 얻어진 특성방정식은 사용자의 필요에 따라 설계 변수를 선택하여 사용자가 원하는 결과를 얻는 데 기여할 것이라고 기대한다.

5. 결 론

이 논문은 6 와이어 서스펜션을 갖는 광픽업 액추에이터를 수학적으로 모델링하여 진동 모드와 관련된 특성방정식을 제시하고 있다. 이 결과를 이용하여 포커싱, 트래킹, 틸팅 모드의 주파수를 계산하고, 설계변수와 연관지어 그 변화추이를 관찰할 수 있고, 또한 이 모드 주파수를 설계자의 의도대로 변경할 수 있음을 보이고 있다. 또한 손떨림 보정 장치 등 유사한 진동구조물의 설계 혹은 제어 시에 이 연구의 결과가 적용될 수 있음을 밝힌다.

후 기

이 논문은 한국교원대학교 2011년도 신입교수 학술연구비 지원을 받아 수행하였음.

References

- (1) Zhang, B., Ma, J., Pan, L., Cheng, X. and Tang, Y., 2008, High Performance Three-axis Actuator in Super-multi Optical Pickup Actuator with Low Crosstalk Force, IEEE Transactions on Consumer Electronics, Vol. 54, No. 4, pp. 1743~1749.
- (2) Kim, S. J., Heor, T. Y., Kim, Y. K., Ahn, Y. M., Chung, C. S., Park, S. H., 2005, High Response Twin-objective Actuator with Radial Tilt Function for Blu-ray Disc Recorder, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 44, pp. 3393~3396.
- (3) Lee, K. T., 2012, A Mathematical Approach for

Vibration Analysis of a Pickup Actuator, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 22, No. 11, pp. 1128~1136.

(4) Mathematica 6.5, Wolfram Research Inc., 2007.

(5) Jeong, H. S. and Yoon, Y. H., 2001, Improvement of Magnetic Circuit Characteristics for Moving Magnet Type Actuator in High Density Optical Disc, Proceedings of the KSNVE Annual Autumn Conference, pp. 780~785.

(6) Patent Number 1006105610000, Lens Module and Image Photographing Device Having Function for Preventing Hand Vibration, Korean Intellectual Property Office(<http://www.kipris.or.kr>).

(7) Patent Number 1011848120000, Suspension Wire for Compensation Hand Vibration and Image Photographing Device Having the Same, Korean Intellectual Property Office(<http://www.kipris.or.kr>).

부 록

(가) 운동방정식과 연속조건식의 유도

식 (2)와 식 (6)의 합과 식 (3)에 조건식 (7)~(12)를 대입하고 시간 t 에 대해 미분하면 다음과 같은 두 개의 식이 구해진다. 미분과정에서 식 (3)은 부분적분이 적용되었다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^7 T_s = \sum_{s=1}^6 \int_0^l \left[(\rho I_p)_s \dot{\phi}_s \ddot{\phi}_s + (\rho A)_s (\dot{v}_s \ddot{v}_s + \dot{w}_s \ddot{w}_s) + [m\dot{v}_1 \ddot{v}_1 + m\dot{w}_1 \ddot{w}_1 + m(c^2 + h^2 + r^2) \dot{\phi}_1 \ddot{\phi}_1 - mr\dot{v}_1 \dot{\phi}_1 - mr\dot{v}_1 \ddot{\phi}_1 + mc\dot{w}_1 \dot{\phi}_1 + mc\dot{w}_1 \ddot{\phi}_1]_{x=l} \right] dx_1 \quad (A1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^6 V_s = \sum_{s=1}^6 \int_0^l \left\{ -(GI_p)_s \dot{\phi}_s \ddot{\phi}_s + (EI)_s v_s^{(4)} \dot{v}_s + (EI)_s w_s^{(4)} \dot{w}_s \right\} dx_1 + \left[\sum_{s=1}^6 (GI_p)_s \dot{\phi}'_s \dot{\phi}_1 - \sum_{s=1}^6 (EI)_s v_s'' \dot{v}_1 + 2r(EI)_2 v_2'' \dot{\phi}_1 + 2r(EI)_4 v_4'' \dot{\phi}_1 + 2r(EI)_6 v_6'' \dot{\phi}_1 - \sum_{s=1}^6 (EI)_s w_s'' \dot{w}_1 - b_1(EI)_3 w_3'' \dot{\phi}_1 - b_1(EI)_4 w_4'' \dot{\phi}_1 - b_2(EI)_5 w_5'' \dot{\phi}_1 - b_2(EI)_6 w_6'' \dot{\phi}_1 \right]_{x=l} \quad (A2)$$

여기에서 $v_s^{(4)} = \partial^4 v_s(x, t) / \partial x^4$, $w_s^{(4)} = \partial^4 w_s(x, t) / \partial x^4$ 이다.

위 두 식을 식 (1)에 대입하여 정리하면 운동방정식 (13)~(15), 연속조건식 (16)~(18)을 얻을 수 있다.

(나) 변수분리 및 특성행렬식 도출

식 (19)~(21)을 이용하면 식 (7)~(18)에 포함되어 있는 시간 항을 제거할 수 있어서 다음과 같이 정리된다.

$$\phi_s''(x) + \beta_s^2 \phi_s(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A3)$$

$$v_s^{(4)}(x) - \lambda_s^4 v_s(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A4)$$

$$w_s^{(4)}(x) - \lambda_s^4 w_s(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A5)$$

$$\phi_s(0) = v_s(0) = v_s'(0) = w_s(0) = w_s'(0) = 0, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A6)$$

$$\phi_s(l) = \phi_1(l), \quad s = 1 \sim 6, \quad (A7)$$

$$v_s'(l) = 0, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A8)$$

$$v_2(l) = v_1(l) - 2r\phi_1(l), \quad v_3(l) = v_1(l), \quad v_4(l) = v_2(l), \quad v_5(l) = v_1(l), \quad v_6(l) = v_2(l), \quad (A9)$$

$$w_s'(l) = 0, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A10)$$

$$w_2(l) = w_1(l), \quad w_3(l) = w_1(l) + b_1\phi_1(l), \quad w_4(l) = w_3(l), \quad w_5(l) = w_1(l) + b_2\phi_1(l), \quad (A11)$$

$$w_6(l) = w_5(l),$$

$$m(c^2 + h^2 + r^2)\omega^2 \phi_1(l) - mr\omega^2 v_1(l) + mc\omega^2 w_1(l) - 2r(EI)_2 v_2''(l) - 2r(EI)_4 v_4''(l) - 2r(EI)_6 v_6''(l) + b_1(EI)_3 w_3''(l) + b_1(EI)_4 w_4''(l) + b_2(EI)_5 w_5''(l) + b_2(EI)_6 w_6''(l) - \sum_{s=1}^6 (GI_p)_s \phi_s'(l) = 0 \quad (A12)$$

$$m\omega^2 v_1(l) - mr\omega^2 \phi_1(l) + \sum_{s=1}^6 (EI)_s v_s''(l) = 0, \quad (A13)$$

$$m\omega^2 w_1(l) + mc\omega^2 \phi_1(l) + \sum_{s=1}^6 (EI)_s w_s''(l) = 0, \quad (A14)$$

여기에서 $\beta_s^2 = \omega^2 (\rho/G)_s$, $\lambda_s^4 = \omega^2 (\rho A/EI)_s$ 이다.

운동방정식 (A3)~(A5)를 위한 해는 경계조건 (A6)을 만족시켜야 하므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\phi_s(x) = B_s \sin \beta_s x, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A15)$$

$$v_s(x) = C_s (\cos \lambda_s x - \cosh \lambda_s x) + D_s (\sin \lambda_s x - \sinh \lambda_s x), \quad s = 1 \sim 6, \quad (A16)$$

$$w_s(x) = F_s (\cos \lambda_s x - \cosh \lambda_s x) + H_s (\sin \lambda_s x - \sinh \lambda_s x), \quad s = 1 \sim 6, \quad (A17)$$

여기에서 B_s, C_s, D_s, F_s 와 H_s 는 모드 계수(modal coefficients)이다.

연결조건 (A7), (A8), (A10)으로 부터 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$B_s = \frac{\sin \beta_s l}{\sin \beta_s l} B_1, \quad s = 2 \sim 6, \quad (A18)$$

$$D_s = \Lambda_s C_s, \quad s = 1 \sim 6, \quad (A19)$$

$$H_s = \Lambda_s F_s, \quad s = 1 \sim 6. \quad (A20)$$

위 식의 계수는 $\Lambda_s = \frac{\sin \lambda_s l + \sinh \lambda_s l}{\cos \lambda_s l - \cosh \lambda_s l}$ 이다. 한편 연결조건 (A9)과 (A11)에 의해 다음과 같이 계수 사이의 관계가 정해진다.

$$C_2 = -2r\Gamma_{1/2} B_1 + \Delta_{1/2} C_1, \quad C_3 = \Delta_{1/3} C_1, \quad (A21)$$

$$C_4 = -2r\Gamma_{1/4} B_1 + \Delta_{1/4} C_1, \quad C_5 = \Delta_{1/5} C_1,$$

$$C_6 = -2r\Gamma_{1/6} B_1 + \Delta_{1/6} C_1,$$

$$F_2 = \Delta_{1/2} F_1, \quad F_3 = b_1 \Gamma_{1/3} B_1 + \Delta_{1/3} F_1, \quad (A22)$$

$$F_4 = b_1 \Gamma_{1/4} B_1 + \Delta_{1/4} F_1,$$

$$F_5 = b_2 \Gamma_{1/5} B_1 + \Delta_{1/5} F_1,$$

$$F_6 = b_2 \Gamma_{1/6} B_1 + \Delta_{1/6} F_1.$$

위 식의 계수는 다음과 같다.

$$\Gamma_{1/s} = \frac{\sin \beta_1 l}{(\cos \lambda_s l - \cosh \lambda_s l) + \Lambda_s (\sin \lambda_s l - \sinh \lambda_s l)},$$

$$\Delta_{1/s} = \frac{(\cos \lambda_1 l - \cosh \lambda_1 l) + \Lambda_1 (\sin \lambda_1 l - \sinh \lambda_1 l)}{(\cos \lambda_s l - \cosh \lambda_s l) + \Lambda_s (\sin \lambda_s l - \sinh \lambda_s l)}.$$

(A18)~(A22)의 관계를 고려하면서 해 (A15)~(A17)을 연속조건식 (A12)~(A14)에 대입하면, 다음과 행렬식을 얻을 수 있다.

$$[a_{ij}] \{g_j\} = \{0\}, \quad i, j = 1 \sim 3. \quad (A23)$$

(다) 행렬 $[a_{ij}]$ 의 성분

$$a_{11} = m(c^2 + h^2 + r^2)\omega^2 \sin \beta_1 l - \sin \beta_1 l \sum_{s=1}^6 (GI)_s \beta_s \cot \beta_s l + 4r^2 \Gamma_{1/2} (EI)_2 \lambda_2^3 \{(S-SH)_2 - \Lambda_2 (C+CH)_2\} + 4r^2 \Gamma_{1/4} (EI)_4 \lambda_4^3 \{(S-SH)_4 - \Lambda_4 (C+CH)_4\} + 4r^2 \Gamma_{1/6} (EI)_6 \lambda_6^3 \{(S-SH)_6 - \Lambda_6 (C+CH)_6\} + b_1^2 \sum_{s=3}^4 \Gamma_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\} + b_2^2 \sum_{s=5}^6 \Gamma_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\}$$

$$a_{12} = mr\omega^2 \{(C-CH)_1 + \Lambda_1 (S-SH)_1\} + 2r\Delta_{1/2} (EI)_2 \lambda_2^3 \{(S-SH)_2 - \Lambda_2 (C+CH)_2\} + 2r\Delta_{1/4} (EI)_4 \lambda_4^3 \{(S-SH)_4 - \Lambda_4 (C+CH)_4\} + 2r\Delta_{1/6} (EI)_6 \lambda_6^3 \{(S-SH)_6 - \Lambda_6 (C+CH)_6\}$$

$$a_{13} = mc\omega^2 \{(C-CH)_1 + \Lambda_1 (S-SH)_1\} + b_1 \sum_{s=3}^4 \Delta_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\} + b_2 \sum_{s=5}^6 \Delta_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\}$$

$$a_{21} = mr\omega^2 \sin \beta_1 l + 2r\Gamma_{1/2} (EI)_2 \lambda_2^3 \{(S-SH)_2 - \Lambda_2 (C+CH)_2\} + 2r\Gamma_{1/4} (EI)_4 \lambda_4^3 \{(S-SH)_4 - \Lambda_4 (C+CH)_4\} + 2r\Gamma_{1/6} (EI)_6 \lambda_6^3 \{(S-SH)_6 - \Lambda_6 (C+CH)_6\}$$

$$a_{22} = m\omega^2 \{(C-CH)_1 + \Lambda_1 (S-SH)_1\} + \sum_{s=1}^6 \Delta_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\},$$

$$a_{23} = 0,$$

$$a_{31} = mc\omega^2 \sin \beta_1 l + b_1 \sum_{s=3}^4 \Gamma_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\} + b_2 \sum_{s=5}^6 \Gamma_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S-SH)_s - \Lambda_s (C+CH)_s\}$$

$$a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = m\omega^2 \{(C - CH)_1 + \Lambda_1(S - SH)_1\} + \sum_{s=1}^6 \Delta_{1/s} (EI)_s \lambda_s^3 \{(S - SH)_s - \Lambda_s(C + CH)_s\},$$

여기에서 $(C \pm CH)_s = \cos \lambda_s l \pm \cosh \lambda_s l$, $(S \pm SH)_s = \sin \lambda_s l \pm \sinh \lambda_s l$ 이다.



Kyung Taek Lee received a PhD degree in Mechanical Engineering from Yonsei University, Seoul, Korea in 2003. He had worked in LG Electronics from 1989 to 2011. He is a professor at Korea National University of Education.

His interests is in the area of microactuator design for information storages and mobile devices.