韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 27집 제 2호, 2013. 5. 121-134

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 27, No. 2, May. 2013. 121-134

모바일 선형대수학 스마트폰 콘텐츠 개발과 활용

김 경 원 (성균관대학교)
이 상 구 (성균관대학교)†

대학 수학교육에서 선형대수학은 가장 중요한 과목 중 하나이다. 21세기 향상된 정보 기술이 선형대수학 수업에 적용된다면, 학생들의 선형대수학 내용에 대한 이해는 한층 더 향상될 것이다. 우리는 학생들의 관심을 높이고 보다 효율적으로 학습 목표에 도달하는데 기여하고자 웹상의 무료 수학 프로그램인 'Sage'(http://sagemath.org)를 활용한 교수학습 환경을 구축하고 그 콘텐츠를 개발하였다. 특히, 2009년 저자는 PC 환경 외에 휴대폰의 인터넷 기능을 통하여 Sage 명령어를 사용할 수 있는 단순모듈 콘텐츠를 개발하였다. 본 논문에서는 스마트폰을 이용하여 대부분의 Sage 기능을 활용할 수 있도록 개발한 모바일 Sage를 소개하고, 학생들의 자기주도적인 선형대수학 학습을 위해 개발한 모바일 선형대수학 스마트폰 콘텐츠(강의록, 동영상강의, 문제와 풀이, 공학적 도구)를 소개한다.

I. 연구의 필요성 및 목적

21세기의 초입부터 항상 휴대할 수 있는 모바일 기기를 이용하여 무선으로 인터넷에 접속하여 무엇이든지 할 수 있는 가능성이 우리의 수학 교육현장에 열렸다. 즉 우리는 <그림 1>과 같은 각 대학의 모바일 응용 프로그램(Application)을 이용하여 수업을 듣고, 문제를 제공받고, 질문하고, 해결하고, 과제를 제출하고, 성적까지 확인할 수 있는 교육환경에서 수업을 진행하고 있다.

<그림 1> 각 대학 모바일 응용 프로그램

지난 수십 년 간 진행되어 온 '정보혁명'은 전문가들이 예측한 것보다 훨씬 빠른 속도로 진행되어 왔고, 급속한 IT 기술발전에 힘입어 우리사회의 전반을 근본적으로 변화시켜 왔다. 우리나라의 스마트폰 도입은 미국과 유럽(2007)에 비해 2년이 늦었지만[1] 그 보급률은 빠른 속도로 늘어나고 있다. 방송통신위원회는 2012년 8월 우리나라의 스마트폰 가입자가 3,000만 명이 넘었다고 발표하였다. 우리나라에 2009년 11월 처음으로 스마트폰이 보급된 이후 3년이 채 안 되는 사이에 5천만 인구의 60%가 스마트폰

* 접수일(2013년 1월 29일), 심사(수정)일(1차: 2013년 2월 21일, 2차: 3월 13일), 게재확정일자(2013년 3월 20일)
* ZDM분류 : D30, H60, N80, U60
* MSC2000분류 : 15A04, 97B40, 97U50, 97U70
* 주제어 : 모바일수학, Sage-Math, 모바일 Sage, 선형대수학, 컴퓨터대수시스템, 스마트폰
* 이 논문은 성균관대학교의 2012학년도 63학술연구비에 의하여 연구되었음
† 교신저자 : sglee@skku.edu
1) http://en.wikipedia.org/wiki/Smartphone

을 쓰게 된 것이다. 그리고 2014년도에는 전 국민의 90%이상이 스마트폰을 사용할 것으로 예측되고 있다.[2] 다시 말하면, 수년 안에 우리나라 학생은 거의 모두 스마트폰을 사용한다는 것이다. 스마트폰의 확산은 교육환경을 포함한 우리의 일상생활을 변화시키고 있다. 지금까지 휴대폰은 단순한 통화 수단이었지만, 스마트폰은 종합문화 서비스를 위한 도구로 자리 잡고 있다. 대표적인 예로 사람들은 SNS[3]를 통해 사회적 관계를 형성하고, 각종 응용 프로그램을 이용하여 여가를 즐기거나 학습을 할 수 있게 되었다(최윤철 · 임순범, 2007).

최근의 이러한 스마트폰의 대중화 속에서 스마트폰과 같은 첨단 모바일 기기를 이용한 교육, 즉 모바일 학습(Mobile Learning)이 교육계에 관심을 끌고 있다. 교사와 학생, 종이로 만들어진 교과서와 참고서, 칠판과 책걸상 등으로 구성되어 있는 전형적인 학습 환경은, 모바일을 이용한 학습 환경에서 언제라도 손 안의 화면에 펼쳐지는 디지털교과서와 여러 교사의 역동적인 동영상 설명 및 제한 없는 관련 링크, 또 이동 중에도 모든 일상 공간이 되는 새로운 학습 환경으로 변한다. 더욱이 최근의 광대역 무선 인터넷 서비스는 언제 어디서나 인터넷 접속을 가능하게 함으로써 모바일 학습을 이용한 다양한 교수학습의 잠재성을 더욱 높여주고 있다(임정훈, 2008). 많은 교육공학 전문가들은 언제 어디서나 인터넷을 활용할 수 있으며, 사용자 중심의 편리한 학습 기능을 제공하는 모바일 기기를 이용한 모바일 학습은 기존의 전자 학습(e-Learning)보다도 그 활용정도가 더 클 것으로 전망하고 있다(우홍욱 · 서유진, 2010). 그리고 모바일 학습의 학교 현장 적용 가능성과 교육적 효과에 관한 연구들에 따르면, 전반적으로 모바일 기기라는 새로운 매체 활용으로 인한 학습자들의 학습에 대한 동기와 집중력 향상, 학습태도의 변화와 같은 긍정적인 효과들이 보고되었다(임정훈, 2008). 특히 수학교육에서도 Franklin & Peng(2008)의 연구를 살펴보면 모바일 기기를 이용한 교육에 대한 학습자의 기대가 높아졌음을 알 수 있다.

전 세계적으로 일어나는 이와 같은 교육에 대한 인식 및 교육환경의 변화에 따라 정부 및 여러 연구소의 주도하에 2011년 한 해 동안 우리나라에서만 모바일 학습과 관련된 연구 발표회가 10회 이상 개최되었고, 근래에는 다양한 분야에서 모바일 교육환경을 이용한 모바일 학습 관련 연구결과가 소개되고 있다.[4] 이러한 모바일 학습은 최근 이슈가 되고 있는 자기주도성과 창의성이 중시되는 수학교육을 위한 하나의 학습방법으로 적합하다고 판단된다. 모바일 학습은 다음과 같은 교육적 장점을 갖는다. 첫째, 학습자의 교육적 요구에 따라 언제 어디서나 학습이 이루어질 수 있다. 둘째, 모바일 학습은 학습자의 자기 주도적 학습이 가능하게 한다. 셋째, 집단지성이 중요시되는 현대 사회에서 학습자가 자기 주도적으로 학습을 진행하는 과정 속에 학습 공동체(Learning Community)를 구성할 수 있고 그 안에서 학습 구성원들과 SNS나 SMS[5]를 이용하여 실시간으로 학습 수행에 대한 피드백을 받을 수 있다. 넷째, 모바일 학습은 학습자 개인의 모바일 기기를 이용하여 교육과 학습이 이루어지기 때문에, 학습자 자신의 학습적 특성에 맞게 개별화된 학습이 이루어 질 수 있다(우홍욱 · 서유진, 2010; 조세경, 2009; 황재훈 · 김동현, 2005; Lu, 2008; Traxler, 2007).

현재 국내 스마트폰 응용 프로그램 시장에서 모바일 학습을 위한 우리말로 제작된 교육용 스마트폰 응용 프로그램은 영한사전, 영어회화연습 등의 어학관련 프로그램을 중심으로 그 수가 증가되고 있다(우홍욱 · 서유진, 2010). 수학 관련 스마트폰 응용 프로그램은 사칙연산, 공학용 계산기, 수학 공식집과 같은 단순 계산 또는 암기를 돕는 응용 프로그램들이 대부분을 차지한다. 자기 주도적이고 창의적인 수학교육을 위한 교육 모델과 콘텐츠는 아직 많이 부족하다. 수학교육도 기존의 강의실에서만 진행되던 학습에서 더 나아가 모바일 기기를 활용하여 통합적이고 능동적으로 학습할 수 있는 여건의 제공이 필요하다. 학생들은 언제 어디서나 모바일을 통해 녹화된 강의를 다시 듣고, 질문하고, 답하며, 관련 학습 자료와 문제풀이를 열람할 수 있다. 또한 배운 지식을 실시간으

---

2) http://www.kmobile.co.kr/k_mnews/news/news_view.asp?tableid=IT&idx=408011

3) Social Networking Service

4) 한국이러닝산업협회(http://www.kelia.org), SMART on ICT 2011(http://smart-on-ict.net/main/main.php)

5) Short Message Service

로 활용하고 공유할 수 있다.

본 논문에서는 대학수학교육 중 선형대수학 교육 현장에 효과적인 모바일 학습이 가능하도록 개발된 강좌 모델과 학습에 직접 활용될 수 있는 콘텐츠의 내용을 소개한다. 이번 연구를 통하여 개발된 스마트폰을 이용한 선형대수학 콘텐츠는 학습자 스스로 자기 주도적인 학습을 할 수 있는 기회를 제공하고, 콘텐츠로 주어진 문제해결과정 속에 배운 내용을 다시 한 번 반복학습을 할 수 있는 기회를 마련해 줄 것으로 기대된다. 또한 최근 세계적으로 각광을 받고 있는 무료로 공개된 CAS 도구인 Sage를 이용한 공학적 도구의 활용은 단순한 이론적인 학습에 더하여, 실생활에 주어진 계산이 복잡한 문제들까지도 언제 어디서나 해결할 수 있는 능력을 길러줄 것으로 여겨진다.

Ⅱ. 모바일 수학 학습 환경의 설계

본 연구에서는 강의록, 참고자료, 강의내용, 동영상강의, Q&A, 온라인 도구의 이용, 문제풀이 과정의 공유, 풀이의 제공, 실습, SNS를 이용한 공유가 모두 가능한, 실제 수업에서 활용 가능 모델을 제시한다. 그리고 이 장에서는 본 연구진이 모바일 수학교육환경을 설계할 때 중점을 두었던 몇 가지 사항을 소개한다.

1. 강의 접속

교육과학기술부의 'e-캠퍼스 비전 2007'이 시작된 이후 대학교육현장은 크게 바뀌었다. 현재 전자교탁이 설치된 강의실에서는 스크린 상의 모든 교육 내용과 목소리를 하나의 파일로 녹화하는 것이 누구의 도움도 없이 가능하다(Ham & Lee, 2005). 이미 많은 대학의 경우 대부분의 강의실에 전자교탁이 설치되어 있다. 즉, 교수자가 진행하는 수업은 실시간으로 녹화되고 학습자는 그 내용을 모바일 응용 프로그램을 이용하여 언제 어디서나 다시 듣고, 복습할 수 있다. 또한 첨단의 전자교탁이 아니더라도 PC에 마이크가 연결되어 있고 강의 자료만 있다면, 화면 녹화 프로그램[6]을 이용하여 모든 교수자가 쉽게 자신의 강의를 녹화할 수도 있다. 녹화된 수학강의는 '곰인코더'나 '팟인코더' 등의 무료 영상 편집기를 이용하여 학습자에게 필요한 부분만을 편집하여 개인의 홈페이지나 유튜브(You-tube)등에 업로드 할 수도 있다. 이러한 새로운 교육환경은 스마트폰과 타블렛 PC와 같은 모바일기기를 이용하여 학습자가 언제 어디서나 필요한 강의를 다시 보고 들을 수 있는 모바일 교육환경을 제공한다.

2. 학습자료 및 문제풀이 열람

경험이 많은 수학교수와 교사는 이미 다양한 강의자료, 학습자료, 참고자료, 시험 및 연습문제, 그 풀이까지 다양한 형식(HWP, DOC, PPT, PDF)의 전자문서를 이용하여 직접 자신의 수업에 활용한다. 이러한 전자문서들은 쉽게 웹(Web) 콘텐츠로 변환되어, 언제 어디서나 펼쳐 볼 수 있는 모바일 수학교육 환경에 효과적으로 활용이 될 수 있다.

---

6) "http://www.ancamera.co.kr"를 통하여 무료 화면녹화 프로그램인 안캠코더(AnCamCoder v1.4)를 내려 받을 수 있다.

3. 도구를 이용한 학습내용의 실습

지난 20년간 수학 교수학습 활동에서 컴퓨터를 활용한 공학적 도구의 필요성은 꾸준히 증대되어 왔다. 특히 컴퓨터의 보급이 보편화되면서 수학의 교수-학습에 이를 활용하려는 사회적인 요구와 필요성 때문에 학교수학에 컴퓨터를 도입하자는 구체적인 논의가 이루어지고 있다(김경원 외, 2011). 컴퓨터를 사용한 수학교육을 통하여 학생들이 수학에 대해 새로운 측면에서 흥미와 관심을 갖도록 도움을 줄 수 있고, 문제 해결과정의 체계적인 분석, 해답의 타당성 분석, 오류 분석 등의 과정을 통하여 수학적 사고력을 보다 강화시킬 수 있다(권오남 · 박경미, 1997).

특히 요즘의 학생들은 학습활동에 도구를 활용하는 것을 선호하며, 인터넷을 통한 토론을 좋아한다. 이러한 변화는 한국 학생들이 인터넷을 자신의 수학학습에도 활용할 준비가 되어 있음을 의미한다(고래영 외, 2009). 인터넷만 연결된다면 사용 환경에 대한 제약이 없는 Sage는 이 역할을 하는데 적합한 도구이며, 학습자의 학습역량을 높이며, 어려운 수학적 개념을 이해하는데 도움을 줄 뿐만이 아니라, 나아가서 수학적 문제해결능력을 지닌 인재를 배출하는데 도움이 될 것이다.

4. SNS를 이용한 학습내용의 제출 및 공유

2009년, 방송통신위원회에 의해 이루어진 '우리나라 인터넷 이용자의 소셜 네트워크 서비스(SNS) 이용실태조사'를 통해 우리나라의 SNS 사용실태를 살펴보면 대학(원)생의 76.8%가 SNS 이용자이고 초·중학생과 고등학생의 이용률은 각각 71.2%와 67.4%로 나타나, 학생들의 다수가 SNS를 사용하는 것으로 조사되었다.[7)]

현대의 학생들은 학교에서 제공 되는 기존의 정적인 학습정보와는 다른 좀 더 전문적인 것을 기대하고, 또한 교수나 학교의 SNS에 제공되는 정보들에 의해 많은 학습동기를 얻는다(Mazer 외, 2007). 관련하여 SNS는 학생들이 온라인 환경에서 학습을 하는데 더 개인화된 경험이 가능하게 하고 위키, 블로그, 토론 게시판 및 기타 웹 2.0[8)] 콘텐츠를 통해 전통적인 학습 환경에서 배웠던 것들을 더 보완할 수 있도록 도와준다(Griffith & Liyanage, 2008). 그리고 트위터(Twitter)나 페이스북(Facebook)과 같은 SNS를 이용하여 질문을 했을 경우, 다른 학생이나 교수는 그 질문에 대하여 충분히 심사숙고한 답변을 줄 수 있다. 따라서 시간과 장소에 대한 제한이 없어 좀 더 정확한 도움을 받을 수 있다.

Ⅲ. 새로운 모바일 CAS[9)] 도구의 개발

1. 모바일 Sage

Sage는 2005년에 처음 발표된 서버용 프로그램[10)]으로 다양한 분야의 수학적 문제해결을 위한 소프트웨어이다. 이것은 수학분야의 연구뿐만 아니라, 공학 및 다른 과학 분야에 널리 사용되는 소프트웨어로서, 인터넷에서

---

7) 방송통신위원회, 인터넷 이용자의 SNS 이용실태조사. 2009.

8) 단순한 웹사이트의 집합체를 웹 1.0이라 하고, 웹 2.0은 웹 응용 프로그램을 제공하는 하나의 완전한 플랫폼(Platform)으로의 발전한 상태를 지칭한다. 이는 개방과 참여, 공유로 대표되는 인터넷 환경을 말한다.

9) Computer Algebra System

10) 주 개발자는 University of Washington 수학과의 William Stein 교수이다.

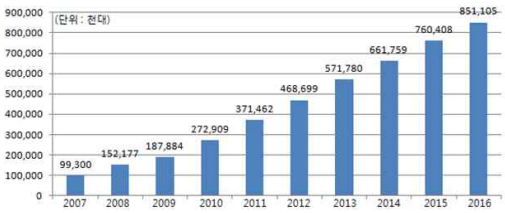
활용되는 네트워크를 기반으로 하는 무료 소프트웨어이다. Sage는 클라이언트(Client)에서 명령을 내리고, 그 명령을 서버(Server)에서 처리하는 구조로 되어있다. 따라서 Sage의 연산기능을 임의의 다른 웹페이지에서도 사용할 수 있으며, 이를 활용하면, Sage는 웹브라우저를 넘어서서 더 다양한 환경, 특히 인터넷을 사용할 수 있는 모바일 환경의 다양한 장비에서 사용가능하도록 구현할 수 있다. 실제로 고래영 등(2009)은 인터넷 접속이 가능한 일반 휴대폰[11]에 Sage를 성공적으로 적용시킬 수 있었다. 즉, 스마트폰만으로 다양한 선형대수학 연산을 제한 없이 사용 가능한 것이다. 그 중 한 예를 스마트폰에 아래 주소[12]를 입력하거나 QR-코드를 스캔하여 확인하고, 관련된 모든 문제를 크기와 숫자만 바꾸어 다룰 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

이 장에서는 위와 같이 우리에게 주어진 환경을 이용한 새로운 모바일 콘텐츠의 개발에 대하여 논하고, 스마트폰을 통한 실제 수업에서 활용 가능한 모델을 제시하려 한다. 스마트폰과 같은 모바일 기기를 이용하여 이동 중 또 토론 중에 PC가 없어도 필요한 수학적인 연산을 수행하는 것이 가능하다면 그 교육적 효과를 크게 기대할 수 있다.

2. 스마트폰에서 구현한 모바일 Sage

2007년부터 전 세계적으로 스마트폰은 <그림 2>와 같이 빠른 속도로 보급되고 있다. 스마트폰은 기존의 휴대폰을 대체하면서 여러 모바일 기기 중 가장 보급률이 높은 모바일 기기로 자리매김을 하게 되었다.



<그림 2> 전 세계 스마트폰 출하량 추이[13]

스마트폰에는 여러 종류의 운영체제가 존재한다. 그 중에서도 현재 구글(Google)[14] 안드로이드를 운영체제로 하는 많은 스마트폰들이 제조되고 있기 때문에 모바일 Sage의 사용을 높이기 위하여 본 연구에서는 안드로이드

11) 데이터처리보다 음성통화용으로 주로 사용되는 PDA기능을 지원하지 않는 휴대폰을 일반 휴대폰(Normal Phone)이라 정의한다(김상형, 2010).

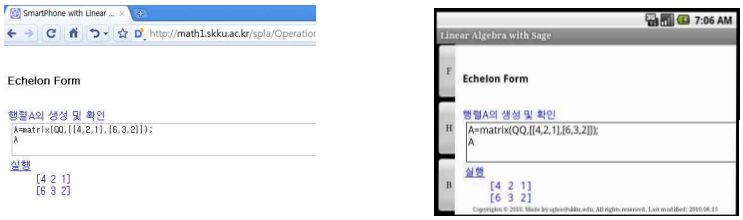
12) http://matrix.skku.ac.kr/cla12/sage-2-2-2.html

13) Yano Research Institute Ltd.

14) http://www.google.com

운영체제를 활용한 연구에 1차적 관심을 둔다. 모바일 환경에서 인터넷을 더 많이 보급시키기 위한 구글의 목적으로 만들어진 안드로이드는 각종 모바일 운영체제가 치열한 경쟁을 벌이는 혼잡한 상황에서 새롭게 등장한 모바일 운영체제이다(김상형, 2010). 이러한 안드로이드는 인터넷을 기반 작동하는 Sage에 있어서 모바일 화에 매우 적합한 환경을 제공한다. 또한 무료라는 장점을 통하여 자본과 판권에 대한 문제가 해결되어, 우리나라 공교육에 활용을 해도 문제가 없다. 모바일 Sage의 개발은 전자 학습의 새로운 패러다임이 되고 있는 모바일 학습에서의 수학교육에 사용되는 공학도구의 중요한 한 축을 담당할 수 있을 것이다. 그리고 안드로이드는 휴대폰뿐 아니라 다양한 정보 가전기기에 적용할 수 있는 연동성도 갖추고 있기 때문에, 안드로이드에서 구현되는 Sage 환경의 구축은 훗날 다양한 형태의 교육환경을 창출할 수 있는 가능성을 지닌다. 하지만 안드로이드 운영체제는 아직 대학과정의 수학교육 관련 콘텐츠가 부족하다는 단점을 가지고 있다. 따라서 안드로이드 모바일 기기의 폭발적인 사용과 함께, 안드로이드용 교육 콘텐츠의 개발은 이러한 시기에 적합하다고 판단된다.

안드로이드가 설치되어 있는 스마트폰으로 Sage를 활용하기 위해서는 XML[15]언어로 직접 Sage의 모든 코드를 작성하는 방법과, 기존의 웹 페이지를 안드로이드 기기에서 효과적으로 보여주는 방법이 있다. Sage는 웹에 최적화된 프로그램이기 때문에 저자는 두 번째 방법을 택하여 설계하였다. 이미 웹에서 모바일 환경을 위한 최적화를 시켜두었기 때문에 Sage를 스마트폰에서 적용시키는 데에는 큰 어려움이 없었다. 단지, 프로그램을 이용하는 사용자의 편의성을 위한 기능(UI)을 개발하는데 초점을 두고 연구를 진행하였다. 스마트폰에서 Sage를 사용하는 방법은 <그림 3>과 같이 웹에서 사용하는 방법과 동일하다. 주어진 셀(Cell)에 명령어를 입력한 후, '실행'버튼을 누르면 입력한 명령어에 대한 답을 얻을 수 있다.



<그림 3> 웹(Web)과 안드로이드(Android)에서의 Sage

모바일 환경에 최적화된 프로그램을 만든다 하더라도, 그 프로그램을 직접 활용하기는 쉬운 것만은 아니다. 그 이유는 작은 화면 안에 배열되어 있는 그 보다 더 작은 키보드 조작 때문이다. PC에서의 키보드 조작과는 달리 스마트폰에서의 키보드 조작은 비교적 사용하기가 불편하다. 따라서 스마트폰을 이용하여 Sage의 모든 명령어를 입력하기에는 필요하지 않은 노력과 시간이 필요하게 된다. 예를 들어 $f(x)=x^2$ 함수의 그래프를 그리기 위해 스마트폰 내장 키보드를 이용하여 'plot(x^2)'를 입력하려면 영문 자판에서 'plot'를 차례대로 입력하고, 숫자자판으로 바꾼 다음 괄호 '('를 입력하고 다시 영문 자판으로 바꾼 다음 'x'를 입력하고, 다시 기호자판으로 바꾼 다음 '^'를 입력하고 다시 숫자자판으로 바꿔서 '2)'를 입력해야 한다. 이와 같이 매우 간단한 명령어일지라도 함수의 입력을 위해서 취해야 할 동작은 간단하지만은 않다. 따라서 본 연구진에서는 위와 같은 불편함을 줄이기 위하여 <그림 4>와 같은 'Sage Keyboard for Linear Algebra'라는 이름의 키보드 프로그램을 개발하였다. 본 프로그램은 아래 주소[16]에 접속하거나 아래 그림의 QR-코드를 스캔하여 무료로 다운로드 받아 안드로이드 스마트폰에 설치할 수 있도록 하였다.

15) Extensible Markup Language (http://ko.wikipedia.org/wiki/XML)

16) https://play.google.com/store/apps/details?id=sage.keyboard.la

<그림 4> Sage Keyboard for Linear Algebra

개발된 키보드 프로그램을 활용하여 명령어를 입력하기 위해 함수 자판에서 'plot'버튼을 누르면 'plot(,(-5,5))'가 자동으로 화면에 입력이 되고, 숫자자판을 이용하여 나머지 빈칸에 'x^2'을 입력하면 모든 작업이 끝난다. 따라서 예전의 복잡한 조작을 단순히 두 단계로 조작할 수 있게 되었다. 함수가 더 복잡해질수록 개발된 키보드 프로그램은 더욱 더 큰 효율을 보일 것이다. 다음 <표 1>을 통해 'Sage Keyboard for Linear Algebra'에서 사용할 수 있는 Sage 명령어 중 일부를 확인할 수 있다. 삼각함수 및 미적분과 관련된 명령어와 행렬대수와 관련된 함수들까지 활용할 수 있도록 키보드를 개발하였다.

<표 1> Sage Keyboard for Linear Algebra의 함수 중 일부

키보드	실제 입력되는 값	설 명	키보드	실제 입력되는 값	설 명
log	log(상수 / 변수)	$\log(x)$, $\log(2)$, $\log(3)$	solve	solve([$f(x)$==0],x)	$f(x)=0$인 방정식의 x구하기
sin	sin(상수 / 변수)	$\sin(x)$, $\sin(\pi)$	matrix	matrix(QQ,[1행], … , [n행])	행렬
cos	cos(상수 / 변수)	$\cos(x)$, $\cos(\pi)$	vector	vector(QQ,[성분1, … , 성분n])	벡터
tan	tan(상수 / 변수)	$\tan(x)$, $\tan(\pi)$	REF	행렬.echelon_form()	행렬의 REF 또는 RREF 구하기
csc	1/sin(상수 / 변수)	$\csc(x)$, $\csc(\pi)$	inv	행렬.inverse()	행렬의 역행렬(inverse)구하기
sec	1/cos(상수 / 변수)	$\sec(x)$, $\sec(\pi)$	rank	행렬.rank()	행렬의 계수(rank)구하기
cot	1/tan(상수 / 변수)	$\cot(x)$, $\cot(\pi)$	det	행렬.determinant()	행렬의 determinant 구하기

Ⅳ. 선형대수학 교수학습을 위한 모바일 교육환경 구축

1. 모바일 선형대수학 콘텐츠 개발

그간 적지 않은 수학 관련 프로그램들이 개발되어 왔지만, 효과적으로 수업환경에 활용되지 못한 이유 중 하나는 소프트웨어의 개발에만 치중하고, 개발품이 긍정적인 교육효과를 이끌어낼 수 있도록 수학교육현장에 적절하게 적용되는 부분에 대한 연구와 성공모델의 개발 및 확산을 간과하였기 때문이다. 본 절에서 소개할 모바일 Sage의 콘텐츠는 교육현장에서 적극적으로 활용되고 상응하는 효과를 볼 가능성을 담고 있다. Sage를 이용하여 만들어진 교육 콘텐츠는 수업시간에 배운 다양한 수학적 개념들을 학생들이 직접 어렵지 않게 다루어보며 쉽게 이해하도록 도와주며, 동시에 실제 사회의 다양한 문제를 직접 해결할 수 있는 능력을 향상시켜 줄 수 있다.

또한 별도의 다른 소프트웨어의 설치 없이, 학생들은 가지고 있는 휴대폰의 활용으로 간단한 계산부터 복잡한 계산까지 할 수 있고, 수업시간에 배운 수학적 개념을 다시 한 번 확인할 수 있다. 그리고 이렇게 만들어진 교육 콘텐츠는 휴대폰뿐만 아니라 PC에서도 아래 주소를 통해 확인할 수 있다.

http://matrix.skku.ac.kr/2011-sage/sage/skkula.html

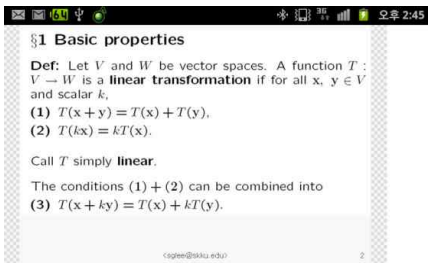
본 연구에서는 수학의 여러 과목 중 '선형대수(행렬이론)'을 대상으로 안드로이드용 모바일 콘텐츠[17]를 개발하였다. 그리고 기타 모바일 기기에서도 다음 웹 주소[18]를 통하여 본 콘텐츠의 주요 기능을 사용할 수 있으며 콘텐츠의 첫 화면은 <그림 5>와 같고, 크게 아래와 같은 항목들로 구성되어 있다.

<그림 5> 모바일 선형대수학 콘텐츠

· 강의록 (Lecture Notes)
· 동영상 강의 (Video Lectures)
· 문제와 풀이 (Problems and Solutions)
· 공학적 도구 (Sage)

1) 강의록 (Lecture Notes)

기존의 종이로 된 강의록에서 한 단계 진화된 전자 문서를 이용하여 학생은 언제 어디서나 인터넷만 연결되어 있으면 학습 자료를 열람하고 공부할 수 있다. 실제 「Kwak & Hong(2004). Linear Algebra: Second Edition, Birkhauser」를 교재로 하여 수업에 적절한 내용을 웹 콘텐츠의 형태로 제작되었으며, <그림 6>은 그 중 선형변환의 기본 성질에 관한 내용을 스마트폰에서 확인하는 장면이다.



<그림 6> 모바일 강의록

2) 동영상 강의 (Video Lectures)

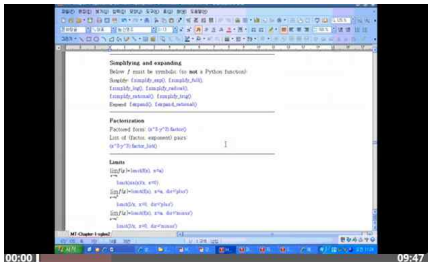
2012년 10월 현재 유튜브(You-Tube)에는 2011년 1학기에 녹화한 40여개의 동영상 강의가 업로드 되어있다.[19] 각 최대 15분 단위의 유튜브의 동영상 강의를 이용하여 이동하는 짧은 시간에도 스마트폰을 이용하여 학습을 할 수 있다. 이는 학생들의 잠시 버려지는 시간을 이용하여 간단히 학습내용을 확인하면서 수업 전에 학습

17) 개발된 모바일 콘텐츠는 "http://play.google.com/store" 또는 안드로이드용 프로그램 중 'Play 스토어'에서 'skku matrix'로 검색하여 내려 받을 수 있으며, 안드로이드 2.1버전 이상 스마트폰에서 구동시킬 수 있다.

18) http://matrix.skku.ac.kr/2011-sage/sage/skkula.html

19) 웹브라우저를 통해 유튜브(http://www.youtube.com)에 접속한 후, "SKKU MT"로 검색하면 2011년 1학기에 녹화된 40여개의 행렬이론 강의 동영상을 확인할 수 있다.

할 내용을 예습하거나 수업시간에 배운 내용을 복습하는데 도움을 줄 수 있다. <그림 7>은 실제 스마트폰을 이용하여 동영상 강의를 확인하는 장면이다.



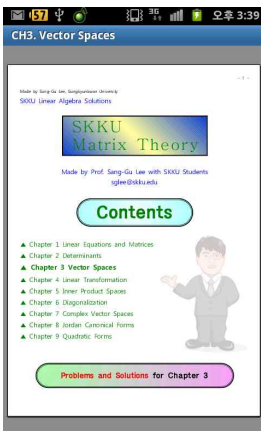
<그림 7> 모바일 동영상 강의

3) 문제와 풀이 (Problems and Solutions)

학생들은 앞서 소개한 강의록과 강의 동영상을 이용하여 선형대수 이론을 학습하고, <그림 8>과 같은 선형대수 문제 및 풀이를 이용하여 스스로 자기 주도적인 학습을 할 수 있다. 강의록에 제시된 교재의 각 장별로 주요 연습문제와 풀이가 PDF형식의 파일로 모바일 기기에서 바로 연결되도록 웹상에서도 제공되고 있다.

4) 공학적 도구와 Sage

널리 알려진 것과 같이 수학교육에서의 공학적 도구(CAS 도구)의 사용은 학습자에게 많은 도움을 줄 잠재력을 가지고 있다. 본 연구에서는 스마트폰에서도 사용할 수 있는 모바일 Sage를 개발하여 선형대수 학습 콘텐츠에 적용시킨 내용을 소개함으로써, 학생 스스로 언제 어디서나 실생활의 문제를 CAS 도구를 이용하여 해결해 낼 수 있도록 그 환경을 제공한다.



<그림 8> 모바일 문제와 풀이

<그림 9> Sage Calculator for Matrix

<그림 9>는 모바일 선형대수학 콘텐츠에서 'Sage'버튼을 클릭했을 때 나타나는 「Sage Calculator for Matrix」이다. 개발하는 과정에서 이미 모바일 환경에 맞도록 Sage를 최적화하였기 때문에 스마트폰에 적용시키는 데에는 큰 어려움이 없었다. 단지 PC보다는 상대적으로 화면크기가 작은 모바일기기에서 Sage의 조작을 쉽게 할 수 있도록 도움말 및 유튜브 동영상 참고자료를 추가하여 응용 프로그램을 사용하는 사용자의 편의성을 위한 기능을 추가하는데 초점을 두었다.

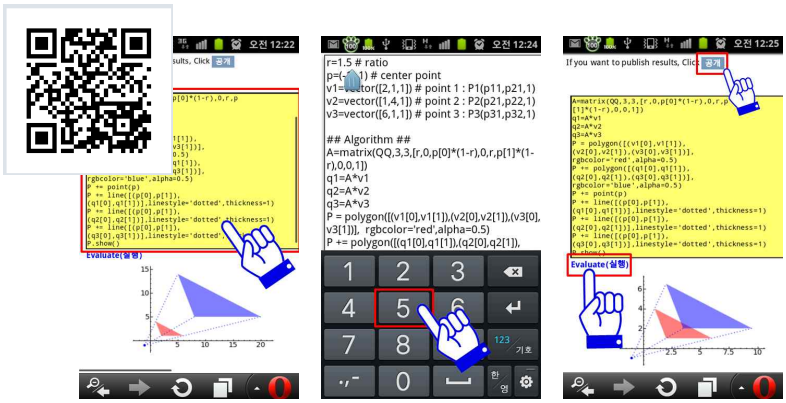
2. 선형대수 교수·학습을 위한 모바일 Sage 활용 방안

해당 절에서는 위에서 소개한 모바일 Sage를 실제 어떻게 활용할 수 있는지 간단한 선형대수 예제(선형변환)를 통해 자세히 설명하고자 한다.

평면 R^2의 점 $P(x,y)$는 R^3의 xy평면을 1만큼 평행 이동한 평면 위의 점 $(x,y,1)$과 일대일 대응 된다. 이 때 (x,y)는 동차좌표(homogeneous coordinates) $(x,y,1)$을 갖는다고 한다. 그리고 R^2위의 점 $P(x,y)$를 임의의 중심점(center point) $P_0(x_0,y_0)$과 비율(ratio) r에 대하여 P'로 Dilation(확대, 축소)인 변환 T는 다음과 같이 동차좌표를 이용한 행렬들의 곱으로 계산될 수 있다(Thomas, 2002).

$$T(x,y,1) = (rx + x_0(1-r),\ ry + y_0(1-r),\ 1)$$
$$= \begin{bmatrix} r & 0 & x_0(1-r) \\ 0 & r & y_0(1-r) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

이를 참고하여 <그림 10>과 같이 임의의 삼각형의 확대, 축소를 모바일 Sage를 이용하여 시각화시키고, 시뮬레이션 할 수 있다. 주어진 작은 삼각형을 확대시킨 큰 삼각형을 확인할 수 있다. 우리는 이를 몇 번의 클릭만으로 변형시켜 다른 임의의 삼각형의 확대 또는 축소를 찾을 수 있다.



<그림 10> 선형변환을 위한 모바일 Sage[20] (Dilation 비율의 변경($r = 1.5$))

Step 1. 화면에서 코드가 입력되어 있는 영역을 터치하면 위의 그림과 같이 주어진 코드를 변형할 수 있는 화면이 주어진다. 여기에서 r의 값을 3에서 1.5로 변형한다.

Step 2. 그 다음 'Evaluate(실행)' 버튼을 누르면 새로운 Dilation($r = 1.5$)을 찾을 수 있다. 그리고 우리는 '공개' 버튼을 이용하여 실행한 결과를 웹 주소의 형태로 저장할 수 있다. 이를 이용하여 학습자는 모바일 상에서 숙제를 해결할 수도 있고, 교수자는 학습자를 위한 도움자료를 만들 수도 있다.

Step 3. 학습자는 웹 주소로 저장된 공개된 학습 자료를 <그림 11>과 같이 이메일, 트위터, 페이스북 같은 SNS를 이용하여 교수자에게 제출할 수 있다.

20) http://math3.skku.ac.kr/spla/LT_Dilation

<그림 11> 페이스북을 이용한 자료의 제출 및 공유

행렬식[21] 특성방정식[22]

고유값(고유벡터)[23] LU 분해[24]

<그림 12> 선형대수학 모바일 Sage 콘텐츠(QR-코드)

이와 같이 학습자는 강의노트와 동영상을 통해 선형대수에 대한 이론을 공부하고, 주어진 문제와 해답을 통해 학습한 이론을 다시 한 번 이해할 수 있다. 또한 도구(모바일 Sage)를 이용하여 그 알고리즘을 이해하고 실생활의 복잡한 문제도 해결해 낼 수 있다.

<그림 12>는 공개된 선형대수학 모바일 Sage 콘텐츠 중 일부이다. 주어진 QR-코드를 스캔하여 실행하고 관련된 모든 문제를 크기와 숫자만 바꾸어 다룰 수 있다. 그리고 본론에서 소개한 모든 내용은 안드로이드 마켓에서 “SKKU Matrix”로 검색하여 무료로 다운받으면 스마트폰에서 한 학기 강좌 내용을 자기 주도적으로 학습할 수 있으며, 동시에 웹 버전도 아래 웹 주소[25]를 통하여 바로 누구라도 언제 어디서나 활용이 가능하다. 학습한 내용들은 네이버 현대선형대수학 카페[26], 페이스북 수학적 모델링 강의실[27]등의 커뮤니티를 통하여 실시간으로 학습 수행에 대한 피드백을 받을 수 있다.

모바일 학습은 전반적으로 모바일 기기라는 새로운 매체의 활용으로 인한 학습자의 학습에 대한 동기와 집중력을 향상 시키고, 학습자들의 즉각적인 상호 작용과 피드백을 통한 학업성취 향상이라는 장점을 얻을 수 있지만, 다음과 같은 단점도 존재한다(임정훈, 2008). 모바일 학습을 위한 체계적인 수학 교수학습 모형이 아직 정립되어 있지 않아 교수자와 학습자의 교수학습에 대한 적응 문제가 발생할 수 있다. 그리고 방과 후에도 계속되는 학생의 질문에 대한 교수자의 시간과 노력이 추가적으로 요구된다. 또한, 작은 화면의 모바일 기기에서 이뤄지는 모바일 학습은 학생들의 집중도의 지속과 학습효과의 확인에 어려움이 존재한다. 또 모바일 기기가 없는 소수의 학생들은 상대적으로 학습기회에 대한 박탈감을 얻을 수도 있다(한선관 외, 2008).

본 연구팀은 위와 같은 모바일 학습의 단점을 고려하면서, 기존의 교수학습방식에 더해 여러 유형의 교수학습 모형을 고안하면서 실제 지난 2년간 대학의 선형대수학 강좌에 적용하면서 그 난점을 극복해왔다.

---

21) http://matrix.skku.ac.kr/CLA12/sage-4-1-4.html
22) http://matrix.skku.ac.kr/CLA12/sage-4-5-2.html
23) http://matrix.skku.ac.kr/CLA12/sage-4-5-6.html
24) http://matrix.skku.ac.kr/CLA12/sage-4-R-1.html
25) http://matrix.skku.ac.kr/2011-sage/sage/skkula.html
26) http://cafe.naver.com/clamc, http://www.youtube.com/user/dymaxionkorea
27) http://www.facebook.com/groups/199076623462090

Ⅳ. 결 론

수학의 중요한 한 부분인 ICT 수학교육의 핵심인 공학적도구의 개발에서, 본 연구진은 한국의 교육여건에 맞는 CAS 도구로 최근 무료로 공개된 수학프로그램인 Sage를 어느 나라보다 앞서 개선하여 사용자 편의성을 높이고, 더구나 자국어 버전(한글버전)으로 만들어서 한국에서 제공하는 자체 Sage 서버를 운영하여 현장수업에 적용하였다. 앞으로 '모바일' 사회에서 더 나아가 '유비쿼터스' 사회로 발전하는 과정에서 언제 어디서나 사용할 수 있는 모바일기기를 통한 수학학습 모델의 개발은 그 중요성이 더욱 커질 것이다.

본 연구에서는 개별 강좌에 맞는 모바일 Sage 콘텐츠(강의록, 동영상강의, 문제와 풀이, 공학적 도구)를 다양하게 개발하였고, 이를 통하여 선형대수학의 모바일 학습모델을 소개하였다. 이번 연구를 통하여 개발된 스마트폰을 이용한 선형대수학 콘텐츠의 주요 특징 중 하나는 문제해결과정에서 기존의 공학용계산기와는 다르게 필요시 로그인 과정이 없이 클릭 한번으로 즉시 결과와 그 과정까지 언제 어디서나 무료로 살펴볼 수 있다는 것이다. 또 함수를 바꾸어 가면서 다른 문제에 적용하는 것도 가능하게 만들었다. 더 나아가 수준별 그리고 자기주도적 학습과정에서 콘텐츠와 동영상 설명 및 질문과 답변을 통하여 완전학습에 이르기까지 반복학습을 할 수 있는 기회를 제공한다는 것이다. 본 논문에서 소개한 부가적인 학습 보충기회를 정규수업에 적용한다면, 수강학생들의 학습 만족도 및 자신감 향상은 물론이고, 나아가 대학수학교육의 질을 높이는 주요 요인이 될 수 있을 것으로 생각한다.

참 고 문 헌

고래영 · 김덕선 · 박진영 · 이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **23(4)**, 1023-1041.

권오남 · 박경미 (1997). 그래픽계산기를 이용한 함수지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **36(1)**, 35-48.

김경원 · 이상구 · 이재화 (2011). Excel Grapher: 역동적 함수 그래프 도구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, **25(2)**, 309-321.

김상형 (2010). 안드로이드 프로그래밍 정복, 서울: 한빛미디어.

우홍욱 · 서유진 (2010). 학습장애 학생의 m-러닝을 위한 수학교육 애플리케이션 특징분석 및 개발방향 모색, 특수교육, **9(2)**, 123-164.

임정훈 (2008). 모바일 학습(Mobile Learning)을 위한 교수학습 모형의 설계 방향 탐색, 한국교육논총, **8(1)**, 101-124.

조세경 (2009). 스마트폰을 활용한 외국어 학습, Multimedia Assisted Language Learning, **12(3)**, 211-228.

최윤철 · 임순범 (2007). 모바일 멀티미디어, 경기: 생능출판사.

한선관 · 이철현 · 서정희 · 한희섭 (2008). u-School을 위한 u-러닝 서비스 모델 탐구: u-러닝 연구학교 사례 분석을 중심으로, 실과교육연구, **14(2)**, 233-255.

황재훈 · 김동현 (2005). 성공적인 m-Learning 구현을 위한 핵심 요인에 대한 연구. Journal of Information

Technology Applications & Management, **12(3)**, 57-80.

Franklin, Teresa & Peng, Li-Wei (2008). Mobile math: math educators and students engage in mobile learning, *Journal of Computing in Higher Education*, **20(2)**, 69-80.

Griffith, S. & Liyanage, L. (2008). An introduction to the potential of social networking sites in education, *Emerging Technologies Conference 2008*, 76-81.

Ham, Y. & Lee, S.-G. (2005). New Learning Environment of Linear Algebra in Korea, 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구>, **9(1)**, 57-66.

Lu, M. (2008). Effectiveness of vocabulary learning via mobile phone, *Journal of Computer Assisted Learning*, **24(6)**, 515-525.

Mazer, J. P.; Murphy, R. E. & Simonds, C. J. (2007). I will see you on Facebook: The Effects of Computer-Mediated Teacher Self-Disclosure on Student Motivation, Affective Learning, and Classroom Climate, *Communication Education*, **56(1)**, 1-17.

Thomas, David A. (2002). *Modern Geometry*, Monterey(USA): Brooks/Cole.

Traxler, J. (2007). Defining, discussing and evaluating mobile learning, *The International Review of Research in Open and Distance Learning*, **8(2)**.

Development of smart-phone contents for mobile linear algebra

Kyung-Won Kim
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : kwkim@skku.edu

Sang-Gu Lee†
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : sglee@skku.edu

Linear Algebra are arguably the most popular math subjects in colleges. We believe that students' learning and understanding of linear algebra can be improved substantially if we incorporate the latest advanced information technologies in our teaching. We found that the open source mathematics program 'Sage' (http://sagemath.org) can be a good candidate to achieve our goal of improving students' interest and learning of linear algebra.

In particular, we developed a simple mobile content which is available for Sage commands on common cell phones in 2009. In this paper, we introduce the mobile Sage which contains many Sage functions on a smart-phone and the mobile linear algebra content model(lecture notes, and video lectures, problem solving, and CAS tools) and it will be useful to students for self-directed learning in college mathematics education.

* ZDM Classification : D30, H60, N80, U60
* 2000 Mathematics Subject Classification : 15A04, 97B40, 97U50, 97U70
* Key Words : Mobile Mathematics, Sage-Math, Mobile Sage, Linear Algebra, CAS, Smartphone
* This paper was supported by 63 Research Fund, Sungkyunkwan University, 2012
† Corresponding author