韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 27집 제 1호, 2013. 2. 1-17

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 27, No. 1, Feb. 2013. 1-17

Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 개념의 Visual-Dynamic 자료 개발과 활용

이 상 구 (성균관대학교)†
장 지 은 (성균관대학교)
김 경 원 (성균관대학교)

수학적 개념의 시각화는 단순히 학생들의 개념에 대한 이해를 돕는 것에서 그치는 것이 아니라 학생으로 하여금 시각화 과정을 통하여 스스로 발견하며 깨우치는 교육이 가능하도록 하는 것을 추구한다. 따라서 시각화 자료는 세심한 교육적 고려를 바탕으로 준비되어야 한다. 이를 위하여 본 연구에서는 동적 시각화 및 대수 계산에 적합한 Sage와 GeoGebra를 선택적으로 활용하여, 선형대수학을 수강하는 학생들의 수학적 개념의 이해를 돕기 위해 교재의 순서를 따라가면서, 이론에 추가되는 양방향의 시각적 도구를 개발하였다.

본 논문에서는 이 과정에서 개발된 선형대수학 수업에 필요한 시각적 이해를 돕는 다양한 도구들을 소개한다. Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 개념의 시각화에서 얻어진 경험은 다른 대학 수학 강좌뿐만 아니라 중·고등 수학에도 적용될 수 있다.

Ⅰ. 연구의 필요성

수학교육이 직면하고 있는 가장 큰 문제점 중의 하나는 수학이라는 교과에 대한 학생들의 인식이다(류희찬 · 이지요, 1993). 추상화된 내용을 기호로 나타내고 형식적으로 전개해 나가면서 논리적 엄밀성을 강조하기 때문에 많은 학생들은 수학이 지루하다고 인식한다(문광호 · 우정호, 1999). 처음부터 학생들에게 기호를 사용한 형식적 전개와 논리적 엄밀성을 강조한다고 해서 수학의 내용이 바르게 전달될 수 있는 것은 아니다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 학생들이 수학의 내용을 직관적으로 이해하고 수학을 보다 흥미롭게 느낄 수 있도록 도움을 주는 교수자의 노력이 필요하다. 그 대안의 하나로 수학적 시각화를 찾을 수 있다. 특히 대수적 개념을 다루는 선형대수학의 경우 기하학적 이해가 동시에 이루어 질 때 정확한 의미전달이 되는 경우가 많기 때문이다(김덕선 · 이상구 · 정경훈, 2007). 선형대수학의 개념에 대한 시각화는 학생들이 그 개념을 직접 눈으로 확인할 수 있도록 하여 선형대수학의 이론 전개를 직관적으로 이해하고 보다 흥미롭게 학습하는 교육환경을 제공한다. 뿐만 아니라 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 정적인 시각화에 동적인 시각화를 보탠 것은 학생들의 선형대수학 개념에 대한 이해 과정을 돕는다(류희찬 · 이지요, 1993).

시각화는 단순히 이해를 돕기 위한 정적인 그림을 뜻하지 않는다. 시각화 도구는 단순히 수학적 내용에 대한 이해를 돕기 위한 도구의 차원을 넘어 새로운 지식을 획득하고 더 나아가 새로운 지식을 창출할 수 있어야 한

* 접수일(2012년 11월 18일), 심사(수정)일(2013년 1월 14일), 게재확정일(2013년 1월 22일)
* ZDM분류 : N85, U55, U65
* MSC2000분류 : 97B40, 97C80, 97U50, 97U70
* 주제어 : 수학교육, 시각화, Geogebra, Sage, 선형대수학
* 이 논문은 성균관대학교의 2012학년도 63학술연구비에 의하여 연구되었음
† 교신저자 : sglee@skku.edu

다. 그리고 이와 같이 시각화 도구를 통해 지식을 창출하거나 획득하기 위해서는 단순히 시각적 자료를 제시하는 것이 아니라 시각적 대상을 탐구할 수 있는 환경이 마련되어야 한다(류희찬 · 이지요, 1993).

이러한 탐구학습 환경을 마련하기 위해 본 연구에서는 컴퓨터를 활용한 시각화의 도구로 몇 가지 공학적 도구를 활용하였다. 최근 연구된 자료들을 살펴보면 시각화에 널리 사용되는 공학적 도구로서 Maple, Mathematica, GSP(Geometor's Sketchpad)등의 유료 프로그램과 Maxima, Sage, GeoGebra등의 무료 프로그램들을 찾을 수 있다(문광호 · 우정호, 1999; 한세호 · 장경윤, 2009; Macnab & Phillips & Norris, 2012). 그 중 본 연구에서는 언제 어디서나 무료로 사용할 수 있는 Sage와 GeoGebra를 선택하여 시각화를 구현하였다. Sage는 인터넷의 연결이 가능한 컴퓨터와 인터넷 접속용 프로그램만 있으면 바로 사용이 가능한 무료 CAS(Computer Algebra System) 도구이다(고래영 · 김덕선 · 박진영 · 이상구, 2009). 이것은 수학분야의 연구뿐만 아니라, 공학 및 다른 과학 분야에도 널리 사용된다. GeoGebra 역시 기하, 대수를 쉽게 다룰 수 있도록 개발된 무료 교육용 수학 소프트웨어로서 움직이는 기하와 컴퓨터 대수 시스템을 결합한 소프트웨어이다(고윤아, 2011; Hohenwarter 외, 2007). 이러한 이유에서 본 연구에서는 역동적인 시각화를 구현하기에 적합한 GeoGebra와 대수적 계산 시스템을 이용한 시각화를 구현하는데 효과적인 Sage를 동시에 사용하여 다양한 요구를 만족하는 시각화 도구들을 개발하였다. GeoGebra를 이용해 개발한 시각화 도구들과 Sage를 이용해 개발한 시각화 도구들의 웹 주소는 다음과 같다.

http://matrix.skku.ac.kr/2012-Album/CLA-GeoGebra-Dynamic-Visual.htm
http://matrix.skku.ac.kr/2012-sage/sage-la/visualization.htm

Ⅱ. 대학수학교육에서 Sage와 GeoGebra의 활용

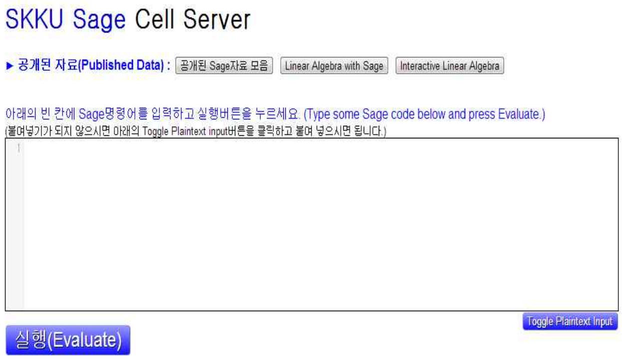
위의 시각화 도구들을 적절히 혼합하여 장별로 각 주제에 해당하는 CAS 도구를 제작하였다. 자세히 말하면, GeoGebra를 Sage에 통합하여 전체 시각화의 플랫폼을 Sage로 통일하는 방식으로 CAS 도구를 제작하였다. 즉, Sage의 웹 페이지 화면에서 GeoGebra와 Sage를 동시에 사용할 수 있도록 하였다. 뿐만 아니라 이 CAS 도구 안에 시각화 도구에 해당하는 강의노트와 동영상도 함께 제공하여 시각적인 대상에 대한 배경, 이론도 함께 탐구할 수 있는 환경을 구현하였다. Sage와 GeoGebra의 시각화 도구들을 만드는 방법 중 이와 같은 통합 시스템을 선택한 이유는 Sage의 플랫폼으로 일관성을 유지함으로써 시각화 도구를 사용하는 학생들의 사용을 더욱 용이하게 하고, 학생들이 본 연구에서 개발한 CAS 도구를 실습한 후에는 그 CAS 도구 안에서 바로 Sage를 이용해 대수적 계산을 해보고 주어진 명령어를 활용해 새로운 시각적인 자료도 만들 수 있기 때문이다. 또한 학생들은 실습하며 느낀 것을 요약 정리하여 웹상에서 쉽게 공유할 수 있고 이 웹주소를 가지고 보고서로 제출할 수도 있다. 이로써 단순히 이해를 위한 정적인 시각화 도구만을 제공하는 것이 아니라 시각적 대상을 탐구하고 더 나아가 도구를 활용해 새로운 시각적인 대상도 창출할 수 있는 환경을 마련하였다. 그리고 위에 소개한 새 CAS 도구를 2012학년도 1학기 전자교탁을 활용한 선형대수학 입문 수업에서 적용하였다. 수업 진행 중에 해당 개념에 대한 기존과 같은 이론적 설명에 보태어, 웹상에 업로드 된 제작된 자료를 클릭하여 실제 실습하는 과정을 보여주고 저장하는 방식으로 진행하였다.

따라서 본 연구에서는 효과적인 선형대수학교수학습에 필요한 소재를 발굴하여 다양한 시각적 도구를 Sage와 GeoGebra를 이용해 제공한다. 쉬운 것부터 난해한 개념까지 시각화를 시도하였으므로 학생의 수준과 선호도에 따라 선형대수학 강좌에서 선택적으로 활용하면 된다.

Ⅲ. Sage와 GeoGebra를 이용한 선형대수학 시각화 도구 개발

선형대수학의 시각화 도구를 Sage에 통합한 자료와 QR코드를 아래와 같이 소개한다. 아래 웹 주소에서는 본 연구에서 개발한 선형대수학의 개념 설명 및 관련 동영상과 함께 Sage와 GeoGebra를 이용한 대수적 계산 알고리즘 및 시각화 도구를 QR코드와 함께 제공한다. QR코드를 함께 제공한 이유는 본 연구에서 개발한 CAS 도구를 언제 어디서나 무료로 비밀번호와 명령어를 입력하는 수고 없이 사용할 수 있으며, 일방적인 교육이 아닌 양방향교육이 가능하도록 하고 실습한 결과 또한 SNS를 통해 바로 공유할 수 있도록 하기 때문이다.

SKKU Sage Cell Server : http://sage.skku.edu



<그림 1> Single Cell Server QR코드

다른 CAS 프로그램과 비교하여 Sage가 가지는 중요한 차이는 Sage에서 실행한 결과들은 모두 웹상에서 다른 사람들에게 공개될 수 있다는 것이다. 따라서 누구나 Sage의 명령어를 외울 필요가 없이, 인터넷을 통해 공개된 워크시트의 명령어를 복사하여, 자신의 Sage 워크시트에 붙여 넣고 단순히 숫자만 변형하여 비슷한 유형의 다른 수학 문제들 또한 간단하게 해결할 수 있다. 그 자세한 방법과 선형대수학에 관련된 기본적인 Sage 명령어는 다음 주소를 통해 확인할 수 있다.

http://matrix.skku.ac.kr/2012-LAwithSage/interact/link.html
http://matrix.skku.ac.kr/2010-Album/Sage-QReference-SKKU.pdf

현재 사용가능한 서버와 ID, Password는 아래와 같다(김덕선・박진영・이상구, 2008).

http://math1.skku.ac.kr (ID: skku, Password: math)
http://math2.skku.ac.kr (개인의 계정 및 암호 설정 가능)

본 연구에서 개발하여 활용한 Sage 프로그램은 웹상에서의 클라우드 컴퓨팅만이 아니라 다음 주소(http://sagemath.org)에서 직접 버전 5.1을 무료로 프로그램을 다운받아 PC에 설치하여 (Linux 또는 Window) 인터넷 연결 없이도 무료로 활용이 가능하다. 더구나 이번에 새로 개발된 Sage Cell Server(http://sage.skku.edu)에서는 로그인 없이도 본 원고에서 제시한 명령어를 복사하여 빈칸에 붙인 후 실행을 하면 그 결과를 바로 볼

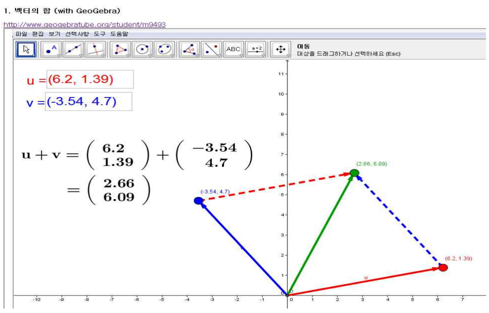
수 있도록 하여 사용자의 편의성을 극대화하였다. 아래 주어진 예와 같이 학생들은 GeoGebra 및 Sage를 이용한 역동적 시각화를 통해 선형대수학의 개념을 직관적으로 이해하고, 강의노트와 함께 제공된 강의 동영상을 통해 이해 과정을 반복하면서 완전학습을 할 수 있다.

1. 벡터의 합

- Sage : http://matrix.skku.ac.kr/2012-sage/sage-la/visualization.htm
- GeoGebra : http://www.geogebratube.org/student/m9493
- 통합 솔루션 : http://math1.skku.ac.kr/pub/534

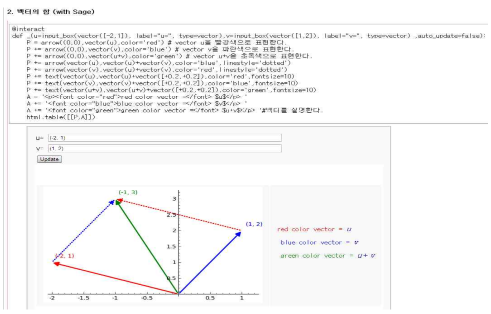
<그림 2> 벡터의 합 시각화 도구의 QR코드

(1) GeoGebra를 이용한 역동적 시각화



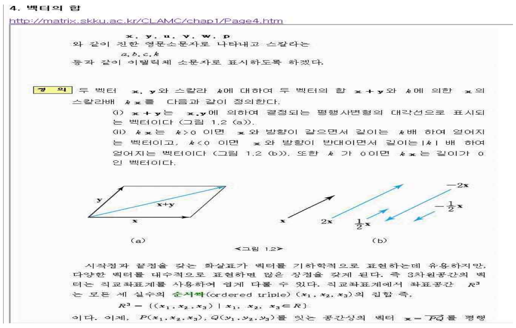
<그림 3> 벡터의 합 (GeoGebra)

(2) Sage를 이용한 시각화



<그림 4> 벡터의 합 (Sage)

(3) 벡터의 합 개념의 이론 전개



4. 벡터의 합

http://matrix.skku.ac.kr/CLAMC/chap1/Page4.htm

x, **y**, **u**, **v**, **w**, **p**
와 같이 진한 영문소문자로 나타내고 스칼라는
a, b, c, k
등과 같이 이탤릭체 소문자로 표시하도록 하겠다.

정 의 두 벡터 **x**, **y**와 스칼라 k에 대하여 두 벡터의 합 **x**+**y**와 k에 의한 **x**의 스칼라배 k**x**를 다음과 같이 정의한다.

(i) **x**+**y**는 **x**, **y**에 의하여 결정되는 평행사변형의 대각선으로 표시되는 벡터이다 (그림 1.2 (a)).

(ii) k**x**는 $k>0$ 이면 **x**와 방향이 같으면서 길이는 k배 하여 얻어지는 벡터이고, $k<0$ 이면 **x**와 방향이 반대이면서 길이는 $|k|$ 배 하여 얻어지는 벡터이다 (그림 1.2 (b)). 또한 k가 0이면 k**x**는 길이가 0인 벡터이다.

<그림 1.2>

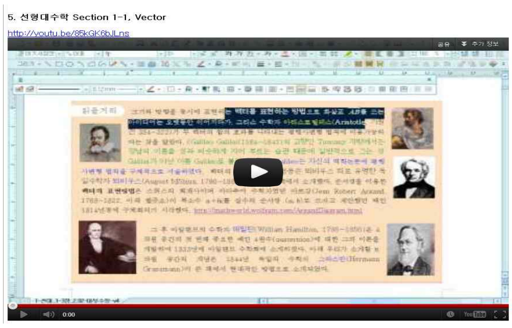
시작점과 끝점을 갖는 화살표가 벡터를 기하학적으로 표현하는데 유용하지만, 다양한 벡터를 대수적으로 표현하면 많은 장점을 갖게 된다. 즉 3차원공간의 벡터는 직교좌표계를 사용하여 쉽게 다룰 수 있다. 직교좌표계에서 좌표공간 R^3는 모든 세 실수의 **순서쌍**(ordered triple) (x_1, x_2, x_3)의 집합 즉,

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$$

이다. 이제, $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(y_1, y_2, y_3)$를 잇는 공간상의 벡터 $\mathbf{x} = \overrightarrow{PQ}$를 평행

<그림 5> 벡터의 합 관련 자료

(4) 벡터의 합 관련 동영상



<그림 6> 벡터의 합 관련 자료

벡터 u(빨간색 벡터)와 v(파란색 벡터)가 있다. 벡터 u와 v의 합을 구해보자. 이 시각화 도구를 통해 벡터 u+v는 초록색 벡터라는 것을 알 수 있다. 즉, 벡터 u+v는 벡터 u와 v가 만드는 평행사변형의 대각선벡터라는 것을 알 수 있다. 또한 벡터 u+v는 벡터 v+u와 같다는 것을 알 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 '두 벡터의 합은 두 벡터가 만드는 평행사변형의 대각선벡터와 같다', '벡터 u+v와 v+u가 같다.' 라는 사실을 직관적으로 보여준다.

2. 스칼라배 (http://math1.skku.ac.kr/pub/535)

벡터 u(빨간색 벡터)에 스칼라 k배를 시각화 하는 도구이다. 이 시각화 도구를 통해 벡터 u의 스칼라 k배를 한 벡터는 파란색 점선 벡터라는 것을 알 수 있다. 즉, 이 벡터는 벡터 ku이다. 또한 이 시각화 도구를 통해 $k>0$일 때 벡터 ku는 벡터 u와 방향은 같고 크기가 k배인 벡터, $k=0$일 때 벡터 ku는 벡터 0, 마지막으로 $k<0$일 때 벡터 ku는 벡터 u와 방향은 반대이고 크기가 k배인 벡터라는 것을 알 수 있다. 그리고 벡터 u와 스칼라 k를 변화시킬 때마다 벡터 ku가 어떻게 변화하는지를 관찰할 수 있다. 이러한 과정을 통해 다양한 벡터의 스칼라 배를 실습할 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 '벡터

u$=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$의 스칼라 k배는 벡터 u에 스칼라 k를 곱한 벡터 $\begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$이다.' 라는 것을 시각적으로 보여준다.

3. **선형연립방정식** (http://math1.skku.ac.kr/pub/583)

이 시각화 도구는 선형연립방정식의 해와 그래프와의 관계를 시각적으로 보여준다. 선형연립방정식 $\begin{cases} a_1x+a_2y=b_1 \\ a_3x+a_4y=b_2 \end{cases}$ 에서 두 방정식 $a_1x+a_2y=b_1$과 $a_3x+a_4y=b_2$의 그래프는 각각 빨간색 선과 파란색 선이다. 이 선형연립방정식의 해가 될 필요충분조건은 두 직선의 교점이다. 위의 시각화 도구에서 알 수 있듯이 선형연립방정식 $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+y=-5 \end{cases}$ 은 유일한 해 $(-2.33,-2.67)$을 갖는다. 이 시각화 도구에 선형연립방정식 $\begin{cases} x-y=-2 \\ -x+y=4 \end{cases}$ 을 입력하면 두 직선은 만나지 않음을 확인할 수 있다. 즉, 해집합은 공집합임을 확인할 수 있다. 또한 선형연립방정식 $\begin{cases} x-y=-2 \\ -x+y=2 \end{cases}$ 을 입력해보자. 그러면 두 직선은 일치한다. 즉 해가 무수히 많음을 알 수 있다.

4. **행렬의 곱** (http://math1.skku.ac.kr/pub/769)

노란색의 별이 있다. 이 노란색의 별의 중점 x$=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$에 행렬의 곱 AB와 BA를 곱하면 ABx는 빨간색의 별이고 BAx는 파란색의 별이다. 이 시각화 도구를 통해 빨간색의 별과 파란색의 별의 위치가 일반적으로 다르다는 것을 알 수 있다. 이로써 우리는 행렬의 곱 AB와 BA는 일반적으로 같지 않는다는 사실을 알 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 '일반적으로 행렬 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다.'라는 사실을 시각적으로 보여준다.

5. **역행렬** (http://math1.skku.ac.kr/pub/731)

행렬 $A=\begin{bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{bmatrix}$가 가역일 필요충분조건은 $ad-bc\neq 0$이고, A의 역행렬 A^{-1}는 다음과 같다.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & -d \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

이 시각화 도구는 2차 정사각행렬 A의 역행렬 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & -d \\ -c & a \end{bmatrix}$을 구하는 과정을 시각적으로 보여준다.

6. **삼각형의 넓이** (http://math1.skku.ac.kr/pub/730)

세 점 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이를 시각화하는 도구이다. 이 시각화 도구는 세 벡터 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)가 만드는 삼각형의 넓이는 $\pm\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1\,y_1\,1 \\ x_2\,y_2\,1 \\ x_3\,y_3\,1 \end{vmatrix}$ 라는 것을 보여준다.

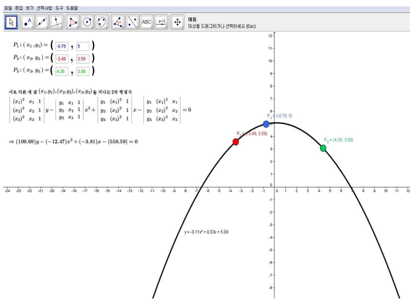
삼각형의 모양을 변화시킬 때마다 삼각형의 넓이를 구하는 행렬이 변화하는 것을 볼 수 있고 이 행렬을 이용해 삼각형의 넓이를 구하므로 삼각형의 넓이가 변화하는 것도 볼 수 있다. 이러한 과정을 통해 다양한 삼각형의 넓이를 구할 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 행렬식을 이용해 삼각형의 넓이를 구한 것이 실제 삼각형의 넓이와 같음을 시각적으로 보여준다.

7. 도형의 방정식 (http://math1.skku.ac.kr/pub/540)

이 시각화 도구를 통해 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$을 지나는 직선의 방정식은 $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ 이라는 것을 알 수 있다.

두 점을 변화시킬 때마다 직선의 방정식을 구하는 과정이 변화하고 직선의 방정식이 변화하는 것을 볼 수 있다. 이러한 과정을 통해 다양한 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 다음과 같은 행렬의 행렬식을 구하면 그 행렬식이 두 점을 지나는 직선의 식이 되는 것을 시각적으로 보여준다.

8. 보간법 (Curve Fitting, http://math1.skku.ac.kr/pub/597)



<그림 7> Curve Fitting (GeoGebra)

이 시각화 도구를 통해 서로 다른 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 지나는 이차곡선의 방정식은 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ y_1 & (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ y_2 & (x_2)^2 & x_2 & 1 \\ y_3 & (x_3)^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

어떤 유사한 문제도 자유롭게 입력하여 그 결과를 활용할 수 있다. 세 점을 변화시킬 때마다 곡선의 방정식을 구하는 과정이 변화하고 곡선의 방정식이 변화하는 것을 볼 수 있다. 이러한 과정을 통해 다양한 세 점을 지나는 이차곡선의 방정식을 구할 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 다음과 같은 행렬의 행렬식을 구하면 그 행렬식이 세 점을 지나는 곡선의 방정식이 되는 것을 시각적으로 보여준다.

9. 고유값과 고유벡터 (http://math1.skku.ac.kr/pub/732)

이 시각화 도구는 이러한 고유값과 고유벡터의 기하학적 의미를 시각적으로 보여준다. 예를들어 행렬 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

의 고유값과 고유벡터를 구해보면, 고유값 3에 대응하는 고유벡터는 $(1,1)$이고, 고유값 1에 대응하는 고유벡터는 $(1,-1)$이다. 이 고유값과 고유벡터들이 기하적으로 어떠한 의미를 갖는지 살펴보기 위해 원점으로부터 반지름이 1인 원을 향하는 벡터들이 있다고 하고, 이 벡터들에 행렬 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$를 곱해보면 벡터 $(1,1)$은 방향은 같으면서 3배가 된 벡터 $(3,3)$으로 변환되고, 벡터 $(1,-1)$은 방향은 같으면서 1배가 된 벡터 $(1,-1)$으로 변환된다. 즉, $A(1,1)=3(1,1)$이고, $A(1,-1)=1(1,-1)$이다. 즉, 고유벡터는 행렬에 곱할 경우, 그 값이 곱한 벡터의 상수 배인 특수한 벡터이다. 또한 대응하는 고유값은 그 상수임을 알 수 있다.

10. 행렬을 이용한 암호시스템 (http://math1.skku.ac.kr/pub/733)

이 시각화 도구를 통해 행렬을 이용한 암호시스템 과정을 이해하고 직접 실습해 볼 수 있다. 행렬 A^{-1}가 행렬 A의 역행렬일 때, 행렬 A를 이용하여 암호문을 만들고 A^{-1}을 이용하여 그것을 해독하는 방법에 대하여 시각화 하였다. 먼저 A를 암호화하기 위하여 곱해주는 행렬, B를 원래의 전송하는 내용, C를 변조 행렬이라 두고 그리고 암호화 시킬 3×3 행렬을 임의로 정하면, 위 두 식 A, A^{-1}를 이용하면 암호화 시키는 즉, 변조 행렬 $C=AB$ 행렬을 만들 수 있다. 위 내용을 받는 사람은 암호를 풀기 위하여 A의 역행렬이 필요하다. 다시 말하면, $A^{-1}AB=A^{-1}C=B$의 방법으로 해독하면 원래의 전송하는 내용을 얻을 수 있다.

11. 흑백 게임의 선형대수학 (http://math1.skku.ac.kr/pub/734)

흑백 게임은 일부의 바둑알이 뒤집힌 상태로 주어진 조건에서 시작하여, 특정한 바둑알을 선택하면 그 주위의 바둑알의 색이 변하게 되고, 결국에는 모든 바둑알이 같은 색이 되도록 할 수 있는가에 대한 답을 구하는 문제이다. 이 문제에 대한 답을 선형대수학이 줄 수 있다. 선형대수학의 알고리즘을 이용해 만든 이 시각화 도구는 임의로 주어진 흑백 게임에 대해 그에 맞는 해를 제공한다. 어떠한 임의의 흑백 게임이 주어져도 마법사 실행을 누르면 모두 같은 색의 바둑알을 얻을 수 있는 답을 찾아 준다. 즉, 마법사 실행을 누르면 위에 숫자가 나타나고 그 숫자에 해당하는 바둑알을 누르기만 하면 된다.

12. 태극기의 회전 (http://math1.skku.ac.kr/pub/639)

이 시각화 도구는 행렬을 이용한 회전이동을 시각적으로 보여준다. 태극기 모양과 두 개의 스크롤바가 있다. 이 두 개의 스크롤바는 각각 태극의 회전 각도와 괘의 회전 각도에 대응한다. 즉, 하나의 스크롤바는 태극의 회전 각도를 나타내고 다른 하나의 스크롤바는 괘의 회전 각도를 나타낸다.

예를 들어, 태극을 90° 회전시킨다고 한다면 태극의 회전에 해당하는 스크롤바를 90°에 이동시키면 된다. 그러면 태극기가 반시계방향으로 90° 회전한 것을 볼 수 있다. 즉, 원래의 태극모양에 행렬 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$를 곱해 얻어진 모양이다. 따라서 행렬 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$을 원래의 태극모양에 곱하면 θ만큼 회전한 태극모양을 얻을 수 있다.

13. 대칭변환과 정사영변환 (http://math1.skku.ac.kr/pub/598)

이 시각화 도구는 대칭변환과 정사영변환으로 나뉜다. 예를 들어 대칭변환을 살펴보면, 대칭변환은 x축과 이루는 각이 θ인 원점을 지나는 직선으로 대칭시키는 것으로 정의한다. 점 P가 있다. 그리고 이 점 P에 행렬 H_θ

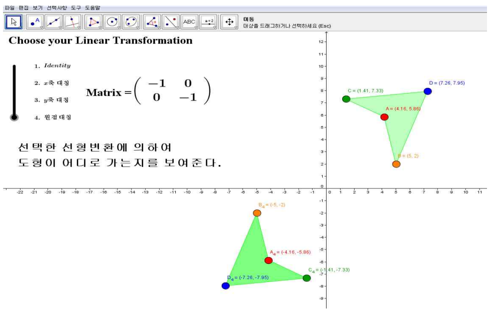
를 곱한 점 P'이 있다.

대칭변환의 표준행렬은 $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$이다. 대칭 변환된 점 P'은 행렬 $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$에 행렬 $P=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$를 곱해 얻어진 점이다. 즉, 이 시각화 도구는 위의 계산과정을 통해 이동된 점이 시각적으로 각이 θ인 원점을 지나는 직선에 의해 대칭 이동된 점이라는 것을 보여준다.

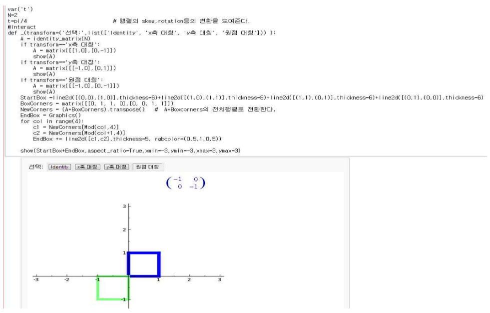
14. 층밀림변환 (http://math1.skku.ac.kr/pub/596)

이 시각화 도구는 오른쪽으로 층밀림, 왼쪽으로 층밀림, 위로 층밀림, 아래로 층밀림으로 나뉜다. 예를 들어 오른쪽 층밀림을 살펴보면, a값을 나타내는 상단의 빨간색 스크롤바의 변화에 따라 행렬이 결정된다. 오른쪽의 도형은 주어진 도형 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$에 행렬 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$를 곱하여 변환된 도형이다. 즉, x축으로는 $x+ay$ (a는 양수)만큼 이동되고 y는 그대로 이므로 오른쪽으로 층이 밀리게 된다.

15. 대칭변환 (http://math1.skku.ac.kr/pub/582)



<그림 8> 대칭변환 (GeoGebra)



<그림 9> 대칭변환 (Sage)

이 시각화 도구는 x축 대칭, y축 대칭, 원점대칭으로 나뉜다. 예를 들어 y축 대칭을 살펴보면, 도형이 2개가 있다. 하나는 처음 주어진 도형이고 다른 하나는 그 도형 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$에 행렬 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$을 곱한 도형으로 나타난다. 즉, x축으로는 $-x$로 이동되고 y는 그대로 이므로 y축으로 대칭 이동된 도형이라고 볼 수 있다.

16. 이미지의 수축 및 팽창 (http://math1.skku.ac.kr/pub/580)

저팔계 모양의 이미지가 있다. 이 이미지를 중점(p,q)을 기준으로 비율 r만큼 수축 또는 팽창 시켜보자. 그 전에 먼저, 이미지가 놓여진 xy-평면을 $z=1$평면이라 가정하자. 즉, 중점은 $(p,q,1)$이 된다. 그러면 이 시각화 도구를 통해 원래의 저팔계 모양에 행렬 $\begin{bmatrix} r & 0 & p(1-r) \\ 0 & r & q(1-r) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$을 곱하여 얻어진 모양이 저팔계를 중점$(p,q,1)$을 기준으로 비율 r만큼 수축 또는 팽창시킨 것이라는 사실을 알 수

있다. 즉, 행렬 $\begin{bmatrix} r & 0 & p(1-r) \\ 0 & r & q(1-r) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 은 원래의 저팔계 도형을 중점$(p,q,1)$을 기준으로 비율 r 만큼 수축 또는 팽창시켜 주는 표준행렬이라는 것을 알 수 있다.

17. 도형의 수축 및 팽창 (http://math1.skku.ac.kr/pub/729)

이 시각화 도구를 이용하여 주어진 빨간색 삼각형을 중점 (p,q)을 기준으로 비율 r만큼 수축 또는 팽창시킬 수 있다. 이 시각화 도구를 통하여 처음 주어진 삼각형에 행렬 $\begin{bmatrix} r & 0 & p(1-r) \\ 0 & r & q(1-r) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$을 곱하여 얻어진 도형이 삼각형을 중점$(p,q,1)$을 기준으로 비율 r만큼 수축 또는 팽창시킨 것이라는 사실을 알 수 있다. 즉, 중점$(p,q,1)$과 비율 r 을 변화시킬 때마다 삼각형이 어떻게 수축 또는 팽창되는지를 시각적으로 관찰할 수 있다.

18. 정사영 (http://math1.skku.ac.kr/pub/539)

벡터 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{a}$ 가 있다. 벡터 $\mathbf{x}$의 $\mathbf{a}$에 의해 생성되는 부분공간위로의 정사영($\mathrm{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x}$)은 시각화 도구를 통해 주어진 초록색 벡터와 같음을 알 수 있다. 즉, $\mathrm{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x} = \dfrac{<\mathbf{x},\mathbf{a}>}{\|\mathbf{a}\|^2}$ 이다. 벡터 $\mathbf{x}$ 와 $\mathbf{a}$ 가 변화시킬 때마다 $\mathrm{proj}_{<\mathbf{a}>}\mathbf{x}$가 어떻게 변화하는지를 직관적으로 살필 수 있다. 이 시각화는 정사영의 식을 통해 계산한 벡터가 시각적으로 벡터 $\mathbf{x}$의 $\mathbf{a}$에 의해 생성되는 부분공간위로의 정사영시킨 벡터라는 것을 보여준다.

19. 최소제곱직선 (http://math1.skku.ac.kr/pub/770)

이 시각화 도구를 통해 최소제곱법(least square)을 이용하여 어떤 직선을 구하면 그 직선이 세 점 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$으로 부터 가장 근사한 직선이라는 것을 알 수 있다. 주어진 세 점을 변화시킬 때마다 세 점으로부터 가장 근사한 직선(최소제곱직선)의 방정식을 구하는 과정이 변화하고 그 직선 또한 변화하는 것을 살펴볼 수 있다. 이러한 과정을 통해 다양한 최소제곱직선을 시각화 할 수 있다. 즉, 이 시각화 도구는 통해 주어진 점으로부터 가장 근사한 직선을 찾는 방법으로 알려진 최소제곱법(least square)을 이용하여 근사직선을 구하는 방법을 알려주고, 그 최소제곱직선이 세 점으로부터 가장 근사한 직선이라는 것을 시각적으로 보여준다.

20. 이차형식 (http://math1.skku.ac.kr/pub/751)

$3x^2+2xy+3y^2-8=0$의 방정식은 $[x\ y]\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=8$과 같이 행렬을 이용한 곱으로 나타낼 수 있다. 그리고 행렬 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$의 고유값이 2, 4 이므로, 행렬의 대각화를 이용하여 새로운 좌표계에 의한 이차곡선의 방정식 $2(x')^2+4(y')^2=8$로 나타낼 수 있다. 이 $x'y'$-축은 xy-축을 시계 반대 방향으로 -45° 만큼 (즉, 시계 방향으로 45° 만큼) 회전한 축이다. 즉, 식 $2(x')^2+4(y')^2=8$는 $x'y'$-축에서의 타원이다. 이 시각화 도구는 이러한 행렬의 대각화를 이용한 축 이동 과정을 시각적으로 보여준다.

21. Fourier 급수 (http://math1.skku.ac.kr/pub/752)

J_N을 $a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 형태의 모든 삼각함수의 다항식(trigono-metric polynomial)들로 이루어진 함수공간 $\mathcal{E}[-\pi,\pi]$의 부분공간이라 놓고 J_N이 $2N+1$개 함수 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, ..., $\cos Nx$, $\sin Nx$들의 일차결합으로 이루어진다는 사실을 이용하여 Fourier 급수를 구하는 과정이 Gram-Schmidt 정규직교화 과정의 응용이라는 것을 보여준다.

위의 과정은 Sage를 이용하여 다음과 같이 실습해 볼 수 있다. 우선 함수의 정사영, 즉 삼각함수다항식을 구하기 위해서 함수 하나를 선언한다. 이어서 아래 주소에서 Sage 로고 를 클릭하면 작업창이 생긴다. 여기 제공된 상자안의 Sage 명령어들을 하나의 창 안에 모두 입력하고 클릭하면 단계별 과정 없이 바로 종합적인 결과를 확인할 수 있다.

http://math1.skku.ac.kr/home/pub/641

```
def Get_JN(f, N):
```

이 함수는 J_N을 직접 구하여, 주어진 함수에 제일 가까운 삼각함수다항식(trigonometric polynomial)을 찾는 함수이다. 예제에 나온 대로, $[-\pi, \pi]$상에서 $f(x)=x$가 주어질 때 f에서 J_4으로의 정사영 p를 찾는 명령은 앞의 Get_JN 함수를 이용하여, 다음과 같이 입력하면 된다.

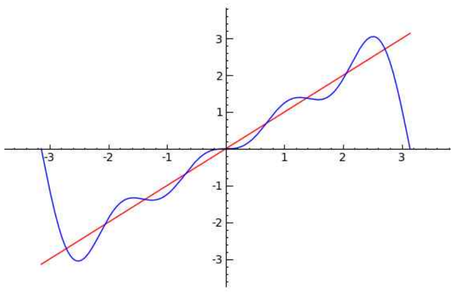
```
f = x;
p4 = Get_JN(f, 4);
```

이 다항식을 확인해보면 다음과 같다.

```
print (p4)  #  -sin(2*x) + 2/3*sin(3*x) - 1/2*sin(4*x) + 2*sin(x)
```

원래 함수인 $f(x)=x$와 그림으로 직접 비교해보면 다음과 같다.

```
pl4 = plot(f, -pi, pi, rgbcolor='red')
pl4 += plot(p4, -pi, pi, rgbcolor='blue')
pl4.show()
```

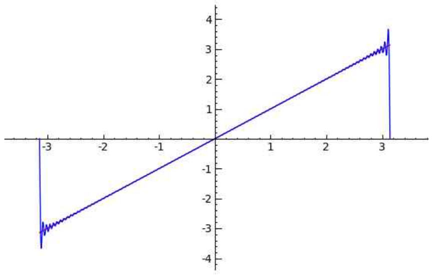


<그림 10> 함수$f(x)=x$(빨간색)와 J_4에서의 정사영 $p(x)$(파란색)의 그래프

함수의 정사영은 원래 함수에 수렴하는 형태를 보여준다. 이것이 바로 Fourier 계수의 성질이며, 임의로 주어진 함수에 가장 접근하는 계수들을 확인하는 방법으로 활용될 수 있다. 앞에서는 J_4에 대한 수렴이었기 때문에, 4개의 Fourier 계수만을 가지고 해당 식을 나타내었다. 만일 이 계수가 증가한다면 원래의 함수에 가까운 결과를 얻을 수 있다. 손으로 계산하기에는 어려운 계산식이지만 Sage를 이용하면 수렴함수를 쉽게 구할 수 있다.

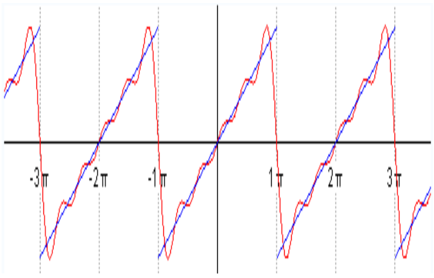
```
p100 = Get_JN(f, 100);
```

```
pl100 = plot(f, -pi, pi, rgbcolor='red')
pl100 += plot(p100, -pi, pi, rgbcolor='blue')
pl100.show()
```

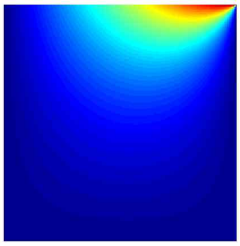


<그림 11> 함수 $f(x)=x$(빨간색)와 J_{100}에서의 정사영 $p(x)$(파란색)의 그래프

따라서 이러한 Fourier 계수에 의한 함수는 다양한 전기 파형에 가까운 모델들을 수학적 다항식으로 나타내는 데 결정적인 역할을 한다. 주기적으로 반복되지만, 연속함수가 아닌 함수를 연속함수로 나타내어, 연산에 문제가 없도록 하는 이러한 작업에 Fourier 계수는 매우 결정적인 역할을 함으로써, 공학에서 널리 사용된다.



<그림 12> 톱날형태의 신호파형에 대한 Fourier 계수의 전개모델



<그림 13> Fourier 계수를 이용한 열전달모델의 그래픽표현

선형대수학의 교육에서 위와 같은 내용은 판서만을 이용한 교수학습과정에서는 다루기 까다로운 부분이지만 인터넷이 연결된 현재의 대학 강의실에서는 제공한 웹 주소에 들어가서 명령어를 복사한 후 클릭하는 것만으로도 모두 시각화가 가능하다.

22. Jordan 표준형 (http://math1.skku.ac.kr/pub/773)

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<그림 14> Jordan 표준형

행렬의 대각화는 복잡한 행렬 계산 과정을 단순화하여 편리한 이론의 전개와 빠른 계산 방법을 제시해준다. 따라서 행렬의 대각화는 수학적 모델로 구성된 현실세계의 문제를 해결하는 데 매우 중요하다. 하지만 모든 행렬이 대각화 가능하지는 않다. 그 대각화 가능하지 않는 행렬이라도 대각행렬과 유사한 행렬인 Jordan 표준형과 닮음이 되도록 만들 수 있다. 주어진 시각화 도구를 통해 Jordan 표준형 J_A와 닮음행렬 P을 구하고 그의 역행

렬을 구해 닮음관계를 살펴볼 수 있다.

<표 1> 추가된 선형대수학 개념들의 시각화 도구명과 QR코드

선형 연립방정식	역행렬 (inverse)	Curve Fitting	고유값과 고유벡터	행렬을 이용한 암호시스템
흑백 게임의 선형대수학	대칭변환과 정사영변환	이차형식	Fourier 급수	Jordan 표준형

본 연구의 의미는 선형대수학의 개념들을 지도할 때 필요한 시각적 이해를 돕는 자료의 개발과 그것들을 이용한 내용을 보고하는데서 더 나아가, 실제 수학의 한 강좌에 필요한 대부분의 CAS 도구와 명령어를 개발하여 유사한 강좌를 강의하는 모든 교수자와 공유할 수 있도록 한 것이다. 그 내용은 본 연구에서 소개한 자료를 모아 공유하는 아래 웹 주소를 이용하면 된다.

http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/LA-sage-Geogebra.htm

Ⅳ. 결 론

본 연구에서 개발한 선형대수학의 시각화 도구와 QR코드를 위와 같이 소개했다. GeoGebra는 단순대수계산이 가능하면서도 기하적 표현을 구현하는데 뛰어나다. 그러나 선형대수학의 개념들을 모두 표현하기에는 부족함이 있어, 이 부분을 Sage를 활용하여 해결하였다. 이로써 본 연구에서는 대수적 계산 및 시각화의 도구로 Sage와 기하적 시각화의 도구로 GeoGebra를 이용하여 가능한 대부분의 선형대수학 개념들을 주어진 교재의 순서에 따라 모두 시각화하였다. 즉, 선형대수학 강좌에 대한 전체적인 CAS (Computer Algebra System) 도구를 완성하였다. 그리고 이를 대학의 현장수업에 실제 활용하였고 적극 활용한 결과 아래와 같은 긍정적인 효과를 얻을 수 있었다. 몇 가지 예를 들면 다음과 같다.

http://www.youtube.com/watch?v=BC9qeR0JWis

위의 웹 주소는 학생들이 '정사영 정리'와 '최적근사와 최소 제곱해'에 관한 연습문제를 풀이한 동영상이다. 이 동영상 자료를 통해 학생들은 선형대수학 입문 강좌에서 공학적 도구를 활용한 시각화 도구를 이용하여 정사영의 개념을 제대로 이해할 수 있었고 그 정사영 정리를 바탕으로 최적근사정리까지도 쉽게 이해할 수 있었다는 사실을 알 수 있다. 따라서 학생들은 그와 관련된 연습문제들도 어렵지 않게 풀어낼 수 있었고 그 자료들을 직

접 발표도 할 수 있었던 것이다. 뿐만 아니라 학생들은 최소 제곱 해를 구하는 문제에서 공학적 도구인 'Sage'를 활용함으로써 계산의 시간을 줄여 주어진 시간에 효율적으로 더 많은 문제들을 풀어낼 수 있었다. 이어서 <그림 14>의 Jordan 표준형을 보자. 이와 같은 8×8크기 이상의 행렬은 손으로 직접 계산하기에는 다소 무리가 있다. 하지만 학생들은 이 역시 'Sage'를 적극 활용하여 Jordan 표준형의 개념을 이해하고 크기가 큰 행렬의 문제를 쉽게 계산하였다. 즉, 손으로 해결하기 어려운 그와 관련된 다양한 연습문제들도 쉽게 풀 수 있었다. 그 동영상 자료의 웹 주소는 다음과 같다

http://www.youtube.com/watch?v=adWzUKKmO2k

그 뿐만이 아니라 본 연구에서 개발한 자료를 선형대수학 입문 강좌에서 적극 활용한 결과 학생들은 선형대수학 교재의 모든 연습문제를 어려움 없이 다 풀어 낼 수 있었다. 관련된 자료는 다음 웹 주소에서 확인할 수 있다.

http://matrix.skku.ac.kr/2012-album/2012-LA-Lectures.htm

우리는 대수적인 계산할 때에는 Sage를 사용하고 기하적인 내용을 다룰 때에서는 GeoGebra를 활용할 수 있는 효과적인 방안을 모색하였다. 그리고 시각적인 자료가 단순히 이해를 위한 보조물이 될 수 있는 것에 대비해 시각적인 대상에 해당하는 수학적 이론을 담은 (강의노트와 동영상)자료를 시각적인 대상과 함께 제공하였다. 이로써 시각적인 대상을 깊게 탐구하고 새로운 시각적인 대상을 창출할 수 있는 환경을 제공하였다. 또한 Sage와 GeoGebra를 이용한 수학적 시각화의 사용은 대학수학교육, 특히 선형대수학의 교수학습과정에 효과적으로 적용 가능함을 확인하였다.

참 고 문 헌

고래영・김덕선・박진영・이상구 (2009). 모바일 환경에서의 Sage-Math의 개발과 선형대수학에서의 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 23(4), 1023-1041.

고윤아 (2011). GeoGebra를 활용한 로그함수단원의 지도방안 연구, 한국외국어대학교 대학원 석사학위 논문.

김덕선・이상구・정경훈 (2007). 시각화를 이용한 선형대수학 교수학습모델, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, , 21(4), 621-646.

김덕선・박진영・이상구 (2008). 21세기 선진형 ICT 수학 교육 방법론 모델, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 22(4), 533-543.

류희찬・이지요 (1993). 수학교육에서의 시각화의 중요성과 LOGO, Journal of Korean Society of Educational Studies in Mathematics, 3(1), 75-85.

문광호・우정호 (1999). 중.고등학교 수학의 시각화, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 1(1), 135-156.

한세호 ・ 장경윤 (2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 11(3), 527-546.

Hohenwarter, Markus, Preiner, Judith & Yi, Taeil (2007). *Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level.* Proceedings of ICTCM 2007.

Macnab, John S., Phillips, Linda M. & Norris, Stephen P. (2012). *Visualizations and Visualization in Mathematics Education.* Reading for Evidence and Interpreting Visualizations in Mathematics and Science Education, 103-122.

Visualization of Linear Algebra concepts with Sage and GeoGebra

Sang-Gu Lee†
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : sglee@skku.edu

Ji-Eun Jang
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : jieun0426@skku.edu

Kyung-Won Kim
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : kwkim@skku.edu

This work started with recent students' conception on Linear Algebra. We were trying to help their understanding of Linear Algebra concepts by adding visualization tools. To accomplish this, we have developed most of needed tools for teaching of Linear Algebra class. Visualizing concepts of Linear Algebra is not only an aid for understanding but also arouses students' interest on the subject for a better comprehension, which further helps the students to play with them for self-discovery. Therefore, visualizing data should be prepared thoroughly rather than just merely understanding on static pictures as a special circumstance when we would study visual object. By doing this, we carefully selected GeoGebra which is suitable for dynamic visualizing and Sage for algebraic computations. We discovered that this combination is proper for visualizing to be embodied and gave a variety of visualizing data for undergraduate mathematics classes. We utilized GeoGebra and Sage for dynamic visualizing and tools used for algebraic calculation as creating a new kind of visual object for university math classes.

We visualized important concepts of Linear Algebra as much as we can according to the order of the textbook. We offered static visual data for understanding and studied visual object and further prepared a circumstance that could create new knowledge. We found that our experience on visualizations in Linear Algebra using Sage and GeoGebra to our class can be effectively adopted to other university math classes. It is expected that this contribution has a positive effect for school math education as well as the other lectures in university. [2)]

* ZDM classification : N85, U55, U65
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B40, 97C80, 97U50, 97U70
* Key Words : Mathematics Education, Visualization, Geogebra, Sage, Linear Algebra
* This paper was supported by 63 Research Fund, Sungkyunkwan University, 2012
† Corresponding author