Trans. Korean Soc. Mech. Eng. B, Vol. 37, No. 6, pp. 591~597, 2013

<학술논문> DOI http://dx.doi.org/10.3795/KSME-B.2013.37.6.591 ISSN 1226-4881

급축소-확대관에서 비뉴턴유체의 유동 특성에 관한 수치적 연구

김 형 민*†
* 경기대학교 기계시스템공학과

Numerical Study of Non-Newtonian Flow Characteristics in Sudden Contraction-Expansion Channel

Hyung Min Kim*†
Dept. of Mechanical System Engineering, Kyonggi Univ.

(Received December 3, 2012 ; Revised March 19, 2013 ; Accepted March 22, 2013)

Key Words: Lattice Boltzmann Method(격자볼쯔만법), Sudden Contraction(급축소), Non-Newtonian Fluid(비뉴턴유체), Hydro-Kinetic Model(수력동역학적모델)

초록: 대부분의 비뉴턴 유체 모델의 경우 격자볼쯔만 법을 이용한 3차원 유동해석에 효율적으로 적용하기 어려운 문제점을 가지고 있다. 이 연구에서는 이를 해결하기 위해 개발된 격자볼쯔만법 전용 비뉴턴 유체 모델인 Hydro-Kinetic 모델을 3차원 격자볼쯔만법 해석에 적용할 수 있도록 수정하고 이를 3차원 급축소 및 급확대 유동에 적용하여 얻은 결과를 통해서 강한 전단유동장에서 HK모델 유체의 거동을 분석하였다. HK모델은 변형률과 완화시간과의 관계를 나타낸 모델로 강한 전단유동장에서 국소적으로 큰 변형률이 발생하는 경우 완화시간이 급격하게 감소하여 해석이 불안정해지는 경향이 있어 격자볼쯔만법 해석안정성을 확보하기 위해서는 HK모델의 인수 Γ와 완화시간을 일정한 구간에서 변화하도록 제한할 필요가 있다.

Abstract: Because most existing non-Newtonian models are not suitable for application to the lattice Boltzmann method, theoretical and numerical studies in this regard remain challenging. In this study, the hydrokinetic (HK) model was modified and applied to a 3D sudden contraction-expansion channel flow, and the characteristics of the HK model flow were evaluated to generate non-trivial predictions in three-dimensional strong shear flows. The HK model is very efficient for application to the lattice Boltzmann method because it utilizes the shear rate and relaxation time. However, the simulation would be unstable in a high shear flow field because the local relaxation time sharply decreases with an increase in the shear rate in a strong shear flow field. In the HK model, it may become necessary to truncate the relaxation time and non-dimensional parameter to obtain stable numerical results.

1. 서 론

격자볼쯔만법(Lattice Boltzmann Method)이 개발된 1988년 이 후 비압축성 뉴턴유체의 유동해석에 적용되어 많은 연구가 현재까지 수행되고 있다.[1~3] 특히 이 해석법은 전산유체역학에서 일반적으로 이용하고 있는 수치기법에 비해 단순하고 해석코드의 작성이 상대적으로 쉬워 다상 및 다종의 물질이 혼합되어 있는 복잡한 유동해석에서 많이 적용되고 있다.[4]

이 해석법은 연속방정식 및 나비아스토크방정식과 같이 연속체역학을 기반으로 하는 보존방정식으로부터 압력과 속도 분포를 구하는 일반적인 방법과 달리, 입자분포함수의 통계적 확산을 해석하고 이 분포함수로부터 압력과 속도를 계산한다. 또한 속도구배를 계산한 후 계산할 수 있는 국소응력텐서를 속도구배 계산과정 없이 분포함수로부터 직접 계산할 수 있는 장점을 가지고 있어 상대적으로 복잡한 물리적인 현상이 복합된 다중물리현상해석에 유용하게 활용되고 있다.

특히 눗센수가 0.01보다 큰 마이크로규모 해석에서 일반적인 연속체역학 기반의 지배방정식의 해석보다는 격자볼쯔만법을 이용하는 것이 상대적으로 높은 해석정밀도를 가지고 있다고 알려져

† Corresponding Author, pius@kgu.ac.kr
© 2013 The Korean Society of Mechanical Engineers

있어 마이크 및 나노영역에 격자볼쯔만법을 이용한 연구[5]가 활발하게 진행되고 있다. 한편 좁은 혈관을 유동하는 혈류, 희박기체 및 입자흐름해석은 유체의 변형률에 따른 점성계수가 비선형적인 특성을 가진 비뉴턴유체의 마이크로 유동영역으로, 이 해석에 격자볼쯔만법을 이용하기 위해서는 기존의 전단변형률에 따른 점성계수의 변화를 표현한 비뉴턴유체모델 보다는 전단변형률에 따른 완화시간의 변화를 나타낸 비뉴턴유체 모델을 적용하는 것이 보다 효율적이라고 할 수 있다.

Gabbanelli[6]는 격자볼쯔만 해석에서 전단희박(Shear thinning)을 포함한 전단변형률에 따른 점성모델을 소개한 이래로 강한 비선형성과 탄성적 거동을 보다 정확하게 모사할 수 있으며 격자볼쯔만법에 적용이 용이한 비뉴턴유체 모델의 개발에 도전하고 있다. 또한 Yakot[7]은 "열역학적 평형상태로 이르는 완화과정은 Bogoliubov의 위계에 따른 완화시간으로 그 현상을 정확하게 기술할 수 있다."는 가정을 기반으로 변형률과 완화시간의 관계를 기술한 HK모델 (Hydro-Kinetic model)을 소개 하였고 Kim[8]과 Kim[9]은 이 모델을 격자볼쯔만법에 적용하였으며 특히 Kim[9]은 2차원 4:1 급축소관 유동해석을 통해 HK모델 유체의 2차원 유동특성을 분석하였다.

이 연구에서는 HK모델을 3차원 급 축소 및 급 확대관 유동해석에 적용하여 급 축소와 급 확대관 유동장에서 HK모델의 인수변화에 따른 HK모델 유체의 거동을 분석하고 이 분석결과를 통해 HK모델을 적용한 3차원 격자볼쯔만법의 해석 안정성을 확보하기 위한 제한조건 등을 제시하는 것에 그 목적을 두고 있다.

2. 수치해석법

2.1 격자볼쯔만법

격자볼쯔만법은 볼쯔만수송방정식 (Boltzamnn transport equation : BTE)의 충돌항을 BGK (Bhantnarar-Gros-Krook)가 제한한 단일완화시간으로 단순화한 볼쯔만방정식을 이산화하여 입자분포함수의 확산을 모사하는 방법으로 지배방정식은 식 (1)과 같다.

$$f_i(x+c_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(x,t) - \frac{\Delta t}{\tau}\left[f_i(x,t) - f_i^{eq}(x,t)\right] \quad (1)$$

여기서 i는 이산방향으로 3차원의 경우 19 또는 27개의 방향을 설정할 수 있으며 이 연구에서는 19개의 방향을 가지고 있는 D3Q19모델을 선택하였다. $f_i^{eq}(x,t)$는 i방향의 평형상태 입자분포함수로 식 (2)와 같다.

$$f_i^{eq} = \omega_i\rho\left(1 + \frac{3c_{i\alpha}u_\alpha}{c_s^2} + \frac{9(c_{i\alpha}u_\alpha)^2}{2c_s^4} - \frac{3(u_{i\alpha})^2}{2}\right) \quad (2)$$

$$\omega_i = 1/3\,(i=0),$$
$$\omega_i = 1/18\,(i=1,2,\ldots,5,6)$$
$$\omega_i = 1/36\,(i=7,8,\ldots,17,18)$$

여기서 $c_{i\alpha}$는 i방향의 이산속도이며 D3Q19모델의 상수 $c_s^2 = 1/3$이다. 입자분포함수(f_i)와 유동속도(u_α), 밀도(ρ)와 같은 거시적물성은 식 (3)과 같은 관계를 가지고 있다.

$$\rho(x,t) = \sum_{i=0}^{N} f_i, \quad \rho u_\alpha(x,t) = \sum_{i=0}^{N} c_{i\alpha} f_i \quad (3)$$

격자볼쯔만법의 해석에 적용할 수 있는 여러 가지 경계조건 중 이 연구에서는 벽면에서 점착조건을 구현할 수 있는 입자밀도함수의 Bounceback 조건과 입구와 출구 경계에서 입자분포함수로 주어진 속도분포와 압력 값을 구현할 수 있는 Zou와 He[10]가 제안한 경계조건 적용방법을 이용하였다.

2.2 HK모델

격자볼쯔만방정식을 Chanpman-Enskog법[11]으로 확장하여 각 차수에 따라 정리하면 연속방정식과 비압축성유체의 나비아스토크방정식을 유도할 수 있으며 이 과정에서 식 (4)와 같은 동점성계수(ν)와 완화시간과의 관계를 얻을 수 있다.

$$\nu = \frac{2\tau_o - 1}{6} \quad (4)$$

여기서 τ_o는 유동의 완화시간이다.

전단유동의 비선형적 유변상태방정식은 열역학적 평형상태로 진행하는 완화과정의 특성을 나타내는 Bogolubov 위계를 바탕으로 한 수정된 운동방정식으로부터 유도할 수 있으며 이와 같은 가정을 기반으로 한 국소완화시간(τ)과 변형률사이의 관계를 나타낸 HK모델은 식 (5)와 같다.

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{\tau_o^2} + \Gamma\left(\frac{\dot{\gamma}}{\tau_o}\right)^2} \quad (5)$$

여기서 $\dot{\gamma}$는 변형률로 이를 변형률텐서의 2차 불

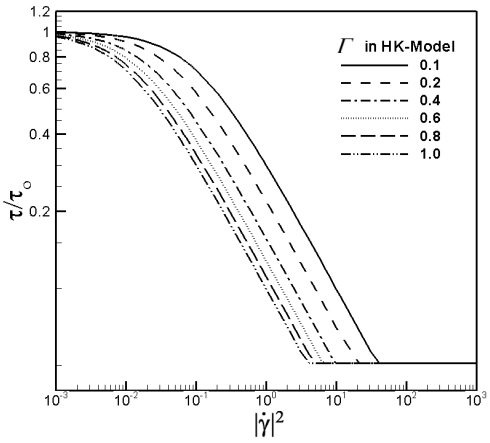

Fig. 1 The variation of the local relaxation time with the change of the strain rate of the HK-model

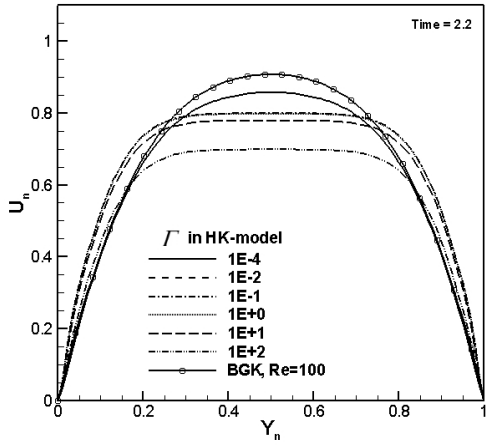

Fig. 2 Comparison of the velocity profiles of Newtonian and the HK-model flows in 3D square channel

변량 (Π_{II})으로부터 정의하면 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\Pi_{II}}, \qquad \Pi_{II} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \tag{6}$$

격자볼쯔만법에서 국속응력텐서는 식 (7)에서 보는 바와 같이 속도와 속도구배의 계산과정 없이 입자분포함수로부터 직접 계산할 수 있다.

$$S_{\alpha\beta} = -\frac{3}{2\tau} \sum_i f_i^{ne} C_{i\alpha} C_{i\beta} \tag{7}$$

여기서 f_i^{ne}는 식 (1)의 입자분포함수 f_i에서 평형상태의 입자분포함수를 뺀, 비평형상태의 입자분포함수이다.

HK모델의 무차원 인수 Γ와 변형률의 변화에 따른 완화시간의 변화는 Fig. 1에서 보는 바와 같으며, 이 HK모델은 급 축소 및 급 확대관과 같은 강한 전단유동장에서 변형률이 증가함에 따라 완화시간이 급격하게 감소하는 경향이 있어 이를 그대로 격자볼쯔만해석에 이용하는 경우 해석의 안정성을 확보하기 어려운 단점을 가지고 있다. 특히 격자볼쯔만법에서 유동의 완화시간이 작아져 0.5에 근접할수록 레이놀즈수가 큰 난류유동으로 천이되지만 0.5이하가 될 때 수학적으로 음의 동점성계수를 갖게 되어 점성유동이라는 물리적인 의미를 상실할 뿐만 아니라 해석이 불안정해 진다. 또한 완화시간이 켜져 20이상이 되는 경우 유동은 점성력이 지배적인 클리핑 유동특성을 가지게 되어 이 상태 역시 안정적인 해석을 유지하기 어렵다.[(2),(3)] 따라서 전단변형률에 따른 완화시간을 국소적으로 계산하여 적용하는 HK모델에서도 완화시간의 변화 폭을 (0.5, 20)으로 제한하여야 해석안정성을 확보할 수 있다.

3. 해석결과

3.1 사각형 덕트 유동해석

HK모델 유체와 뉴턴유체의 유동특성의 차이를 비교하기 위하여 3차원 사각형 덕트에서 입구와 출구사이의 일정한 압력차를 유지하는 Poiseuille 유동해석을 수행하였다. 정사각형 단면과 단면 한 변의 3배 길이를 가진 덕트를 계산영역으로 정하였으며 이 영역에 ($299 \times 96 \times 96$) 개의 정사각형 격자를 구성하여 해석을 수행하였다.

경계조건으로 덕트 벽면에는 Bounceback 조건을 적용하여 점착을 구현하였으며, 입구에는 일정한 압력구배에 의한 완전히 발달한 정사각형단면의 속도분포조건을 그리고 출구에는 일정한 압력 조건을 구현하기 위하여 Zou와 He[(10)]가 제안한 경계조건을 적용하였다.

레이놀즈수가 100인 정사각형 단면의 덕트에서 HK모델의 Γ의 변화에 따른 유동의 변화를 비교한 것이 Fig. 2이다. 덕트의 입구로부터 2.8 떨어진 출구에 근접한 단면의 중심에서 Γ의 변화에 따른 속도분포와 뉴턴유체의 속도분포를 비교했다. HK모델 유체의 최대 속도는 Γ가 커질수록 감소하며 덕트 중앙에서 속도가 일정한 구간이 넓어지고 벽 근처에서 큰 속도구배를 갖는 것을 볼 수 있다. 이는 기존의 비뉴턴유체모델에서 나타나는 전단희박효과와 같으며, HK모델에서는 Γ

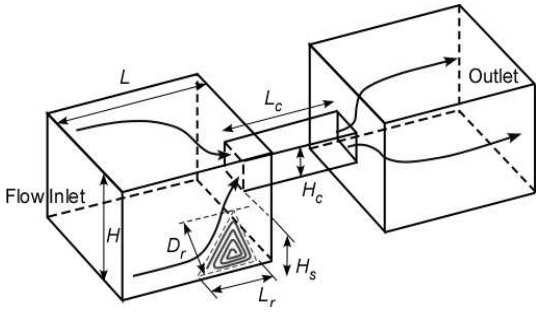

Fig. 3 Schematic view of 3-D contraction and expansion duct and the description of the circulation region at the corner

를 이용하여 전단희박효과를 조절할 수 있음을 확인할 수 있다.

3.2 급축소, 확대관 유동해석

비뉴턴유체는 국소전단변형률에 따라 점성계수가 변화하는 특성을 가지고 있는 유체로, HK모델 유체의 유동 특성을 분석하기 위해서 강한 전단변형률을 갖는 급 축소관과 확대관을 유동장으로 선택하였다. 이 연구에서는 Fig. 3에서 보는 바와 같이 입구의 단면의 한 변의 길이(H)가 4:1로 축소된 후 다시 1:4로 확대되는 급 축소와 확대가 연결된 관을 계산영역으로 선정하였으며, 전체 유동장의 길이는 $3H$로 고정하였다.

계산영역의 격자는 정육면체 형상의 격자를 한 변에 96개를 구성하고 이를 중심으로 길이 비에 따라 같은 비율로 격자를 구성하여 전체 길이 방향으로는 총 288개의 격자를 구성하였다.

유동장의 입구에서 급 축소관까지의 거리가 상대적으로 짧아 입구에서 속도경계조건으로 사각형덕트의 완전히 발달한 속도분포[11]를 적용하였고, 출구에는 압력이 일정한 출구경계조건을 설정하였으며 여기서도 Zou와 He가 제안한 경계조건 적용방법을 이용하였다. 또한 덕트의 모든 벽면에서는 점착을 유도하기 위한 Bounceback조건을 경계조건으로 적용하였다.

HK모델의 Γ는 국소완화시간과 전단변형률의 관계를 제어할 수 있는 인수로 이 인수의 변화에 따른 급 축소영역과 급 확대영역에서 유동특성을 분석하기 위하여 레이놀즈 수를 1로 고정하고 Γ를 0.1과 1.0 사이에서 변화시켜 해석을 수행하였다.

Fig. 4는 Γ의 변화에 따라 급 축소와 급 확대

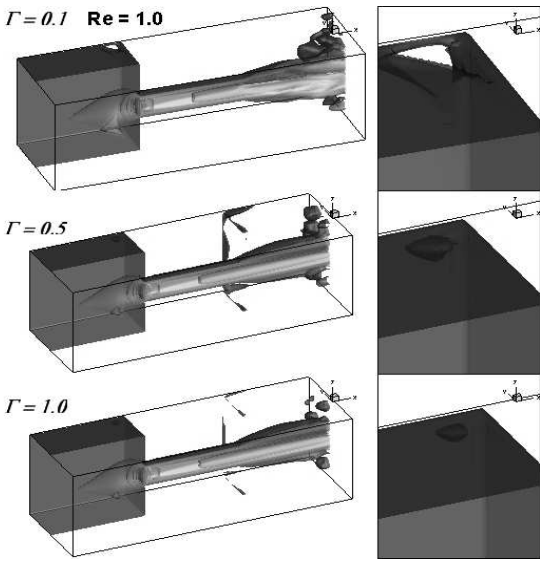

Fig. 4 Iso-surface plot of the stream direction velocity at Re=1.0 with variations of Γ of the HK-model and the circulation region at the corner

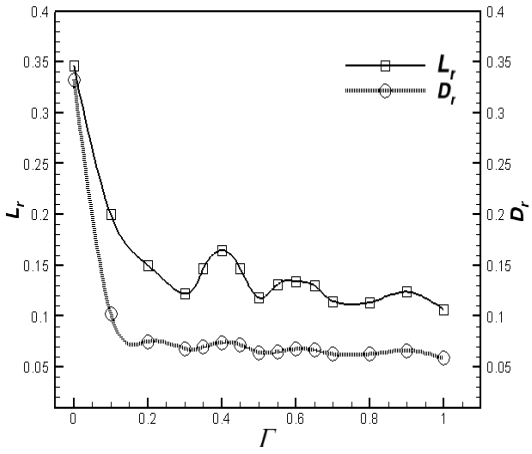

Fig. 5 The variation of L_r and D_r of the circulation region at the corner with the change of Γ in the HK-model

관 전체 영역에 대한 흐름방향속도의 등속도면도이다. Γ가 커짐에 따라 축소관 입구 근처 모서리 영역에 형성된 와류영역의 크기가 감소하는 것을 볼 수 있다. 또한 축소관에서 확대관 영역으로 유입될 때 HK모델 유체는 뉴턴유체와 달리 유동이 사방으로 확산되지 않고 축소관의 단면 넓이를 유지하며 흘러가는 것을 볼 수 있다.

전단희박효과를 정량적으로 분석하기 위하여 Γ의 변화에 따른 급 축소관 유입 직전의 모서리 영역에 형성된 와류영역의 크기, 즉 Fig. 3에 나타낸 와류의 길이 L_r과 와류의 대각선길이 D_r의

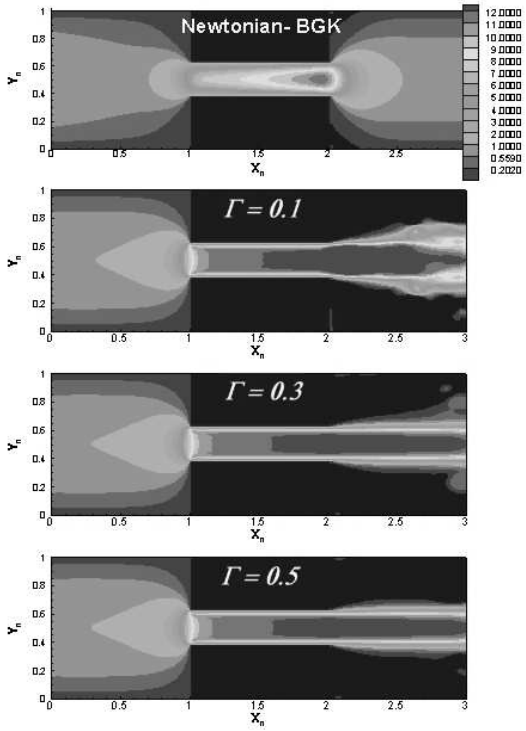

Fig. 6 Stream wise direction velocity distribution with various Γ in the HK-model and Newtonian BGK model flow

변화를 Fig. 5에 나타냈다. Γ값이 커짐에 따라 L_r과 D_r 모두 전반적으로 감소하고 있지만 L_r은 Γ가 커짐에 따라 감소하다가 $\Gamma = 0.3$ 이 후부터 길이가 일정한 주기로 진동하며 점진적으로 짧아지는 특성을 갖는 것으로 나타났다.

Fig. 6은 레이놀즈수가 1인 유동장 중심 단면에서 흐름방향 속도분포를 나타낸 그림이다. 뉴턴유체의 경우 확대관에 유입된 후 폭 방향으로 퍼지면서 흐르는 전형적인 뉴턴유체의 특성을 보이는 반면에 HK모델 유체의 경우 Γ값이 커짐에 따라 폭 방향으로 퍼지는 정도가 급격하게 감소되는 것을 볼 수 있다. 이는 축소관에서 확대관으로 유출할 때 축소관의 벽면에서 발생되는 큰 전단변형률과 국소완화시간의 급격한 감소로 인한 전단희박 효과에 대한 결과로 판단된다.

축소관의 벽면에서 발생되는 강한 전단변형률에 의한 유동의 특성을 확인하기 위하여 축소관과 확대관의 연결부 근처 단면에서 뉴턴유체와 HK모델 유체의 거동을 Fig. 7에서 비교하였다. 축소관의 벽면 모서리에서 발생한 전단변형률에 따른 확대관에서의 유동의 변화를 비교하기 위하여 축소관 출구로부터 0.1 떨어진 $x = 2.1$ 단면을

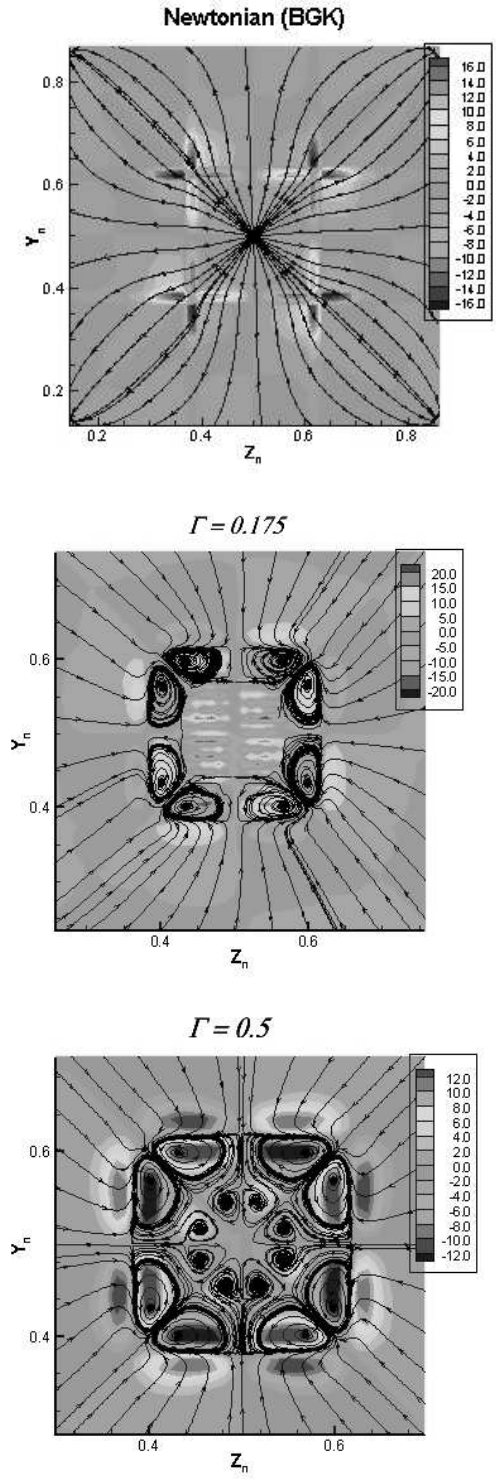

Fig. 7 Comparison the Vorticity distributions and streamlines of the Newtonian flow with the HK-model flow at x=2.1 cross section

선택하였고 이 단면에서 뉴턴유체와 HK모델의 인수 Γ가 0.175, 0.5일 때 와도분포와 유선을 그려 비교한 것인 Fig. 7이다.

확대관으로 유입된 뉴턴유체는 폭 방향으로 강하게 퍼져 흐르는 것을 볼 수 있으며 축소관의 벽면 모서리에서 와도가 형성되지만 모서리 영역에 국한되어 있고, 강한 와류를 형성시키지는 못한다. 반면에 HK모델 유체는 축소관 벽면 경계를 중심으로 바깥영역에서는 폭 방향으로 퍼지면서 흐르지만 안쪽에서는 폭 방향으로 퍼져 흐르지 못하고 와류의 강도를 그대로 유지하면서 흘러가는 것을 볼 수 있다. 또한 이 와류에 의해 모서리 안쪽영역에 2차 와류가 형성되는 것을 볼 수 있으며 이는 Γ가 커질수록 이 2차 와류는 강해지고 그 영역이 넓어지는 특성을 갖는 것으로 확인되었다.

4. 결 론

열역학적 평형상태로 이르는 완화과정과 완화시간과의 관계를 바탕으로 개발된 Hydro-Kinetic 비뉴턴유체 모델은 전단변형률과 완화시간과의 관계를 나타내고 있어 다른 비뉴턴유체 모델에 비해 격자볼쯔만법에 적용이 용이하다는 장점을 가지고 있다. 이는 속도구배의 계산 없이 국소전단변형률을 계산할 수 있는 격자볼쯔만법의 장점과 함께 격자볼쯔만법을 비뉴턴유체 유동해석 영역으로 확대하는데 기여할 수 있는 모델로 평가할 수 있다.

이 연구에서는 격자볼쯔만법에 HK모델을 적용하여 3차원 급 축소 및 확대관 유동장에서 비뉴턴유체의 유동 해석을 수행하여 그 특성을 분석하였다. HK모델은 전단변형률의 변화에 따라 완화시간이 급격하게 변화하는 특성을 가지고 있어, 급 축소 및 확대관처럼 강한 전단변형률을 갖는 유동에서 격자볼쯔만법의 해석안정성을 확보하기 위하여 HK모델의 국소완화시간을 $0.5 < \tau < 20.0$으로 제한하였고 급 축소 관과 같은 강한 전단유동장에서 HK모델 유체의 Γ 범위를 (0.1, 10)으로 제한한다.

이 범위 안에서 Γ가 커짐에 따라 축소 관 입구 모서리에 형성되는 와류영역의 작아지는 유동특성을 통해 전단희박효과를 확인하였다.

급 확대관에서도 Γ가 커짐에 따라 폭 방향으로 확산이 급격히 감소하는 유동특성을 가지며 축소관의 벽면 모서리 영역에서 형성된 와류는 급 확대관으로 유출된 후에도 와류 형상과 크기를 그대로 유지하면서 흘러가는 특성을 갖는다. 또한 Γ가 커짐에 따라 축소관 모서리 경계의 안쪽에 2차 와류가 강하게 형성되는 특성을 가지며 이런 유동특성은 점탄성 유동에서 나타나는 현상으로 판단되며 이와 관련하여서는 차후에 진행될 연구에서 보다 깊이 있게 다루어질 것이다.

후 기

본 연구는 2012학년도 경기대학교 학술연구비(일반연구과제) 지원에 의하여 수행되었음

참고문헌

(1) Wofl-Galadrow, D., 2000, “Lattice Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Medels: An Introduction,” Springer-Verlag, Berlin,

(2) Succi, S., 2001, “Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond,” Oxford university press.

(3) Chen, S. and Doolen, G., 1998, “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flow,” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 30, pp.329~364.

(4) Shan, X. and Chen, H.,“Lattice Boltzmann Model for Simulating Flows with Multiple Phases and Components,” *Phys. Rev. E.*, Vol. 47, pp 1815~1819.

(5) Zhang, J., 2010, “Lattice Boltzmann Method for Microfluidics: Models and Applications,” Microfluidics and Nanofluidics, Vol.10, pp.1-28.

(6) Gabbanelli, S., Drazer, G. and Koplik, J., 2005, “Lattice Boltzmann Method for Non-Newtonian (Power-law) Fluid,” *Phys. Rev. E.* Vol. 72, 046312

(7) Yakhot, V., Wanderer, J. and Chen, H., 2006, “Generalized Boltzmann Equation : Slip-No-Slip Dynamic Transition in Flows of Strongly Non-Linear Fluids,” *Physica A*, Vol. 362, pp146~150.

(8) Kim, W.T., Chen, H. and Jhon, M.S., 2006, “Viscoelastic Liquid Bearing Modeling via Lattice Boltzmann Method,” *J. App. Phys.*, Vol. 99, 08N106

(9) Kim, H.M, Kang J.H. and Jhon, M.S. 2011, “Hydro-Kinetic Approach in Non-Newtonian Lattice Boltzmann Flow Simulation,” *JKPS*, Vol. 58. No. 3, pp. 444~447.

(10) Zou, Q. and He, X., 1997, “On Pressure and

Velocity Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK Model," *Phys. Fluids*, Vol.9, No. 6, pp.591~1598.

(11) Chen, H, 2003, "Second order Champman-Enskog Expansion Derivation of the Momentum Stress Form," unpublished note.