
영역분할법을 이용한 2차원 유한차분 시간영역법 해석

홍익표*

2D Finite Difference Time Domain Method Using the Domain Decomposition Method

Ic-Pyo Hong*

이 논문은 2010년도 공주대학교 연구년 연구비를 지원받았음

요 약

본 논문에서는 영역분할법을 이용한 2차원 유한차분시간영역법을 제안하였다. 영역분할법은 전체 해석구조를 분할하여 해석하는 수치해석방법으로 본 논문에서는 영역분할법 중 Schur complement 방법을 적용한 유한차분 시간영역법을 구현하고 시뮬레이션 모델로 2차원 해석구조를 설정하고 사각형의 도체에 입사하는 전자파의 산란특성을 해석하였다. 2차원 해석구조를 4개의 영역과 8개의 영역으로 각각 나누어 전자파특성을 계산하였고, 제안한 해석방법의 유효함을 입증하기 위해 일반적인 전체영역에 대한 2차원 유한차분 시간영역법의 해석결과와 비교하여 잘 일치하는 것을 확인하였다.

ABSTRACT

In this paper, two-dimensional(2-D) Finite Difference Time Domain(FDTD) method using the domain decomposition method is proposed. We calculated the electromagnetic scattering field of a two dimensional rectangular Perfect Electric Conductor(PEC) structure using the 2-D FDTD method with Schur complement method as a domain decomposition method. Four domain decomposition and eight domain decomposition are applied for the analysis of the proposed structure. To validate the simulation results, the general 2-D FDTD algorithm for the total domain are applied to the same structure and the results show good agreement with the 2-D FDTD using the domain decomposition method.

키워드

유한차분 시간영역법, 영역분할법, 전자파산란, 완전도체

Key word

Finite difference time domain method, Domain decomposition, Electromagnetic Scattering, PEC

* 정회원 : 국립공주대학교 정보통신공학부(교신저자, iphong@kongju.ac.kr)

접수일자 : 2013. 01. 08

심사완료일자 : 2013. 02. 25

Open Access <http://dx.doi.org/10.6109/jkiice.2013.17.5.1049>

©This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.
Copyright © The Korea Institute of Information and Communication Engineering.

I. 서 론

안테나 및 전자기 문제 해석을 위한 수치해석방법으로는 맥스웰방정식의 적분방정식에 기반하는 모멘트법(Method of Moment : MOM) 과 미분방정식에 기반하는 유한차분 시간영역법(Finite-Difference Time-Domain : FDTD), 유한 요소법(Finite Element Method : FEM) 등이 사용되고 있다. 또한 광학기법(Physical Optics : PO) 등과 같은 해석기법과 결합된 MOM-PO, FEM-PO 등과 같은 하이브리드 해석기법 등이 사용되고 있다[1][2].

여러 가지 전자파 수치해석방법 중 FDTD 방법은 1966년 Yee[3]가 3차원 격자구조를 제시한 이래 컴퓨터속도가 점점 빨라지고 수치계산을 위한 메모리확장이 용이해지면서 1990년대 이후 가장 널리 사용되고 있는 전자기 수치해석 방법 중 하나이다. FDTD 방법은 MOM 방법이나 FEM 방법에 비해 구현이 간단하고 맥스웰방정식으로부터 직접적으로 계산을 하기 때문에 전자기장의 전파를 직관적으로 이해할 수 있으며, 또한 시간영역에서의 데이터로부터 광대역의 주파수 영역의 특성을 구하는 것이 가능하다는 장점을 갖는다[4]. 또한 최근에는 컴퓨터의 병렬처리 기술의 발전에 따라 계산속도와 메모리 효율성이 더 개선되는 연구가 이루어지고 있다.

병렬처리 기술은 계산영역이 큰 문제를 작은 영역으로 나누어 동시에 계산하여 여러 개의 컴퓨터 자원을 동시에 사용하기 때문에 계산속도가 향상되며 다중작업을 수행할 수 있다는 장점을 갖는다[5]. FDTD 방법에 병렬처리 기술을 적용하는 연구는 2001년 MPI 라이브러리를 사용하여 병렬 FDTD 알고리즘이 구현되었고[6], 2005년에는 PC 클러스터를 이용한 MPI 기반 병렬 FDTD 알고리즘 구현에 관련한 연구가 이루어졌다[7]. FDTD 알고리즘을 병렬로 구현하기 위한 또 다른 접근 방법은 전체 계산영역을 작은 계산영역으로 나누어 병렬로 계산할 수 있다. 전체 계산영역을 작은 계산영역으로 나누는 방법 중 하나로 본 논문에서는 영역분할 방법을 선택하였다.

영역분할 방법(Domain Decomposition Method : DDM)은 경계조건을 갖는 미분방정식을 효율적으로 풀기 위한 수학적 접근방법 중 하나로 전기적으로 큰 문제의

해석을 위한 FEM과 같은 전자기 수치해석방법과 결합되어 최근 많은 연구가 진행되고 있다[8][9]. DDM 방법은 전체 해석영역을 작은 부분영역으로 분할하여 해석하는 방법으로 포아송 방정식을 영역분할하여 반복적으로 해석하는 Schur complement 방법, 편미분방정식을 해석하는 Fictitious domain 방법, 겹치는 영역에 대한 편미분방정식을 해석하는 Schwarz alternating 방법 등이 존재하는데[10], 본 논문에서는 FDTD 방법과 DDM 방법 중 Schur complement 방법을 결합하였다. Schur complement 방법은 분할된 영역이 서로 겹치지 않게 설정이 가능하며, 영역의 경계면처리가 간단하다는 장점을 갖는다.

본 논문에서 제안한 방법을 검증하기 위하여, 4개 영역과 8개영역으로 분할된 2차원 영역에서 사각형 완전도체(Perfect Electric Conductor : PEC)가 존재할 때 전자파 산란특성을 계산하고, 기존의 2차원 FDTD 해석결과와 비교하였고 계산시간이 개선되는 것을 확인하였다.

II. 본 론

그림 1에 해석하고자 하는 2차원 PEC 구조를 나타내었다.

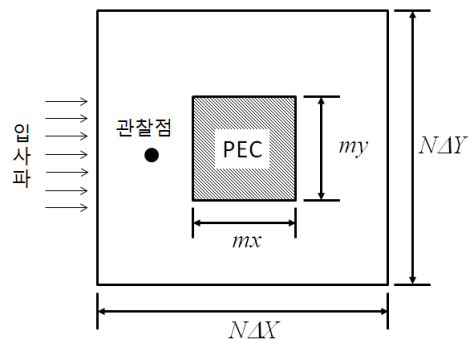


그림 1. 2차원 해석모델
Fig. 1 2D Simulation model for analysis

그림 1에서 전체 계산영역은 $N\Delta x \times N\Delta y$ 이며, 본 논문에서는 $N=60$, 공간격자 $\Delta x = \Delta y = \lambda/10$ 이고, 시간간격 Δt 는 안정조건을 만족하도록 $\Delta t = 20ns$

로 설정하였다. 해석영역내의 사각형 PEC의 크기는 $mx = 20 \Delta x$, $my = 20 \Delta y$ 로 설정하였고 전자파를 관찰하기 위한 관찰점의 위치좌표는 (15,30)로 설정하였다. 그림 1과 같은 구조를 해석하기 위하여 2차원 FDTD 해석방법 중 본 논문에서는 TM 모드에 대해서 고려하고자 한다. 해석영역에서 다음과 같은 맥스웰 방정식을 만족한다[4].

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (3)$$

식(1)-(3)의 차분방정식은

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n-1}(i, j + \frac{1}{2})) \\ &= -\frac{1}{\mu \Delta y} (E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j)) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j)) \\ &= -\frac{1}{\mu \Delta x} (E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (E_z^n(i, j) - E_z^{n-1}(i, j)) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\Delta x} (H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i - \frac{1}{2}, j)) \right. \\ &= -\frac{1}{\Delta y} (H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j - \frac{1}{2})) \\ &= \left. -\sigma E_z^n(i, j) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

로 주어진다.

식(4)-(6)으로부터 다음과 같은 Implicit FDTD 차분방정식을 구하기 위한 식(7)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} E_z^{n-1}(i, j) = & \alpha E_z^n(i, j) - \\ & \beta (\gamma (E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)) + \\ & \gamma (E_z^n(i, j) - E_z^n(i - 1, j)) - \\ & \beta' (-\gamma' (E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j)) + \\ & \gamma' (E_z^n(i, j) - E_z^n(i, j - 1)) - \\ & H_y^{n-1}(i + 1/2, j) - \\ & H_y^{n-1}(i - 1/2, j)) + \\ & H_x^{n-1}(i, j + 1/2) + \\ & H_x^{n-1}(i, j - 1/2)) \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)에서 계수 $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ 는 다음 식(8)-(10)으로 주어진다.

$$\alpha = (1 + \sigma \frac{\Delta t}{\varepsilon}) \quad (8)$$

$$\beta = \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}, \quad \beta' = \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\mu \Delta x}, \quad \gamma' = \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \quad (10)$$

식(7)을 다음과 같이 동일한 시간 성분에 대해 다시 쓰면 다음 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & -A E_z^n(i, j - 1) - B E_z^n(i - 1, j) + \\ & C E_z^n(i, j) - B E_z^n(i + 1, j) - A E_z^n(i, j + 1) \\ &= f^{n-1}(i, j) \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)에서 계수로 주어지는 A, B, C 와 f^{n-1} 는 다음과 같이 식(12)-(15)로 주어진다.

$$A = \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon \mu (\Delta y)^2} \quad (12)$$

$$B = \frac{(\Delta t)^2}{\varepsilon \mu (\Delta x)^2} \quad (13)$$

$$C = 1 + \frac{\sigma \Delta t}{\varepsilon} + 2(a + b) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 f^{n-1}(i, j) = & E_z^{n-1}(i, j) \\
 & + \beta [H_y^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-1}(i - \frac{1}{2}, j)] \\
 & - \beta' [H_x^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n-1}(i, j - \frac{1}{2})]
 \end{aligned} \tag{15}$$

일반적으로 FDTD 방법에서는 주파수 특성을 얻기 위하여 입력신호로 광대역특성을 갖는 가우시안 (Gaussian) 펄스를 사용하게 된다[4]. 본 논문에서는 영역분할에 따른 시간영역에서의 전계파형을 관찰하기 정현파 형태의 평면파 입사를 가정하였다. 평면파의 전계를 $E(t, x)$ 라고 할 때, 다음과 같이 식(16)으로 주어진다.

$$E(t, x) = [1 - e^{-(t/p)^2}] \sin\left(\frac{2\pi(ct - x)}{\lambda}\right) \tag{16}$$

여기에서 p 는 정현파가 입사되기 전 과도상태시간을 결정하는 값으로 본 논문에서는 $20\Delta t$ 로 설정하였으며, c 는 진공 중 전파속도를 의미한다. 그림 2에 입사되는 평면파의 시간영역 파형을 나타내었다.

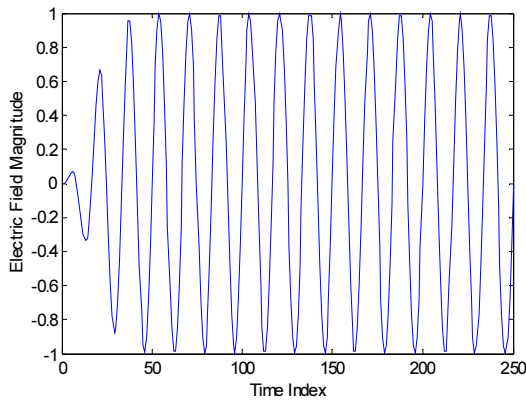


그림 2. 시간영역에서 입력신호의 전기장 크기
Fig. 2 Electric field magnitude of input signal in time domain

맥스웰방정식과 같은 미분방정식을 풀기 위한 영역분할법에는 Schur Complement 방법, Fictitious domain 방법, Schwarz alternating 방법 등의 여러 가지 수치방법이

존재하며, 본 논문에서는 포아송 방정식을 풀기위해 일반적으로 사용되는 영역 분할법인 Schur Complement 방법을 사용하였다. Schur Complement 방법은 해석 영역이 겹치지 않은 경우에 대해 사용이 가능하며, Conjugate Gradient 방법과 같은 반복법에 의해 해석이 가능하다. 그림 1의 해석구조에 대하여 영역분할법을 적용하기 위하여 그림 3(a)와 같이 4개로 영역을 분할하고 그림 3(b)와 같이 8개로 영역을 각각 분할하였다.

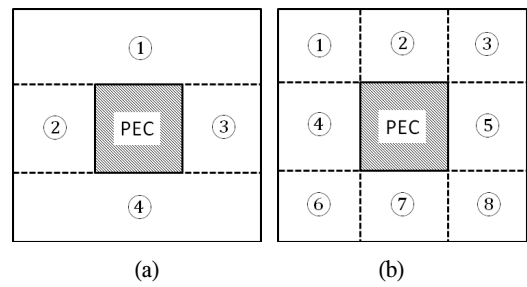


그림 3. 영역분할구조 (a) 4영역 분할 (b) 8영역 분할
Fig. 3 Setup for domain decomposition (a) 4-domain (b) 8-domain

각 영역에서 주어지는 식(11)과 같은 Implicit FDTD 방정식은 4개 영역분할에 대해 각 영역에서 식(17)과 같은 행렬식으로 주어지며 Schur Complement에 의해 식(18)과 같이 주어진다.

$$AU = F \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{2\Gamma} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & A_{3\Gamma} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{4\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma 3} & A_{\Gamma 4} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_\Gamma \end{bmatrix} \tag{18}$$

식(17)에서 U 는 특정 시간 n 에서 전기장 E_z^n 을 나타내며 F 는 식(15)로 주어지는 $n-1$ 번째 시간에서의 값을 나타낸다. 따라서 식(17)의 행렬을 풀면 특정 시간 n 에서 전기장 E_z^n 을 얻을 수 있다. 또한, 식(18)에서 $A_{ii} (i = 1, 2, 3, 4)$ 는 각 영역에서 주어지는 식(11)에 의해 주어지는 행렬이며, $A_{i\Gamma} (i = 1, 2, 3, 4)$

는 각 영역사이의 경계조건으로 주어지는 행렬값을 나타낸다.

III. 시뮬레이션 결과

그림 1의 사각형 PEC 구조에 대해 그림 3(a)와 같이 4개의 영역 분할, 그림 3(b)와 같이 8개의 영역이 분할된 경우에 대해 각각 전기장 E_z 를 구하여 그림 4와 그림 5에 각각 나타내었다. 본 논문에서 제안하는 알고리즘의 유효함을 증명하기 위하여 일반적인 2차원 FDTD 방법을 사용하여 동일한 구조에 대하여 해석을 하였다. 그림 4에는 일반적인 2차원 FDTD 방법의 해석결과와 4개 영역의 분할 구조에 대하여 해석한 결과를 나타내었고, 그림 5에는 8개 영역의 분할 구조에 대하여 해석한 결과를 비교하여 나타내었다.

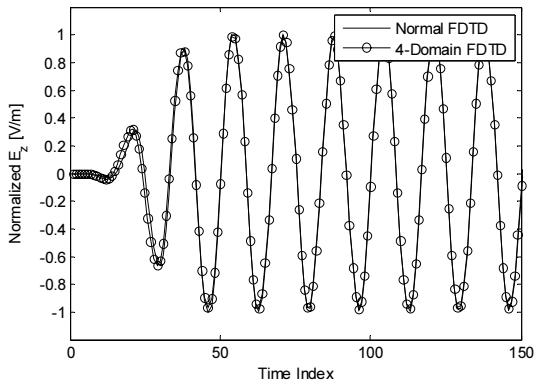


그림 4. 4개 분할영역의 시뮬레이션 결과 비교
Fig. 4 Compared simulation results between 4-domain decomposition and normal FDTD

두 경우 모두 기존의 2차원 FDTD 방법의 해석결과와 일치하는 것을 확인할 수 있었으며, 따라서 본 논문에서 제시하는 알고리즘이 유효하다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 본 논문에서 제안한 구조를 계산하기 위하여 사용한 일반적인 기존 2차원 FDTD 방법은 동일한 시뮬레이션 환경에서 41.16sec가 소요되었으며, 4개로 영역분할한 영역분할 FDTD 알고리즘의 경우 14.65sec, 8개 영역분할 FDTD 알고리즘의 경우 5.60sec가 소요되어 계산시간을 효율적으로 줄일 수 있다는 것을 확인하였다.

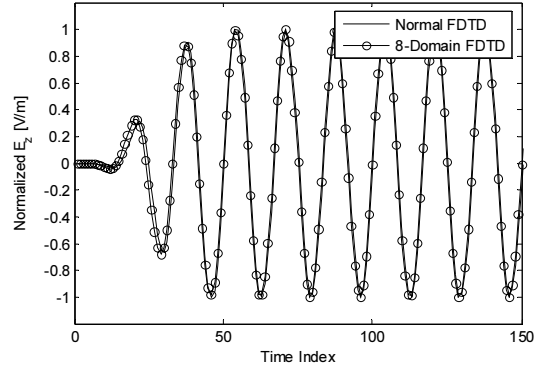


그림 5. 8개 분할영역의 시뮬레이션 결과 비교
Fig. 5 Compared simulation results between 5-domain decomposition and normal FDTD

따라서 영역분할법을 적용하는 경우 기존의 FDTD 알고리즘에 비해 계산시간과 메모리사용을 줄일 수 있고 병렬처리 계산을 구현하기 위해 매우 효율적이라는 것을 알 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 전체 해석구조를 분할하여 해석하는 수치해석방법인 영역분할법을 이용한 2차원 FDTD 해석방법을 제안하였다. 영역분할법 중 겹치는 영역이 없고, FDTD 방법과 연계가 가능한 Schur complement 방법을 이용하여 2차원의 사각형 PEC 구조에 입사하는 전자파의 산란특성을 해석하였다. 2차원 해석구조를 4개의 영역과 8개의 영역으로 각각 나누어 시간영역에서 전자파 특성을 계산하고, 일반적인 FDTD 방법으로 전체 영역을 해석한 결과와 비교하여 잘 일치하는 것을 확인하였으며 계산시간을 비교하여 영역분할법을 이용한 FDTD 해석방법이 매우 효율적임을 보였다. 향후 제안한 방법을 이용하여 안테나 구조와 같은 다양한 구조 해석과 관련한 연구가 필요할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 2010년도 공주대학교 연구년 지원 사업에 의하여 이루어진 연구임.

참고문헌

- [1] D. B. Davidson, *Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering*, 2nd Ed., Cambridge University Press, 2010
- [2] W. C. Chew, J. M. Jin, E. Michielssen and J. Song, *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*, Artech House, 2001
- [3] K. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. on Antennas & Propagation*, vol. 14, no. 3, pp.302-307, 1966
- [4] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain Method*, Boston, 3rd Ed., Artech House, 2005.
- [5] R. Mittra, W. Yu and T. Su, *Parallel Finite- Difference Time-Domain Method*, Boston, Artech House, 2006.
- [6] C. Guiffaut and K. Mahdjoubi, "A Parallel FDTD Algorithm Using the MPI Library," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 43, no. 2, pp. 94-103, 2001
- [7] Y. Zhang, W. Ding and C. H. Liang, "Study on the Optimum Virtual Topology for MPI Based Parallel Conformal FDTD Algorithm on PC Clusters," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 19, no. 13, pp. 1817-1831, Oct. 2005
- [8] Z. Cendes and J. F. Lee, "A FEM domain decomposition method for photonic and electromagnetic band gap structures," *IEEE Trans. on Antennas & Propagation*, vol. 54, no. 2, pp. 721-733, 2006
- [9] Y. Lu, "A domain decomposition finite-difference method for parallel numerical implementation of time-dependent Maxwell's equations," *IEEE Trans. on Antennas & Propagation*, vol. 45, no. 3, pp. 556-562, 1997
- [10] T. P. A. Mathew, *Domain Decomposition Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Springer, 2008

저자소개



홍익표(Ic-Pyo Hong)

1996년 2월 : 연세대학교
전자공학과(공학석사)
2000년 2월 : 연세대학교 전기컴퓨터
공학과(공학박사)

2000년 3월~2003년 2월 : 삼성전자 무선사업부 책임
연구원

2003년 3월~현재 : 공주대학교 정보통신공학부 부교수
※관심분야 : 안테나, 전자기수치해석