

코플라를 이용한 강수의 패턴 분석과 강수 보험의 가격 결정[†]

최창희¹ · 이항석² · 주효찬³

¹케이웨더 주식회사 · ²성균관대학교 보험계리학과/수학과 · ³성균관대학교 수학과
접수 2013년 2월 4일, 수정 2013년 4월 8일, 게재확정 2013년 5월 21일

요약

최근 들어 예측하기 힘든 기후의 변동성이 심해지고 한국의 산업이 고도화됨에 따라 날씨의 변화에 능동적으로 대처하기 위해 날씨보험이나 날씨 파생상품을 활용할 수 있으나 현재 실제로 이러한 금융상품을 이용하여 날씨위험을 관리하는 데에는 많은 어려움과 한계가 있다. 본 논문에서는 다양한 강수보험의 활성화에 필요한 강수횟수와 강수량의 확률적 모델링을 통하여 여러 가지 강수 보험을 제안하고 추정된 결합분포를 통하여 보험료를 산출하려 한다. 이를 위하여 최근 30년 동안 한국 9개 지역의 7월-9월의 월 강수량과 월 강수 횟수를 확률분포에 적합하고 두 확률변수의 상관성을 코플라를 이용하여 분석한다. 그리고 개별분포와 추정된 코플라를 이용하여 시뮬레이션을 통하여 여러 가지 강수 보험의 가격을 결정하는 방법을 제안한다.

주요용어: 강수보험, 날씨보험, 보험 가치 평가, 시뮬레이션, 코플라.

1. 서론

최근 들어 예측하기 힘든 기후의 변동성이 심해지고 한국의 산업이 고도화됨에 따라 날씨의 변화에 능동적으로 대처하기 위한 기업들의 노력이 다각도로 이루어지고 있다. 예를 들면, 홈플러스, 코오롱 F&C, 삼성전자, 롯데리아 등은 날씨 조건에 따라 인센티브를 제공하는 날씨 마케팅을 수시로 진행하고 있고 CU, 미니스톱 등의 유통 업체들은 날씨를 고려하여 상품의 물량을 조절한다. 또한 파리마케팅은 전국 매장에 날씨를 고려한 예상 판매량을 POS를 통하여 실시간으로 제공하고 있으며, 블랙야크, 제일모직 등의 의류 회사들은 장기 전망과 분석 결과를 활용하여 의류의 소재, 스타일, 복종별 물량 등을 결정하고 있다.

위에서 언급한 바와 같이 많은 국내 기업들이 다양한 방법으로 날씨가 매출에 미치는 부정적인 영향을 최소화하고 날씨변화에 따른 기회를 십분 활용하기 위하여 노력하고 있으나 날씨보험이나 날씨 파생상품을 활용하지 않고 날씨위험을 관리하는 데에는 많은 어려움과 한계가 있다. 예를 들어 장기예보를 기반으로 상품을 기획하는 경우 장기예보가 적중하지 않을 경우 오히려 더 큰 손실을 입을 수 있고 악기상(惡氣象) 마케팅의 경우에도 악기상에 의하여 손실된 매출을 완전히 보전해줄 수 못하는 경우가 많다. 특히 강수의 경우 장기 예보가 거의 불가능 하고 다양한 업종(에너지, 유통, 의류, 외식, 레저 등)에 광범위하게 영향을 미치기 때문에 악기상 마케팅을 적극적으로 진행할 수 없는 중건, 중소기업들은 대부분 강수가 매출에 미치는 악영향을 감수해야 하는 것이 현실이다.

[†] 한국기상산업진흥원의 지원을 받았음 (No. KMIPA-2012-1207).

¹ (152-740) 서울시 구로구 구로3동 235-2, 케이웨더 주식회사, 팀장.

² 교신저자: (110-745) 서울시 종로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 보험계리학과/수학과, 부교수.

E-mail: hangsock@skku.edu

³ (110-745) 서울시 종로구 명륜동 3가 53, 성균관대학교 수학과, 박사과정.

현재 날씨에 민감한 다양한 기업들이 날씨 위험관리를 위하여 다양한 날씨 금융상품에 대한 필요성을 피력하고 있으나 한국의 경우 금융 감독기관의 규제에 의해 날씨 파생상품은 아직까지 금융감독원에서 인가가 나지 않은 상태이고, 날씨보험은 판매실적이 매우 저조한 상황이다. 한 예로 2012년 기상청 주최의 “날씨보험 활성화 심포지엄” 자료집에 따르면 국내 한 화재보험사의 태양광 발전소를 상대로 한 지수형 날씨보험의 연 매출은 1억 원 미만이라고 한다. 그 원인에는 아직까지 날씨 위험관리에 대한 전반적인 인식이 부족하다는 점이 큰 부분을 차지하고 있지만 높게 산정되어 있는 보험료 역시 큰 장애로 작용하고 있다. 따라서 날씨보험을 이용한 날씨 리스크 관리를 위해서는 날씨보험의 해당 날씨 이벤트를 보다 현실적으로 모델링하고 이를 바탕으로 적절한 보험료를 산출하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 다양한 날씨보험 중 지수형 강수보험의 가격을 결정해보고자 한다. 특히 1개월 동안 일정 양 이상의 강수량을 기록한 강수 일수가 보험금 지급사유로 정해져 있는 국내 강수보험 뿐만 아니라 이와 유사한 강수보험 및 강수 파생상품의 가격을 결정할 수 있는 모델을 제시하고자 한다. 이를 위해서는 보험금 지급사유가 되는 날씨 이벤트를 모델링하는 것이 핵심이다. 강수를 모델링하기 위해서는 강수량의 계절성 (seasonality), 건기와 우기에 나타나는 자기회귀 과정 (autoregressive process) 등 강수량이 보이는 특징을 감안해야 한다. 따라서 강수 모델은 일정 기간 동안의 강수량 모델과 강수 여부 (강수 이벤트)를 나타내는 부분으로 구성된다. 예를 들어 Cao 등 (2004)은 강수량을 감마분포, 혼합 지수분포, 그리고 커널 확률밀도함수 (kernel density)를 이용하여 나타냈다. Sanso와 Guenni (1999)는 강수량을 동적 모수 (dynamic parameters)를 지닌 정규분포의 변환으로 나타내고, 이 정규 확률변수의 절단 (truncation)을 이용하여 강수 여부를 모델링하였다. 또한 Wilks (1998)는 강수량을 혼합 지수분포로, 강수 이벤트를 이중상태 마코프 과정 (two-state Markov process)으로 모델링하였고, 유사하게 Carmona와 Diko (2005), Fowler 등 (2000) 역시 마코프 과정을 이용하였다. Leobacher와 Ngare (2009)는 월 강수량을 감마분포로 모델하고 계절성을 반영하기 위해 이산형 마코프 과정을 이용하였다 (모델의 적합도를 높이기 위하여 Lee와 Kim (2004)가 제시한 일반화된 감마 분포를 활용하는 것도 가능하다). Stowasser (2012)는 이를 보다 정교화한 고계 마코프 연쇄 모델 (multi-order Markov chain model)을 제시하였다.

본 논문은 현재 국내에서 판매되는 강수보험의 경우 보험금 지급사유가 되는 날씨 이벤트가 1개월 동안 일정 양 이상의 강수량을 기록한 강수 일수로 정해져 있다는 것에 착안, 과거의 강수 자료에 기반하여 월 강수량과 강수 횟수에 대한 분포를 적합하고 코플라를 이용하여 두 분포의 상관관계를 분석한다.

코플라의 장점은 상관관계를 지니고 있는 월 강수량과 강수 횟수를 모델링함으로써 보다 현실적인 시뮬레이션 결과를 얻을 수 있다는 점이다. 이에 대한 대안으로 1일 강수량을 모델링하고 월 강수량을 일 강수량의 합으로 나타내는 경우를 생각해 볼 수 있다. 즉, T_i 와 N 을 각각 비가 온 경우의 강수량과 강수 횟수로 정의할 때 $P := T_1 + T_2 + \dots + T_N$ 은 월 강수량을 나타내는 확률변수가 된다 (이를 기존 모델 (existing model)이라 하자). 기존 모델의 경우 월 강수량과 강수 횟수의 공분산이 (1.1)과 같이 고정되거나 실제로 월 강수량과 월 강수량 공분산의 관측치는 기존 모델의 고정된 공분산과 상이한 경우가 많다.

$$\begin{aligned}
 Cov(P, N) &= E(PN) - E(P)E(N) \\
 &= \sum_{m=0}^{30} E(PN|N=m)P(N=m) - E(P)E(N) \\
 &= \sum_{m=0}^{30} \alpha\beta m^2 P(N=m) - \alpha\beta n^2 p \\
 &= \alpha\beta \sum_{m=0}^{30} m^2 P(N=m) - \alpha\beta n^2 p = \alpha\beta np(1-p)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Table 1.1 Covariance (frequency of monthly precipitation and amount of monthly precipitation) comparison between (1.1) and actual observation

City	July		August		September	
	Eq. (1.1)	Observed	Eq. (1.1)	Observed	Eq. (1.1)	Observed
Gangneung	119	405	146	235	151	477
Gwangju	153	387	156	201	97	304
Daegu	141	372	141	348	99	363
Daejeon	141	343	157	453	102	380
Busan	182	644	157	388	103	264
Seoul	197	597	190	741	116	320
Ulsan	133	371	139	284	110	258
Incheon	173	484	169	400	108	328
Jeju	143	476	149	243	133	480

Table 1.1은 α, β, p 를 강수량자료에서 추정하여 식 (1.1)을 이용하여 구한 공분산 (식 (1.1))과 실제 월 강수량과 월 강수 횟수 자료에서 추정한 공분산 (observed)을 비교한 것이다 (30년 강수량자료 이용). 위의 테이블에서 보이는 것과 같이 실제 강수량 자료의 공분산은 기존 모델의 공분산 보다 훨씬 작음을 알 수 있다. 우리는 본 논문에서 실제 자료와 상이한 공분산을 가지는 기존 방법의 문제점을 코플라 모델을 활용하여 극복하고 이를 활용하여 강수 보험의 가격을 결정하는 방법을 제시한다.

본 논문은 크게 나누어 세 부분으로 구성되어 있다. 먼저 2절에서 한국의 9개 지역의 강수량과 강수 횟수가 가지는 특징을 분석한다. 3절에서는 코플라 확률 모델을 소개하고 2절에서 살펴본 9개 지역의 강수 패턴을 코플라를 이용하여 분석하고 시뮬레이션하는 방법을 제시한다. 4절은 3절에서 만들어진 코플라 확률모델을 이용한 시뮬레이션을 통하여 다양한 형태의 강수보험의 가격을 결정해 본다. 마지막으로 5절에서는 본 논문을 요약하고 앞으로의 연구방향을 논의한다.

2. 국내의 강수 패턴 분석

이 절에서는 기상청에서 제공하는 9개 지역 (강릉, 광주, 대구, 대전, 부산, 서울, 울산, 인천, 제주)의 30년 간 (1982년-2011년)의 7월, 8월, 9월의 월별 1일 강수량 자료를 활용하여 강수량의 특징을 분석한다. 이 절에서 제시하는 강수량의 특징은 1일 강수량의 분포가 감마분포로 적합하고, 월 강수 발생 횟수는 이항분포로 모델링될 수 있고, 마지막으로 월 강수 횟수와 강수량은 강한 양의 상관관계를 가진다는 것이다. 이 절에서의 분석결과는 3절과 4절에서 강수량을 설명하는 확률모델을 만들고 강수보험의 가격을 결정하는데 사용된다.

2.1. 강수량의 특징

기상청은 비가 오지 않을 경우 공란으로 두고 비가 왔으나 강수량이 측정 최저 기준 (0.1mm) 이하인 경우는 0으로 나타낸다. 본 논문에서는 0.1mm 이상 비가 온 경우만 강수가 발생한 것으로 간주한다. Figure 2.1은 30년 동안의 지역별, 7월 일일 강수량의 도수 분포이다. 8월과 9월도 유사한 형태를 나타낸다. Figure 2.1에서 볼 수 있는 것과 같이 비가 오는 대부분의 경우는 대부분 1-5mm 사이이고 많은 양의 비가 올 확률은 급격하게 감소하는 것을 볼 수 있다. Leobacher와 Ngare (2011)를 비롯한 많은 연구에서는 이러한 강수량의 특징을 잘 설명하기 위해 감마분포로 적합하였다. 감마분포의 경우 2개의 모수를 가지고 있어 지수분포 또는 지수분포와 유사한 형태의 분포를 적합하는데 자주 사용된다. 1일 강수량의 경우 도수 분포가 지수적으로 감소하는 경우가 많고 월 강수량의 경우도 지수적으로 감소하거나

적은 강수량 대에 분포가 모여 있는 경우가 많아 본 논문에서도 월 강수량이 확률밀도함수가

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, x > 0$$

인 감마분포 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 를 따른다고 가정한다 (특정 월의 1일 강수 분포가 감마분포를 따른다고 가정하면 월 강수량은 동일한 감마분포의 합산이므로 월 강수량 또한 감마분포를 따르게 된다).

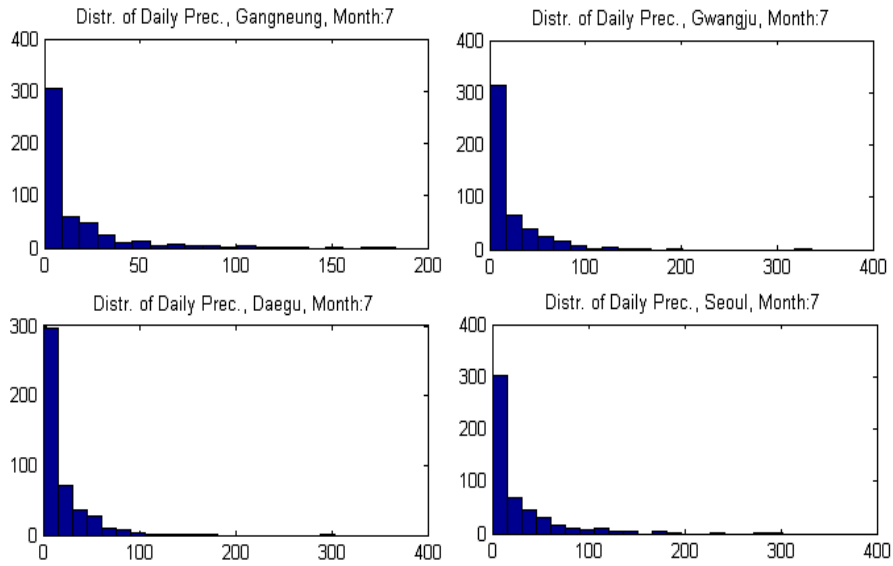


Figure 2.1 Frequency histogram of daily precipitation amount (x-axis: daily precipitation, y-axis: frequency)

Table 2.1은 한국 9개 지역의 7월, 8월, 9월의 월 강수량이 감마분포를 따를 때 30년간의 월 강수량 자료를 이용하여 월 강수량 분포의 α 와 β 를 최대우도법 (maximum likelihood estimation; MLE)을 이용하여 추정한 것이다. 이 추정치는 3절에서 코플라의 모수를 추정할 때 이용된다.

Table 2.1 Estimated values of α and β for nine cities

City	July		August		September	
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Gangneung	0.47	32.60	0.45	41.23	0.47	45.71
Gwangju	0.50	40.11	0.52	39.12	0.46	32.73
Daegu	0.50	36.36	0.52	35.72	0.51	31.03
Daejeon	0.51	35.64	0.53	38.97	0.51	30.65
Busan	0.46	53.27	0.49	43.77	0.47	35.79
Seoul	0.48	52.57	0.50	49.31	0.44	41.97
Ulsan	0.50	35.31	0.49	37.58	0.46	36.68
Incheon	0.48	47.17	0.51	44.41	0.45	40.35
Jeju	0.47	40.95	0.45	44.75	0.43	46.86

2.2. 월 강수 횟수의 특징

Figure 2.2는 4개 지역에서 30년 간 7월에 0.1mm 이상 강수가 발생했을 때의 발생 횟수의 분포를 나타낸 것이다. Figure 2.2에서 보는 바와 같이 한국의 지역별 월별 강수 횟수의 분포는 대략적으로 이항 분포의 형태를 보이는데 강수량의 기준점을 0.1mm가 아닌 1mm나 5mm로 잡아도 강수 횟수는 비슷한 형태를 나타낸다. Figure 2.2가 완벽한 이항분포를 따르지 않는 이유 중의 하나는 샘플의 수가 30개로 상대적으로 적기 때문이다. 만약 더 긴 기간의 기상자료를 이용한다면 보다 정확한 분포를 파악하는 것이 가능할 수 있을 것이다.

월 강수 횟수가 이항분포에 적합한지를 확인하기 위하여 콜모고로프-스미르노프 (이하 KS) 검정을 실행하였다. 월 강수 횟수를 나타내는 확률변수를 X 라 하고 X 가 이항분포를 따른다고 가정하자.

$$X \sim B(n, p) \quad (2.1)$$

(2.1)에서 n 은 한 달의 일 수이고, p 는 특정일에 비가 올 확률이다. 본 논문에서는 30년 월 강수 횟수의 평균을 n 으로 나누어 p 의 추정량을 구하고 이를 \hat{p} 라 하였다.

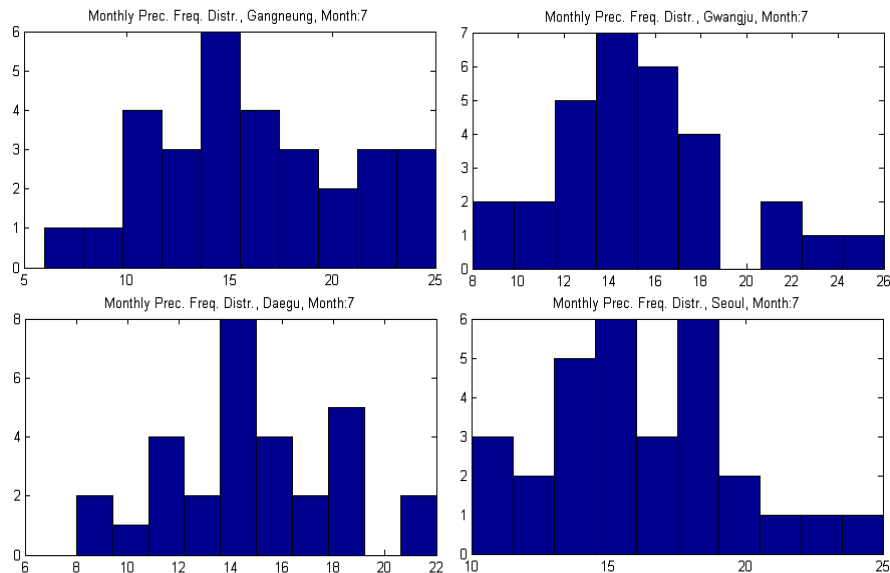


Figure 2.2 Histogram of the number of monthly precipitation occurrences (x -axis: number of days when the daily precipitation was at least 0.1mm, y -axis: frequency)

우리는 월 강수 횟수를 모델링하는데 자주 사용되는 이항분포, 포아송 분포, 음이항 분포 등을 고려하였으나 포아송 분포는 이항분포에 비하여 적합도가 떨어지고 음이항 분포의 경우 2개의 모수를 가지고 있어 적합도가 높은 경우는 있었으나 평균이 분산보다 커야하는 음이항 분포의 조건이 만족되지 않아 모수 추정이 불가능한 경우가 발생하여 우리는 이항분포를 사용하기로 하였다. 필요에 따라 혹은 주어진 자료에 따라 본 논문에서 제안하는 알고리즘에 다른 이산형 분포를 적용할 수도 있을 것이다.

Figure 2.3에서 점선은 $B(n, \hat{p})$ 의 누적 확률분포이고 실선은 30년 간 월 강수량의 경험분포 (empirical distribution)이다. 위의 4개 지역 이외의 다른 지역에 대한 KS 검정결과는 Table 2.2에 나와 있다.

Table 2.2 Kolmogorov-Smirnov statistic

City	July		August		September		KS-Mean
	KS	P-val	KS	P-val	KS	P-val	
Gangneung	0.2052	0.3953	0.0662	0.7847	0.1687	0.3612	0.1467
Gwangju	0.098	0.462	0.1	0.4084	0.1435	0.7671	0.1138
Daegu	0.0669	0.9323	0.1345	0.6204	0.2488	0.1032	0.1501
Daejeon	0.1149	0.6131	0.168	0.6967	0.2013	0.4151	0.1614
Busan	0.1281	0.7491	0.1668	0.454	0.1161	0.5746	0.137
Seoul	0.1112	0.9163	0.1446	0.865	0.1164	0.6355	0.1241
Ulsan	0.0958	0.7449	0.0806	0.5161	0.1357	0.4317	0.104
Incheon	0.1084	0.6711	0.1496	0.6105	0.1315	0.2315	0.1298
Jeju	0.1842	0.378	0.0809	0.7768	0.1185	0.4318	0.1279
mean	0.1236	0.6513	0.1212	0.6369	0.1534	0.439	

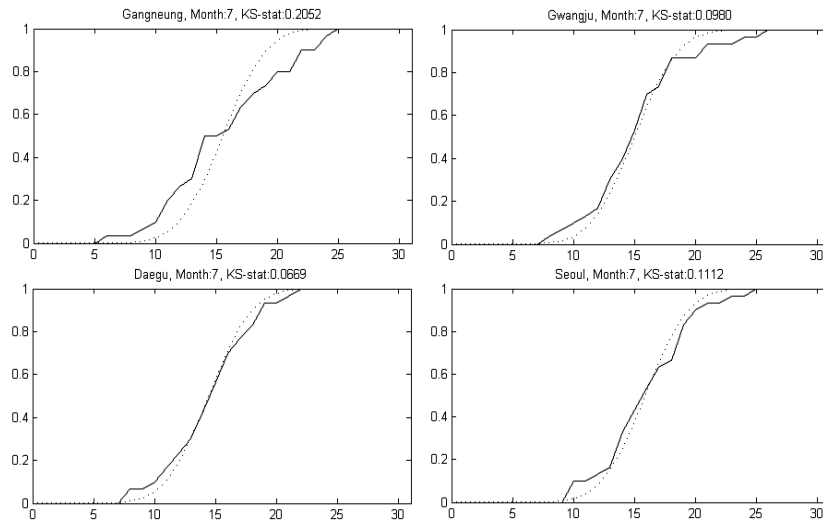


Figure 2.3 KS goodness of fit test for the number of monthly precipitation occurrences (when daily precipitation was at least 0.1mm) to binomial distribution (x-axis: frequency, y-axis: distribution function, dotted line: binomial distribution, solid line: empirical distribution)

Table 2.2는 7월-9월 9개 지역의 월 강수량의 발생 횟수에 대한 KS 검정통계량과 p-value이다. p-value가 크게 나타나는 경우 주어진 샘플이 이항분포를 따른다고 가정하기 어려운 것은 사실이나 앞에서 언급한 바와 같이 포아송 분포와 음이항 분포 등의 이산 분포 등이 본 실험에 적합하지 않고 다른 이산분포를 가정하여도 적합도가 크게 개선되지 않아 이항분포를 사용하기로 하였다. 적합도가 떨어지는 지역/월의 경우 적합도를 높이기 위하여 추세를 제거하거나 관측치의 수를 늘리는 등의 시도가 가능하다.

Table 2.3 Estimated values of p

City	\hat{p}		
	July	August	September
Gangneung	0.5161	0.5065	0.3767
Gwangju	0.5000	0.4828	0.3300
Daegu	0.4817	0.4398	0.3078
Daejeon	0.5161	0.4581	0.3211
Busan	0.4387	0.3774	0.3089
Seoul	0.5280	0.4753	0.3033
Ulsan	0.4376	0.4000	0.3467
Incheon	0.4849	0.4086	0.2722
Jeju	0.3989	0.4376	0.3600

Table 2.3은 지역별/월별 강수 횟수가 이항분포를 따를 경우 30년간의 월 강수 횟수 자료를 이용하여 이항분포의 p 값을 추정한 것이다. 감마분포의 모수 추정치와 마찬가지로 이것은 3절에서 코플라의 모수를 추정할 때 이용된다.

2.3. 월 강수량과 월 강수 횟수의 상관관계

강수횟수와 강수량을 분석하면서 나타나는 중요한 특징의 하나는 월 강수량과 월 강수횟수의 강한 양의 상관관계이다. Figure 2.4는 한국4개 지역에서 지난 30년 동안 발생한 7월의 강수량과 강수 횟수가 매우 강한 상관관계를 가진다는 것을 보여준다. Table 2.4는 지역별/월별 월 강수량과 강수 횟수의 상관계수를 보여준다. 표에서 나타나듯 지역별, 시기별로 약간의 차이는 있으나 월 강수량과 강수 횟수는 대부분 0.6-0.7 이상의 강한 양의 상관관계를 보인다. 3절에서는 Figure 2.4에서 나타난 것과 같이 강수량과 강수 횟수가 나타내는 상관관계를 고려하여 강수를 모델링하는 기법을 제시한다.

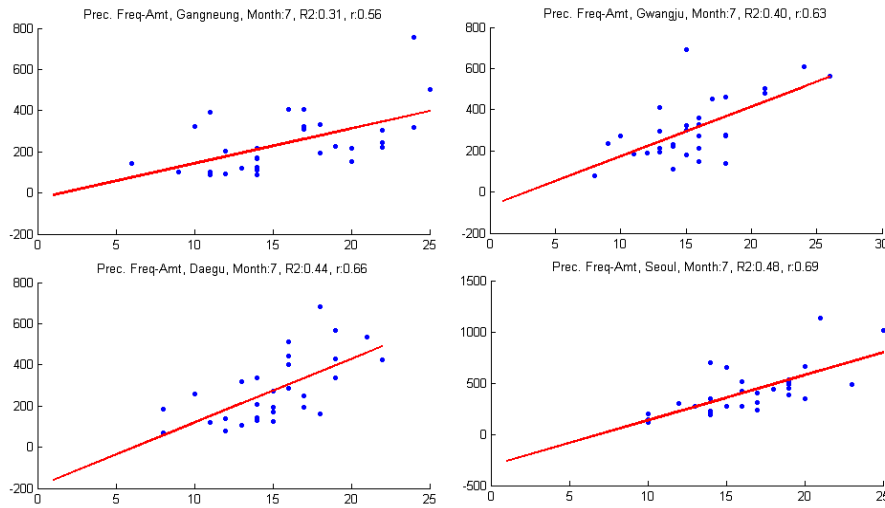


Figure 2.4 The number of monthly precipitation occurrences versus the monthly total precipitation amount (x-axis: frequency, y-axis: monthly precipitation)

Table 2.4 Correlation coefficient of the number of monthly precipitation occurrences and the monthly total precipitation amount

City	July	August	September
Gangneung	0.56	0.34	0.62
Gwangju	0.63	0.46	0.67
Daegu	0.66	0.67	0.7
Daejeon	0.6	0.64	0.76
Busan	0.78	0.47	0.7
Seoul	0.69	0.68	0.56
Ulsan	0.72	0.47	0.72
Incheon	0.7	0.59	0.62
Jeju	0.67	0.52	0.71

2.4. 월 강수량과 월 강수 횟수의 변화 추세

Carmona and Diko (2005)와 시카고 상품거래소 (Chicago merchandise exchange; CME) 자료에 따르면 기상 인자를 모델링할 때 최근 벌어지고 있는 급격한 기후 변화의 추세를 고려하는 경우가 있다. 과거 30년간의 자료에 대한 분석에 따르면 월 강수량과 강수 횟수의 경우 7월에 강수량과 강수 횟수가 증가하는 추세를 보이고 있고 8월과 9월에는 강수의 변화 추세가 크게 나타나지 않는 것으로 보인다.

Table 2.5는 시간에 따른 강수량의 변화 추세에 대하여 단순회귀를 실행한 후, 모델의 유의성에 대해 *F*-테스트를 실시한 결과이다. 이 표에서 작은 값들은 강수량의 변화추세가 통계적으로 유의한 달과 지역을 의미한다.

Table 2.5 *p*-values of *F*-test for linear trend of monthly total precipitation amount

	Gang-neung	Gwangju	Daegu	Daejeon	Busan	Seoul	Ulsan	Incheon	Jeju
July	0.1	0.4	0.4	0	0.2	0	0.1	0	0.4
Aug.	0.7	0.1	0.8	0.2	0.8	0.6	0.5	0.4	0.9
Sept.	0.4	0.8	0.8	0.6	0.1	0.6	0.5	0.9	0.5

Table 2.5에 따르면 7월의 강수량의 변화추세가 통계적으로 유의한 경우가 많고, 8월 강수량의 변화 추세는 광주와 대전에서만 유의한 것으로 나타났고 9월의 강수량은 시간에 따른 변화추세가 대부분 통계적으로 유의하지 않은 것으로 나타났다.

강수 횟수에도 유사한 테스트를 적용하여 Table 2.6과 같은 결과를 얻을 수 있다. 강수 횟수와 강수량이 강한 상관관계를 가지고 있으므로 강수 횟수의 변화추세도 강수량의 변화추세와 유사한 경향을 보인다고 할 수 있다.

Table 2.6 *p*-value of *F*-test for linear trend of the number of monthly precipitation occurrences

	Gang-neung	Gwangju	Daegu	Daejeon	Busan	Seoul	Ulsan	Incheon	Jeju
July	0.3	0	0.6	0	0.3	0.2	0.2	0.3	0.4
Aug.	0.6	0	0.7	0	0.5	0.2	0.3	0.4	0.3
Sept.	0.2	0.9	0.8	0.8	0.8	0.5	0.9	0.3	0.4

본 논문에서는 시간에 따른 강수량의 변화를 고려하지 않았다. 만일 강수량의 변화를 시뮬레이션에 적용할 필요가 있는 경우에는 자료에서 시간에 따른 변화추세를 제거하고 시뮬레이션을 실행한 후, 생성된 시뮬레이션 값에 변화추세를 더하여 시간에 따른 강수량의 변화추세를 고려한 시뮬레이션을 진행할 수 있다. 다음 장에서 월 강수량과 월 강수 횟수의 상관성을 고려한 코플라를 이용하여 강수량을 시뮬레이션하는 방법을 소개한다.

3. 코플라를 이용한 월 강수량과 월 강수 횟수 모델링

2절에서 확인한 바와 같이 월 강수량과 월 강수 횟수는 각각 감마분포와 이항분포를 따르고 두 분포 사이에는 강한 양의 상관관계를 나타내고 있다. 이렇게 두 개의 확률변수가 강한 상관성을 보일 때 이를 효과적으로 모델링 할 수 있는 모델이 코플라이다. 다변량 확률분포를 다룰 때에 각 확률변수는 각각의 누적분포함수로 그 특성을 표현하는 한편 확률변수들 간의 상관성을 주변 확률분포의 함수, 즉 코플라로 나타낼 수 있기 때문이다. 코플라는 Sklar (1959)가 상관성이 높은 다양한 확률분포를 가진 다변량 자료를 분석하는데 효과적인 도구로 소개한 이후, 금융 (Cherubini 등, 2004; Kim과 Lee, 2011), 위험관리 (Malevergne와 Sornette, 2006), 통계 (Nelsen, 1999), 기상 (Schölzel과 Friederichs, 2008),

경영 (Embrechts 등, 2003) 등의 다양한 분야에서 활용되고 있다. 본 절에서는 Klugman 등 (2008)과 Frees와 Valdez (1998)를 참고하여 코플라에 대한 간단한 개요와 함께 t -코플라를 이용하여 (월 강수량, 강수 횟수)의 난수를 생성하는 방법을 설명한다.

다음은 t -코플라를 이용하여 (월 강수량, 강수 횟수)의 난수를 생성하는 과정이다. [알고리즘 A]의 각 부분을 편의상 [A.1]~[A.5]라 부르기로 한다. 참고로 본 논문에서는 MATLAB을 이용하여 다음의 알고리즘을 적용, 난수를 생성하였다. ([A.1]의 경우 2절에서 언급한 것과 같이 MLE 방법을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.)

알고리즘 A: 코플라를 이용한 월 강수 횟수와 강수량의 난수 생성

1. 관측값에서 강수량 (감마)과 강수 횟수 (이항분포)의 모수를 추정한다.
 2. 관측값을 이용하여 경험 코플라를 추정한다.
 3. 경험 코플라를 이용하여 t -코플라의 모수를 추정한다.
 4. 3을 이용하여 코플라 난수 생성한다.
 5. 4의 코플라 샘플을 이용하여 강수량과 강수 횟수의 난수 생성한다.
-

3.1. 경험 코플라의 추정

여기서는 코플라를 소개하고 경험 코플라를 추정하는 방법을 소개한다. d -변량 코플라 (d -variate copula)는 균등분포(0, 1)을 따르는 d 개 확률변수들의 결합분포함수를 의미한다. d 개의 확률변수를 각각 U_1, U_2, \dots, U_d 라고 한다면 코플라는 다음과 같이 정의된다.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \Pr(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_d \leq u_d) \quad (3.1)$$

만약 d 개의 연속형 확률변수 X_1, X_2, \dots, X_d 의 주변 분포함수를 각각 F_1, F_2, \dots, F_d 로 나타내면 결합 분포함수는 코플라를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_d) &= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \\ &= \Pr(U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)) \end{aligned}$$

이는 여러 개의 확률변수에 대해 각각의 주변확률분포와 코플라가 주어진다면 결합분포함수를 결정할 수 있음을 나타낸다. i 월의 강수 횟수와 강수량을 나타내는 확률변수를 각각 X_i 와 Y_i 라 하자. 그러면 2장에서 본 것과 같이 X_i 는 이항분포를 따르고 Y_i 는 감마분포를 따른다고 할 때 X_i 와 Y_i 가 강한 양의 상관성을 가지고 있다는 것을 고려하여 코플라를 이용하면 더욱 현실적인 강수의 모형을 구축할 수 있다.

경험 코플라는 코플라에서 분석하고자 하는 각 확률분포의 주변 누적 확률분포함수를 이용하여 구할 수 있다. 누적 주변 확률분포를 구하는 구체적인 식은 다음과 같다.

$$\hat{F}(x) = ||j : x_j \leq x||/n \quad (3.2)$$

(3.2)에서 $\{j : x_j \leq x\}$ 는 특정 관측치 x 와 같거나 작은 관측치의 집합을 나타내고 $\{j : x_j \leq x\}$ 는 집합 $\{j : x_j \leq x\}$ 에 속하는 원소의 숫자를 나타낸다. n 은 전체 관측값의 개수다. 그러면 (2)에서 정의된 $\hat{F}(x)$ 는 x 의 누적 확률분포 추정값을 나타내게 된다. 월 강수량과 월 강수 횟수에 (2)를 적용하여 구한 누적 주변 확률분포의 순서쌍들 $(\hat{F}(x_i), \hat{F}(y_i))$ 이 경험 코플라([A.2])이다. $(\hat{F}(x_i), \hat{F}(y_i))$ 가 t -코플라를 따른다고 가정하고 $(\hat{F}(x_i), \hat{F}(y_i))$ 를 이용하여 t -코플라의 모수를 추정하고 이를 활용하여 월 강수량과 월 강수 횟수를 시뮬레이션 한다.

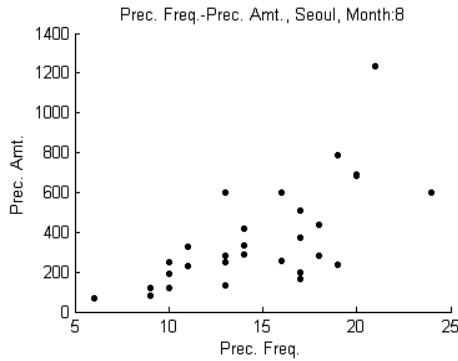


Figure 3.1 The monthly total precipitation amount versus the number of precipitation occurrences

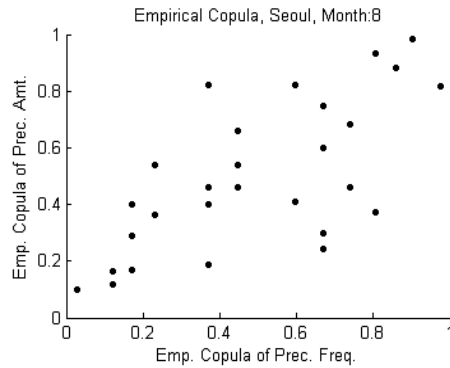


Figure 3.2 Empirical copula of the monthly total precipitation amount versus the number of precipitation occurrences

Figure 3.1은 30년간 서울의 8월 월 강수량과 강수 횟수를 보여주고, Figure 3.2는 Figure 3.1의 자료를 이용하여 경험 코플라를 구한 것이다. 예를 들어 Figure 3.1의 x-축에서 가장 큰 값인 25의 주변 확률분포의 누적 확률분포 추정값은 1이고 가장 작은 값인 6의 주변 확률 분포의 누적 확률 분포 추정 값은 0이 된다. 즉, 누적 확률분포 추정값을 이용하여 경험 코플라 ([A.2])를 구하는 것이다.

본 논문에서는 가우시안 (Gaussian), t , 클레이튼 (Clayton), 프랭크 (Frank), 검벨 (Gumbel) 등의 코플라로 실험을 진행하였고, t -코플라가 Figure 3.2와 같은 자료를 모델링하는데 가장 적합하다는 결론을 내리고 이를 사용하였다. 물론 Genest 등 (2006)과 같은 방법을 사용할 수 있으나 현재까지 제시된 대부분의 적합도 검정이 이론적인 논란의 소지를 가지고 있고 어떤 방법으로 다양한 코플라의 적합도를 비교하는 것이 옳은지에 대한 합의가 이루어지지 않은 것이 사실이다 (Berg와 Bakken, 2006). 따라서 많은 경우 주어진 경험 코플라와 형태가 유사한 코플라를 선택한다 (Trivedi와 Zimmer, 2005). 우리는 월 강수량과 월 강수 횟수의 경험 코플라를 다양한 형태의 코플라와 비교하여 가장 유사한 형태를 보이는 t -코플라를 선택하였다.

3.2. t -코플라의 모수 추정

이 절에서는 t -코플라의 모수를 추정하는 방법 ([A.3])을 소개한다. X 를 확률변수 X_1, \dots, X_d 로 이루어진 확률벡터라 하고, 각 확률변수의 주변 확률분포를 F_{X_1}, \dots, F_{X_d} 라 하자. $F_{X_i}(x_i) = U_i$ ($i = 1, 2, \dots, d$)는 모수 (0, 1)인 균등분포를 따른다. 이 경우 t -코플라는 다음과 같이 표현된다.

$$F_X(u_1, u_2, \dots, u_d) = C_X(u_1, u_2, \dots, u_d) = F_{t(\nu, \rho)}(F_{t(\nu)}^{-1}(u_1), F_{t(\nu)}^{-1}(u_2), \dots, F_{t(\nu)}^{-1}(u_d)) \quad (3.3)$$

여기서 $F_{t(\nu)}^{-1}$ 는 자유도 ν 인 단변량 t -분포의 누적분포함수의 역함수, u_i 는 i 번째 확률변수의 누적분포확률, ρ 는 공분산 행렬로부터 각 확률변수의 분산이 1이 되도록 척도화 (scaling)함으로써 주대각 원소가 1이 되는 양정치 상관관계수 행렬 (positive-definite correlation matrix)을 의미한다. 코플라에서 공분산 행렬과 ρ 는 확률변수들간의 상관성을 표현함에 있어 동일한 결과를 나타낸다 (Schmidt, 2007). 특히 상관관계수가 ρ 인 두 확률변수의 경우 t -코플라는 다음과 같다 (Demarta와 McNeil, 2007).

$$C_X(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{v(1-\rho^2)} \right\}^{-1-\frac{\nu}{2}} dydx \quad (3.4)$$

본 논문의 경우 u_1 과 u_2 는 감마분포와 이항분포의 누적분포확률이고 t -코플라의 모수인 상관계수 ρ 와 자유도 ν 를 추정해야 한다.

t -코플라의 모수는 MLE 방법으로 추정한다 (Cherubini 등, 2004). $\mathcal{X} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{dt}\}_{t=1}^T$ 를 d 변량 확률분포로부터의 표본행렬, θ 를 개별 확률변수 및 코플라의 모든 모수들로 이루어진 벡터라고 할 때 로그우도함수는

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln C(F_1(x_{1t}), \dots, F_d(x_{dt})) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{jt}) \quad (3.5)$$

이고 따라서 최대우도 추정량 벡터는

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} l(\theta)$$

로 나타낼 수 있다. u_{dt} 를 d 번째 확률변수의 t 번째 관측치의 누적분포함수, $t_v^{-1}(u_{dt})$ 를 자유도가 ν 인 표준 t -분포의 누적분포함수의 역함수, 그리고 $\zeta_t = t_{\nu, \rho}(t_v^{-1}(u_{1t}), \dots, t_v^{-1}(u_{dt}))$ 를 자유도가 ν 이고 상관계수 행렬이 ρ 인 다변량 표준 t -분포의 누적분포함수로 정의할 때 t -코플라의 로그우도함수는

$$l(\theta) \propto -\frac{T}{2} \ln |\rho| - \left(\frac{\nu+d}{2}\right) \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \frac{1}{\nu} \zeta_t^\top \rho^{-1} \zeta_t\right) + \left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln \left(1 + \frac{t_v^{-1}(u_{dt})^2}{\nu}\right)$$

로 나타나는데 가우시안 코플라와는 달리 이에 대한 모수 추정은 수치적 방법을 이용해야 한다.

하지만 앞서 언급한 정확최대우도법 (exact maximum likelihood method; EML)이라 불리는 이 방법은 각 주변분포의 모수와 주변분포간의 상관성을 보여주는 모수 (즉, 코플라의 모수)를 동시에 추정해야 하므로 계산상 어려움이 있을 수 있다. 따라서 모수의 추정을 주변분포의 모수 추정 이후 코플라의 모수를 추정하는 두 단계로 나누어 진행한다. IFM (inference functions for margins method)이라고 불리는 이 방법에 따르면 위의 로그우도함수는 다음과 같다.

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln C(F_1(x_{1t}; \theta_1), \dots, F_d(x_{dt}; \theta_d); \phi) + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^d \ln f_j(x_{jt}; \theta_j)$$

여기서 θ_i 는 i 번째 확률분포의 모수벡터, θ 는 주변 확률분포의 모수벡터를 원소로 갖는 행렬, 그리고 ϕ 는 코플라의 모수벡터를 의미한다.

IFM 방법은 첫 번째 단계로

$$\hat{\theta}_j = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_j(x_{jt}; \theta_j),$$

를 만족하는 주변분포의 모수를 추정하고 이후

$$\hat{\phi} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln C(F_1(x_{1t}; \hat{\theta}_1), \dots, F_d(x_{dt}; \hat{\theta}_d); \phi)$$

를 만족하는 코플라 모수 ϕ 를 추정한다. 즉, 최대우도법을 적용, 주변 확률분포의 모수와 코플라의 모수를 순차적으로 추정하는 것이다. 본 논문에서는 감마분포의 모수 α 와 β , 이항분포의 모수 p 를 추정하고 로그우도함수를 최대로 하는 t -코플라의 모수 자유도 ν 와 상관계수 ρ 를 추정한다.

Table 3.1은 위의 방법을 이용하여 구한 t -코플라의 7월-9월의 지역별 모수 추정값이다. 지역별로 상관계수의 추정값 $\hat{\rho}$ 은 대부분 1에 가깝고, $\hat{\nu}$ 값에는 큰 차이가 나타나고 있다. 참고로 $\hat{\nu}$ 가 큰 경우에는 t -코플라가 정규분포에 매우 가깝다는 것을 나타낸다. Table에 따르면 7월의 월 강수량과 강수횟수의 코플라는 정규분포와 유사하고 8월과 9월의 경우 자유도의 추정값이 낮은 부분이 있는 것으로 나타났다.

Table 3.1 Estimated values of *t*-copula parameters

City	July		August		September	
	\hat{v}	$\hat{\rho}$	\hat{v}	$\hat{\rho}$	\hat{v}	$\hat{\rho}$
Gangneung	1	0.6900	37,391,292	0.7241	4	0.8137
Gwangju	12,087,367	0.7842	12,933,704	0.8020	8	0.8872
Daegu	38,023,092	0.8738	13	0.7340	7	0.9411
Daejeon	11,232,086	0.8197	4,024,396	0.7947	5	0.9214
Busan	13,003,315	0.8123	5	0.8190	3	0.8225
Seoul	2	0.8591	12,953,817	0.8708	11,499,815	0.8461
Ulsan	11,250,043	0.7870	4	0.8282	37,688,289	0.7919
Incheon	3,922,052	0.8247	2	0.7273	4	0.7975
Jeju	38,026,269	0.9058	115	0.7300	13,021,953	0.8887

3.3. 월 강수량과 월 강수 횟수의 난수 생성 방법

여기에서는 *t*-코플라를 이용하여 월 강수량과 월 강수 횟수의 난수를 생성하는 방법 ([A.4], [A.5])을 소개한다. 다음의 알고리즘을 이용하여 *t*-코플라를 이용한 난수를 생성할 수 있다.

알고리즘 B: *t*-코플라의 무작위 샘플 생성

1. 상관계수 행렬 ρ 를 콜레스키 분해 (Cholesky decomposition) $\rho = \mathbf{A}'\mathbf{A}$ 를 시행한다 (변수가 2개인 경우 ρ 는 2x2 행렬이다).
2. 표준정규분포를 따르는 난수 벡터 $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d)$ 를 생성한다.
3. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)' = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}$ 로 정의되는 \mathbf{X} 를 계산한다.
4. 자유도 v 인 카이제곱분포를 따르는 변수 ξ 를 생성한다. 예를 들어 표준정규분포를 따르는 Y_j 를 이용, $\xi = \sum_{j=1}^v Y_j^2$ 로 정의할 수 있다.
5. $U_i = t_v(X_i/\sqrt{\xi/v})(i = 1, \dots, d)$ 를 얻어낸다. 단, t_v 는 자유도 v 인 *t*분포의 누적분포함수이다.

위의 알고리즘을 이용하여 *t*-코플라를 이용한 난수를 구할 수 있다. *t*-코플라를 이용한 난수는 앞에서 소개한 경험 코플라 ($\hat{F}(x_i), \hat{F}(y_i)$)와 유사한 값들이다. *t*-코플라로부터의 난수를 ($\hat{F}(x_i), \hat{F}(y_i)$)라 하고 이항분포와 감마분포의 누적분포함수의 역함수를 각각 $F_B^{-1}(x; n, p)$ 와 $F_\Gamma^{-1}(y; \alpha, \beta)$ 와 라고 하면, 우리는 $F_B^{-1}(\hat{F}(x_i); n, p)$ 와 $F_\Gamma^{-1}(\hat{F}(y_i); \alpha, \beta)$ 를 이용하여 월 강수량과 월 강수 횟수의 난수를 구할 수 있다.

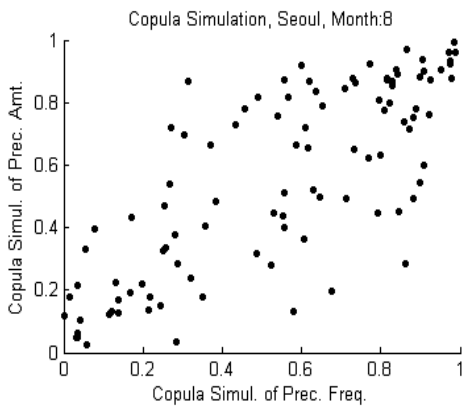


Figure 3.3 Empirical copula simulation (Seoul, August)

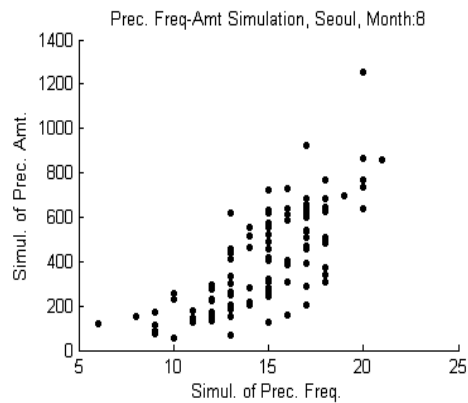


Figure 3.4 Simulation of the monthly total precipitation amount versus the number of precipitation occurrences (Seoul, August)

Figure 3.3과 Figure 3.4는 코플라를 이용하여 8월 서울의 월 강수량과 강수 횟수에 대하여 100개의 무작위 샘플을 생성한 예이다. Figure 3.3은 이렇게 생성된 100쌍의 감마분포 (월 강수량)와 이항분포 (월 강수 횟수)의 샘플을 그린 것이다. Figure 3.3이 과거 자료에 기반한 Figure 3.1과 유사하다는 것을 알 수 있다.

일반적으로 대부분의 강수 보험은 월 강수량과 강수 횟수 등으로 가격이 결정되므로 위의 실험만으로 대부분의 강수보험의 가격을 결정하는데 충분하나 필요한 경우 다음과 같은 과정을 추가하여 1일 강수량의 난수를 구하는 것이 가능하다. 예를 들어 위의 과정을 통해 생성된 8월의 강수량, 강수 횟수의 난수가 각각 w 와 m 이라면 감마분포를 따르는 m 개의 확률변수 T_1, T_2, \dots, T_m 는 1일 강수량을 나타내고 $T_1 + T_2 + \dots + T_m = w$ 인 난수를 구하면, T_i 는 각각 8월 한 달 동안 m 번 비가 오고 총 강수량이 w 인 일별 강수량의 무작위 샘플이 되는 것이다. Geweke (1991)과 유사한 방법을 이용하여 이처럼 1일 강수량의 난수를 생성하는 것이 가능하다.

4. 코플라를 이용한 강수 보험의 가격 결정

이 절에서는 네 가지 형태의 강수보험의 가격을 결정한다. 네 가지 강수 보험은 날씨(강수)연계보험, 파생상품형 강수보험, 연계보험-파생상품형 보험의 조합 (조합형 강수보험), 그리고 조건부 파생상품형 강수보험이다. 특히 날씨연계보험은 국내에서 상품화된 보험으로 상품에서 제시된 보험요율을 본 논문에서 제시한 방법을 통하여 계산한 보험요율과 비교해 볼 수 있다. Alaton 등 (2002)이 지적하였듯 날씨파생상품은 보험과 유사한 점이 많기에 날씨파생상품의 가격 결정 방법이 날씨보험의 가격 결정에 적용 가능한 경우가 많다. 블랙-숄츠의 기법을 활용 (Benth와 Saltytè-Benth, 2007)하거나 날씨파생상품의 구매 여부에 따른 효용을 비교하여 가격을 결정하는 효용 무차별 방법 (utility indifference pricing) (Moore와 Young, 2003; Moller, 2003; Young, 2003; Brockett 등, 2009; Choi 등, 2012), 또는 시뮬레이션을 이용한 가격 결정 (Lee, 2002; Lee 등, 2008) 등이 그 예라 할 수 있겠다 (강수보험의 가격 결정에 관하여 진행된 연구에는 Martin 등 (2001), Leobacher와 Ngare (2011)을 참조할 수 있다).

본 절에서는 t -코플라를 이용하여 지역별 30년간의 월 강수량과 강수 횟수를 모델링하고 각 지역의 강수량과 강수 횟수를 100,000번 시뮬레이션하여 강수보험의 가격을 결정하였다. 국내에서 상품화된 강수연계보험의 경우 강수량과 강수 횟수를 동시에 고려해야 하기에 기존의 가격 결정 방법을 적용하기에 한계가 있다. 본 논문에서 제시하는 코플라 모델은 특정 기간 동안의 강수량과 강수 횟수에 대한 모델링을 동시에 제공하므로 보다 다양한 형태의 강수 보험의 가격을 결정하는데 사용될 수 있다는 장점이 있다. 본 논문은 보험 실무에서 많이 사용되는 시뮬레이션 방법을 통하여 강수보험의 가격을 결정하는 방법을 사용한다. 본 절에서는 8월의 실험결과만 제시하였다. 7월과 9월의 실험결과는 부록에 포함되었다.

4.1. 날씨연계보험

Table 4.1은 국내에서 판매 중인 날씨연계보험 중 강수연계보험 (weather-based insurance)을 코플라로 분석한 것이다. 이 강수보험은 지역별로 8월에 5mm 이상 비가 온 날이 '기준일수 (threshold)'를 넘어서면 넘어서는 날로부터 최대 5일까지 가입금액에 '기준일수'를 넘어서는 날짜를 곱하여 보험금을 지급하는 형태의 보험이다.

$$\text{payoff} = \text{가입금액} \times \max[(\text{강수일수} - \text{기준일수}), 0]$$

예를 들어 강릉 지역의 경우 기준일수가 13일, 보험 가입금액이 1억 원이고 8월에 5mm 이상 비가 온 날이 15일이라면 $(15-13) \times 1\text{억} = 2\text{억}$ 원을 돌려받는 형태의 보험이다. Table 4.1은 이러한 보험의 지역

별 기준일수와 5mm 비가 기준일수 이상 발생횟수의 평균과 표준편차, 그리고 기준일수를 1-5일 넘어선 경우가 발생한 확률, 판매되고 있는 보험의 지역별 영업요율, 그리고 이 영업요율과의 비교를 위해 $\mu + 0.5\sigma$ 를 제시한 것이다.

Table 4.1 Simulation of weather-based insurance (currently offered by an insurance company)

City	Threshold	Mean	Standard Deviation	Probability					Premium Rate	$(\mu + 0.5\sigma)$
				1	2	3	4	5		
Gangn.	13	3.08E-3	7.26E-2	1.62E-3	4.64E-4	1.20E-4	3.40E-5	7.00E-6	17.80%	3.94%
Gwangju	8	3.43E-2	2.51E-1	1.54E-2	5.60E-3	1.76E-3	4.37E-4	1.42E-4	21.80%	15.98%
Daegu	9	1.50E-2	1.62E-1	7.44E-3	2.41E-3	6.44E-4	1.61E-4	4.50E-5	17.60%	9.62%
Daejeon	12	1.10E-3	4.20E-2	6.19E-4	1.65E-4	3.80E-5	9.00E-6	0.00E+0	17.60%	2.21%
Busan	8	3.40E-2	2.50E-1	1.55E-2	5.41E-3	1.71E-3	4.81E-4	1.29E-4	15.00%	15.87%
Seoul	10	5.39E-3	9.59E-2	2.80E-3	8.33E-4	2.22E-4	4.80E-5	1.30E-5	25.70%	5.33%
Incheon	10	3.22E-3	7.34E-2	1.73E-3	4.85E-4	1.26E-4	2.80E-5	6.00E-6	26.00%	3.99%
Jeju	10	2.10E-2	1.97E-1	9.57E-3	3.40E-3	1.02E-3	2.87E-4	8.60E-5	17.80%	11.93%

Table 4.1에 따르면 현재 판매되고 있는 날씨연계보험의 경우 보험료율이 과도하게 산정되었음을 알 수 있다. 특히 이 강수보험의 경우 약관에 제시되어 있는 기준일수를 넘는 5mm 이상의 월 강수 횟수가 발생하기 매우 어려운 이벤트라는 것을 알 수 있다. 예를 들어 대전의 경우 $\max(5\text{mm 이상 강수 횟수} - 12, 0)$ 의 평균이 0.0011 (약 0.11%)인데 보험료율은 17.6%로 잡혀 있다. 다시 말하자면 가입금액이 1억 원인 경우 기대 보상액이 11만 원인 보험에 대하여 1,760만 원의 보험료를 요구하는 것이다. 대전의 경우 조금 극단적인 사례라고 할 수 있지만 다른 지역의 경우에도 보험금 지급사유의 발생 확률에 대비해 보았을 때 영업요율이 과도하게 책정되어 있다고 할 수 있겠다. 보험료율이 과도할 경우 잠재적 보험 가입자는 날씨 위험에 노출된 매출을 보전하기 위하여 매년 매출의 일부를 (채권 등의 무위험 자산에) 투자하고 날씨 위험에 의하여 매출의 감소폭이 클 경우 투자금을 회수하여 매출을 보전하는 방법이 보험에 가입하는 것보다 효과적이므로, 합리적인 사업자라면 과도한 보험료를 지불하는 것보다 다른 날씨 위험 회피전략을 찾게 될 것이다.

Table 4.2 Simulation of weather-based insurance (redesigned)

City	Threshold	Mean	Standard Deviation	Probability					$(\mu + 0.5\sigma)$
				1	2	3	4	5	
Gangn.	10	0.30	0.82	7.57E-2	4.40E-2	2.24E-2	1.03E-2	6.08E-3	71.42%
Gwangju	11	0.22	0.71	5.99E-2	3.34E-2	1.64E-2	6.99E-3	4.03E-3	57.86%
Daegu	9	0.50	1.05	1.05E-1	6.86E-2	3.84E-2	1.90E-2	1.30E-2	102.47%
Daejeon	10	0.41	0.96	9.01E-2	5.65E-2	3.13E-2	1.53E-2	9.96E-3	88.92%
Busan	9	0.24	0.72	6.69E-2	3.65E-2	1.73E-2	7.22E-3	3.79E-3	60.10%
Seoul	11	0.35	0.90	8.07E-2	4.95E-2	2.70E-2	1.27E-2	8.37E-3	80.35%
Ulsan	9	0.22	0.69	6.33E-2	3.39E-2	1.57E-2	6.53E-3	3.40E-3	56.79%
Incheon	10	0.25	0.75	6.69E-2	3.80E-2	1.88E-2	8.17E-3	4.54E-3	63.11%
Jeju	9	0.28	0.79	7.51E-2	4.24E-2	2.09E-2	9.06E-3	5.20E-3	68.08%

Table 4.2는 날씨연계보험과 유사한 형태의 날씨보험을 새롭게 설계한 것 (contract B)이다. 현재 상품화되어 있는 날씨연계보험의 요율이 과도한 이유는 보험금 지급의 기준일수가 너무 높기 때문이다. 이 Table은 실제로 평균 발생 횟수 $\max(5\text{mm 이상 강수 발생 횟수} - \text{기준일수}, 0)$ 의 평균이 20% 이상이 되도록 지역별로 기준일수를 정한 것이다. 표에서는 $\mu + 0.5\sigma$ 를 가격으로 제시하였으나 일반적으로 보험회사에서는 $\mu + x\sigma$ 를 가격으로 정하는 경우가 대부분이므로 x 를 바꾸면서 보험의 가격이 어떻게 변하는지를 쉽게 확인할 수 있다. 7월-9월의 자료는 부록의 Table A.1에서 확인할 수 있다.

4.2. 파생상품형 강수보험

Table 4.3은 코플라를 이용한 시뮬레이션을 통해 파생상품 형태의 강수보험 (contract C) 가격을 제시한 것이다. CME에서 제시하는 각종 표준 날씨 파생상품은 Table 4.3과 유사한 형태로 제공됨을 알 수 있다. 날씨 파생상품은 지급액의 지급기준에 따라 콜 옵션 (강수량 또는 기온 등의 날씨 지수가 특정 기준을 넘는 경우 현금을 지급하는 경우)과 풋 옵션 (강수량 또는 기온 등의 날씨 지수가 특정 기준을 미치지 못하는 경우 현금을 지급하는 경우)으로 나뉜다. 따라서 Table 4.3의 경우 날씨 파생상품 콜옵션과 유사한 형태의 보험이라 할 수 있다.

Table 4.3 Simulation of weather-derivative-type weather insurance

City	Mean of precipitation	Standard Deviation	Strike $\mu + x5\sigma$	Cap $\mu + x3\sigma$	Percentile					Weather-derivative-type insurance	
					80%	85%	90%	95%	99%	Mean	Standard Deviation
Gangn.	295.89	203.90	40	91	2	6	12	21	40	3.04	8.00
Gwangju	302.17	143.26	37	73	5	8	13	21	36	3.32	7.47
Daegu	251.92	139.65	32	67	3	7	12	19	35	2.95	6.93
Daejeon	290.20	177.98	38	82	4	8	14	24	44	3.58	8.64
Busan	252.64	189.21	35	82	3	8	15	26	47	3.77	9.37
Seoul	362.93	257.84	49	114	4	11	19	33	63	4.86	12.10
Ulsan	231.85	166.28	31	73	3	8	13	23	42	3.42	8.27
Incheon	285.25	176.30	37	81	5	10	16	27	44	4.01	9.35
Jeju	264.79	141.02	34	69	3	6	11	18	34	2.74	6.64

Table 4.3에서 평균 월 강수량과 표준편차는 특정 지역에서 특정 월에 한 달 동안 내린 월 강수량의 30년 평균과 표준편차이다 (위의 Table에서 강수 지수는 센티미터로 측정되었고 지수실행가 (strike)와 지수상한 (cap)은 이를 기준으로 계산되었다. 밀리미터에 10을 곱한 뒤 반올림하였다). 위의 Table에서 제시한 보험을 구입한 가입자가 받는 보상액은 다음과 같이 계산된다.

$$\text{payoff} = \min \{ \max [(\text{실제 강수량} - \text{지수실행가}), 0], \text{지수상한} \times \text{틱사이즈} \}$$

위에서 틱사이즈는 보통 2만 원 정도이나 보험의 경우 가입금액으로 정할 수 있다. 본 논문에서는 틱사이즈가 1원 이라고 가정한다. 필요한 경우 여기서 제시된 가격에 가입금액을 곱하여 강수보험의 가격을 구할 수 있다. Table 4.3에서 “Percentile”은 시뮬레이션을 통하여 나타난 ‘실제보상액’의 백분위수이다. 여기서는 85% 백분위수를 강수보험의 가격으로 제시하였으나 (회색으로 표시) 필요한 경우 다른 백분위수를 파생형 강수보험의 가격으로 사용할 수 있다.

4.3. 조합형 강수 보험

본 논문에서 제안한 모델의 장점 중에 하나는 이 모델이 복잡하고 다양한 형태의 강수보험에 대한 가치를 평가하는데 효과적으로 사용될 수 있다는 것이다. Table 4.4는 Table 4.2에서 가입금액을 20만 원으로 하였을 경우의 강수연계보험 (weather-baed insurance)과 Table 4.3에서 틱사이즈를 10만 원으로 설정한 파생상품형 날씨보험 (weather-derivative-type) 중 월 보상액이 높은 금액을 지불하는 보험의 가격을 t-코플라 시뮬레이션을 이용하여 정한 것으로 본 논문에서는 이와 같은 보험을 조합형 강수보험 (mixed-type precipitation insurance)이라 명칭한다. 예를 들어 서울에서 8월의 강수 횟수가 13회이고 월 강수량이 450mm라면 연계보험과 파생상품의 보험금은 각각 아래와 같다.

$$\text{연계 보험} : (13 - 11) \times 20\text{만원} = 40\text{만원}$$

$$\text{파생상품형} : \text{반올림} [(410 - 362.93) / 10] \times 10\text{만원} = 50\text{만원}$$

이 경우 파생상품형의 보상액이 10만 원 더 많으므로 파생상품형의 보험금을 지급하는 것이다. Table 4.4에서 지불비율은 파생형과 보험형이 각각 더 많은 보상액을 생성하는지를 보여준다 (합이 100%가

되지 않는 이유는 보험금을 지급하지 않는 경우가 발생하기 때문이다). Table 4.4에서 평균과 분산은 이러한 보험의 지급액의 평균과 분산이고 백분위수는 지급액 시뮬레이션의 백분위수로서 사용자의 필요에 따라 백분위수 중 하나를 선택하여 강수보험의 가격으로 활용할 수 있다.

Table 4.4 Simulation of mixed-type precipitation insurance

City	Relative Frequency			Mean	Variance	Percentile (unit: 1,000won)				
	Contract A	Contract B	Sum			80%	85%	90%	95%	99%
Gangn.	0.1894	0.7969	0.9863	619,778	762,927	1,000	1,000	1,200	2,100	4,100
Gwangju	0.2934	0.6855	0.9789	527,483	724,406	900	1,000	1,300	2,100	3,600
Daegu	0.1968	0.7856	0.9824	577,640	660,444	1,000	1,000	1,200	1,900	3,500
Daejeon	0.2205	0.7626	0.9832	599,673	826,061	1,000	1,000	1,400	2,400	4,400
Busan	0.3701	0.6103	0.9805	488,361	918,231	600	1,000	1,500	2,600	4,700
Seoul	0.3073	0.6777	0.985	657,387	1,171,758	800	1,100	1,900	3,300	6,300
Ulsan	0.3389	0.6404	0.9793	478,153	807,243	800	1,000	1,300	2,300	4,200
Incheon	0.3754	0.6039	0.9794	525,670	913,906	800	1,000	1,600	2,700	4,400
Jeju	0.2292	0.7517	0.9809	505,249	645,307	800	1,000	1,100	1,800	3,400

4.4. 조건부 강수 보험

Table 4.5는 각 지역별 월 별로 1일 강수량의 평균과 표준편차를 구하여 1일 평균 강수량이 $\mu + \sigma$ 를 초과하는 경우에만 보상액을 지급하는 파생상품 형태의 조건부 강수보험 (conditional precipitation insurance)이다. 예를 들어 서울 지역의 8월 일 평균 강수량이 35mm가 넘는 경우에만 ‘지수 × 텍사이즈’의 보험금을 지급하는 강수 보험인 것이다.

Table 4.5 Simulation of conditional precipitation insurance

City	Daily precipitation		Threshold	Weather derivatives		Reward		Percentile (Reward)				
	Mean	S.D.		Strike	Cap	Mean	S.D.	80	85	90	95	99
Gangn.	24.21	13.80	31.11	40	91	2.80	7.96	0	4	11	21	41
Gwangju	24.69	10.80	30.10	37	73	2.91	7.41	0	6	13	21	36
Daegu	22.36	10.70	27.71	32	67	2.72	6.92	0	6	12	19	35
Daejeon	23.39	10.27	28.53	38	82	3.47	8.65	2	8	14	24	44
Busan	26.13	17.92	35.08	35	82	3.52	9.38	0	7	15	26	47
Seoul	28.39	14.60	35.69	49	114	4.75	12.11	3	10	19	33	63
Ulsan	22.98	13.67	29.82	31	73	3.20	8.26	0	7	13	23	42
Incheon	26.39	14.95	33.86	37	81	3.73	9.36	0	8	16	27	44
Jeju	24.84	11.05	30.36	34	69	2.52	6.61	0	5	11	18	34

Table 4.5에서 ‘Daily precipitation’은 과거 일 평균 강수량의 평균과 분산이고 ‘Threshold’는 보험금을 지급하는 조건이 되는 최소 일 평균 강수량이다. Table의 지급액의 백분위 수를 활용하여 이 보험의 보험료를 산정할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 코플라를 이용하여 월 강수량과 강수 횟수를 모델링하고 시뮬레이션을 이용해 다양한 형태의 강수보험의 가격을 산정해 보았다. 코플라의 경우 다양한 분야에서 활용되고 있으나 이 시도와 같이 월 강수량과 강수 횟수를 모델링하기 위하여 사용된 사례는 처음으로 앞으로 기온 및 강수량에 관련된 보험과 파생상품의 가격 등을 결정하는데 유용하게 사용될 수 있을 것이라 생각된다. 나아가 본 논문에서 제시하는 모델은 일일 강수량 등 보다 짧은 기간 동안의 강수량을 모델링하는데 기여할 수 있다.

예를 들어 본 논문에서 제시된 시뮬레이션 방법을 Geweke (1991)과 1장에서 제시된 확률과정 등의 강수 모델링의 연구 사례에 적용하여 현실적인 일 강수량의 모델을 구축하는데 활용함으로써 보다 정교한 모델로 확장시킬 수도 있을 것이다. 마지막으로 본 논문에서는 강수량의 변화 추세를 고려하지 않았으나 만약 강수량과 강수 횟수의 추세를 고려할 필요가 있다면 모델에서 추세를 제거, 본 논문에서 제시한 방법으로 생성된 시뮬레이션 결과에 추세를 다시 적용하는 방법을 생각해 볼 수 있겠다.

부록

Table A.1 Weather-based insurance price (redesigned) (July-September)

City	Month	Threshold days	Average occurrences	Standard deviation	Probability of occurrences					$(\mu + 0.5\sigma)$	
					1	2	3	4	5		
Gangn.		11	0.16	0.60	4.82E-2	2.54E-2	1.16E-2	4.75E-3	2.43E-3	46.64%	
Gwangju		11	0.26	0.77	6.70E-2	3.84E-2	1.93E-2	8.70E-3	5.16E-3	64.74%	
Daegu		10	0.36	0.90	8.46E-2	5.16E-2	2.72E-2	1.29E-2	8.24E-3	81.40%	
Daejeon		11	0.41	0.97	8.91E-2	5.66E-2	3.15E-2	1.56E-2	1.06E-2	89.72%	
Busan	7	10	0.25	0.74	6.58E-2	3.67E-2	1.80E-2	7.78E-3	4.40E-3	61.70%	
Seoul		11	0.53	1.10	1.03E-1	6.96E-2	4.13E-2	2.15E-2	1.60E-2	108.32%	
Ulsan		9	0.30	0.81	7.74E-2	4.40E-2	2.22E-2	9.73E-3	5.59E-3	70.47%	
Incheon		11	0.26	0.77	6.63E-2	3.84E-2	1.91E-2	8.73E-3	5.01E-3	64.42%	
Jeju		9	0.25	0.74	6.82E-2	3.74E-2	1.82E-2	7.43E-3	4.13E-3	61.58%	
Gangn.			10	0.30	0.82	7.57E-2	4.40E-2	2.24E-2	1.03E-2	6.08E-3	71.42%
Gwangju			11	0.22	0.71	5.99E-2	3.34E-2	1.64E-2	6.99E-3	4.03E-3	57.86%
Daegu		9	0.50	1.05	1.05E-1	6.86E-2	3.84E-2	1.90E-2	1.30E-2	102.47%	
Daejeon	8	10	0.41	0.96	9.01E-2	5.65E-2	3.13E-2	1.53E-2	9.96E-3	88.92%	
Busan		9	0.24	0.72	6.69E-2	3.65E-2	1.73E-2	7.22E-3	3.79E-3	60.10%	
Seoul		11	0.35	0.90	8.07E-2	4.95E-2	2.70E-2	1.27E-2	8.37E-3	80.35%	
Ulsan		9	0.22	0.69	6.33E-2	3.39E-2	1.57E-2	6.53E-3	3.40E-3	56.79%	
Incheon		10	0.25	0.75	6.69E-2	3.80E-2	1.88E-2	8.17E-3	4.54E-3	63.11%	
Jeju		9	0.28	0.79	7.51E-2	4.24E-2	2.09E-2	9.06E-3	5.20E-3	68.08%	
Gangn.			9	0.18	0.61	5.42E-2	2.75E-2	1.22E-2	4.75E-3	2.26E-3	48.22%
Gwangju		5	0.49	0.98	1.29E-1	7.59E-2	3.69E-2	1.52E-2	7.91E-3	98.34%	
Daegu		6	0.28	0.75	8.65E-2	4.46E-2	1.95E-2	7.33E-3	3.42E-3	65.62%	
Daejeon	9	7	0.24	0.71	7.41E-2	3.84E-2	1.69E-2	6.40E-3	3.10E-3	59.66%	
Busan		6	0.23	0.68	7.56E-2	3.69E-2	1.54E-2	5.52E-3	2.41E-3	56.78%	
Seoul		5	0.63	1.11	1.46E-1	9.20E-2	4.86E-2	2.19E-2	1.25E-2	117.85%	
Ulsan		7	0.19	0.61	6.15E-2	2.98E-2	1.23E-2	4.45E-3	1.87E-3	49.15%	
Incheon		6	0.23	0.68	7.57E-2	3.72E-2	1.55E-2	5.62E-3	2.33E-3	56.96%	
Jeju		7	0.32	0.82	8.88E-2	4.86E-2	2.32E-2	9.56E-3	4.89E-3	72.64%	

Table A.2 Weather-derivative-type weather insurance price (July-September)

City	Month	Mean of precipitation	Standard deviation	Strike $\mu + 0.5\sigma$	Cap $\mu + 3\sigma$	Percentile					Weather-derivative-type insurance		
						80%	85%	90%	95%	99%	Mean	Stdev.	
Gangn.		245.02	148.02	32	69	3	6	11	18	34	2.69	6.66	
Gwangju		306.72	152.56	38	76	4	8	12	20	37	3.14	7.32	
Daegu		272.84	162.40	35	76	4	8	13	22	41	3.39	8.03	
Daejeon		292.07	134.83	36	70	3	6	11	17	31	2.66	6.28	
Busan	7	324.39	180.37	41	87	4	8	14	23	43	3.54	8.45	
Seoul		416.36	234.81	53	112	5	10	17	29	54	4.40	10.65	
Ulsan		236.85	118.99	30	59	2	5	9	14	27	2.16	5.28	
Incheon		335.05	192.24	43	91	4	9	15	26	48	3.86	9.24	
Jeju		238.09	168.68	32	74	3	8	14	23	42	3.44	8.35	
Gangn.			295.89	203.90	40	91	2	6	12	21	40	3.04	8.00
Gwangju			302.17	143.26	37	73	5	8	13	21	36	3.32	7.47
Daegu		251.92	139.65	32	67	3	7	12	19	35	2.95	6.93	
Daejeon		290.20	177.98	38	82	4	8	14	24	44	3.58	8.64	
Busan	8	252.64	189.21	35	82	3	8	15	26	47	3.77	9.37	
Seoul		362.93	257.84	49	114	4	11	19	33	63	4.86	12.10	
Ulsan		231.85	166.28	31	73	3	8	13	23	42	3.42	8.27	
Incheon		285.25	176.30	37	81	5	10	16	27	44	4.01	9.35	
Jeju		264.79	141.02	34	69	3	6	11	18	34	2.74	6.64	
Gangn.			241.70	174.07	33	76	5	12	20	36	43	4.81	10.93
Gwangju			145.49	114.64	20	49	3	6	11	18	29	2.62	6.30
Daegu		142.73	124.35	20	52	3	6	11	20	32	2.84	6.89	
Daejeon		150.72	122.75	21	52	3	6	12	21	31	2.93	7.03	
Busan	9	149.24	104.58	20	46	3	5	10	16	26	2.38	5.64	
Seoul		166.19	161.16	25	65	1	6	12	23	40	3.15	8.19	
Ulsan		167.73	110.12	22	50	3	6	10	17	28	2.53	5.94	
Incheon		148.56	132.91	22	55	1	5	10	19	33	2.64	6.80	
Jeju		208.29	187.14	30	77	3	8	15	27	47	3.85	9.68	

Table A.3 Mixed-type precipitation insurance price (July-September)

City	Month	Relative Frequency			Mean	Variance	Percentile (unit: 1,000won)				
		Contract A	Contract B	Sum			80%	85%	90%	95%	99%
Gangn.	7	0.267	0.7106	0.9776	438,691	654,102	800	900	1,000	1,800	3,400
Gwangju		0.253	0.7266	0.9797	536,768	709,790	900	1,000	1,200	2,000	3,700
Daegu		0.2285	0.7533	0.9818	588,884	766,283	1,000	1,000	1,300	2,200	4,100
Daejeon		0.2006	0.7787	0.9793	529,558	613,421	1,000	1,000	1,100	1,700	3,100
Busan		0.3243	0.6534	0.9777	500,195	825,803	800	1,000	1,400	2,300	4,300
Seoul		0.209	0.7787	0.9877	756,965	992,311	1,000	1,000	1,700	2,900	5,400
Ulsan		0.1824	0.7938	0.9761	443,860	534,231	800	1,000	1,000	1,400	2,700
Incheon		0.3313	0.6485	0.9798	534,679	900,465	800	1,000	1,500	2,600	4,800
Jeju		0.3776	0.5973	0.9749	441,205	819,335	600	900	1,300	2,300	4,200
Gangn.		8	0.1894	0.7969	0.9863	619,778	762,927	1,000	1,000	1,200	2,100
Gwangju	0.2934		0.6855	0.9789	527,483	724,406	900	1,000	1,300	2,100	3,600
Daegu	0.1968		0.7856	0.9824	577,640	660,444	1,000	1,000	1,200	1,900	3,500
Daejeon	0.2205		0.7626	0.9832	599,673	826,061	1,000	1,000	1,400	2,400	4,400
Busan	0.3701		0.6103	0.9805	488,361	918,231	600	1,000	1,500	2,600	4,700
Seoul	0.3073		0.6777	0.985	657,387	1,171,758	800	1,100	1,900	3,300	6,300
Ulsan	0.3389		0.6404	0.9793	478,153	807,243	800	1,000	1,300	2,300	4,200
Incheon	0.3754		0.6039	0.9794	525,670	913,906	800	1,000	1,600	2,700	4,400
Jeju	0.2292		0.7517	0.9809	505,249	645,307	800	1,000	1,100	1,800	3,400
Gangn.	9		0.5087	0.473	0.9817	545,668	1,077,493	700	1,200	2,100	3,600
Gwangju		0.1464	0.8382	0.9845	581,593	593,993	1,000	1,000	1,100	1,800	2,900
Daegu		0.222	0.7561	0.9781	467,512	667,579	800	800	1,100	2,000	3,200
Daejeon		0.3215	0.6501	0.9717	404,705	689,783	600	800	1,200	2,100	3,100
Busan		0.2465	0.7227	0.9692	378,839	553,757	600	800	1,000	1,600	2,600
Seoul		0.2071	0.778	0.9851	548,159	786,775	800	1,000	1,200	2,300	4,000
Ulsan		0.2624	0.7116	0.974	421,721	587,220	800	800	1,000	1,700	2,800
Incheon		0.3701	0.6035	0.9736	350,717	671,666	500	700	1,000	1,900	3,300
Jeju		0.282	0.7005	0.9826	545,029	941,142	800	1,000	1,500	2,700	4,700

Table A.4 Conditional precipitation insurance price (July-September)

City	Month	Daily precipitation		Threshold	Weather derivatives		Reward		Percentile (Reward)				
		Mean	St. Dev.		Strike	Cap	Mean	St. Dev.	80	85	90	95	99
Gangn.	7	20.45	9.30	25.10	32	69	2.52	6.64	0	5	10	18	34
Gwangju		24.26	9.50	29.01	38	76	2.85	7.28	0	6	12	20	37
Daegu		22.28	10.08	27.32	35	76	3.21	8.02	2	7	13	22	41
Daejeon		22.76	8.37	26.94	36	70	2.35	6.23	0	5	10	17	31
Busan		29.53	10.87	34.97	41	87	3.25	8.42	0	7	14	23	43
Seoul		29.55	11.42	35.26	53	112	4.31	10.64	4	10	17	29	54
Ulsan		23.10	9.08	27.64	30	59	1.77	5.15	0	1	7	14	27
Incheon		27.45	11.71	33.30	43	91	3.65	9.24	1	8	15	26	48
Jeju		24.14	11.39	29.84	32	74	3.32	8.36	2	7	14	23	42
Gangn.		8	24.21	13.80	31.11	40	91	2.80	7.96	0	4	11	21
Gwangju	24.69		10.80	30.10	37	73	2.91	7.41	0	6	13	21	36
Daegu	22.36		10.70	27.71	32	67	2.72	6.92	0	6	12	19	35
Daejeon	23.39		10.27	28.53	38	82	3.47	8.65	2	8	14	24	44
Busan	26.13		17.92	35.08	35	82	3.52	9.38	0	7	15	26	47
Seoul	28.39		14.60	35.69	49	114	4.75	12.11	3	10	19	33	63
Ulsan	22.98		13.67	29.82	31	73	3.20	8.26	0	7	13	23	42
Incheon	26.39		14.95	33.86	37	81	3.73	9.36	0	8	16	27	44
Jeju	24.84		11.05	30.36	34	69	2.52	6.61	0	5	11	18	34
Gangn.	9		24.78	14.02	31.79	33	76	4.74	10.95	5	12	21	36
Gwangju		19.54	13.71	26.39	20	49	2.37	6.29	0	4	10	18	29
Daegu		17.30	11.11	22.86	20	52	2.80	6.91	2	6	11	20	32
Daejeon		17.83	11.11	23.38	21	52	2.88	7.04	2	6	12	21	31
Busan		20.79	9.28	25.43	20	46	2.24	5.63	1	5	9	16	26
Seoul		22.59	17.95	31.56	25	65	3.05	8.19	0	5	12	23	40
Ulsan		21.17	12.68	27.51	22	50	2.15	5.86	0	3	9	17	28
Incheon		21.99	19.31	31.64	22	55	2.50	6.80	0	4	10	19	33
Jeju		23.49	15.91	31.44	30	77	3.78	9.69	2	8	15	27	47

References

- Alaton, P., Djehiche, B. and Stillberger, D. (2002). On modelling and pricing weather derivatives. *Applied Mathematical Finance*, **9**, 1-20.
- Benth, F. E. and Saltytè-Benth, J. (2007). The volatility of temperature and pricing of weather derivatives. *Quantitative Finance*, **7**, 553-561.
- Berg, D. and Bakken, H. (2006). *Copula goodness-of-fit tests: A comparative study*, Department of Mathematics, University of Oslo, Oslo, Norway.

- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-655.
- Bouye, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. and Roncalli, T. (2000). *Copulas for finance: A reading guide and some applications*, Groupe de recherche opérationnelle crédit Lyonnais, Paris.
- Brockett, P. L., Golden, L. L., Wen, M. and Yang, C. C. (2009). Pricing weather derivatives using the indifference pricing approach. *North American Actuarial Journal*, **13**, 303-315.
- Cao, M. and Wei, J. (2000). Pricing the weather. *Risk*, **13**, 67-70.
- Cao, M., Li, A. and Wei, J. (2004). Precipitation modeling and contract valuation: A frontier in weather derivatives. *The Journal of Alternative Investments*, **7**, 93-99.
- Carmona, R. and Diko, P. (2005). Pricing precipitation based derivatives. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **8**, 959-988.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Choi, C., Shin, D. and Kim, C. (2012). Managing weather-risks in Korean city-gas industry using weather derivatives. *Korean Journal of Futures and Options*, **20**, 451-481.
- Demarta, S. and McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review*, **73**, 111-129.
- Durrleman, V., Nikeghbali, A. and Roncalli, T. (2000). *Which copula is the right one?* Groupe de recherche opérationnelle crédit Lyonnais, Paris.
- Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Volume 1, edited by S. Rachev, Elsevier, Amsterdam, 331-385.
- Fowler, H. J., Kilsby, C. G. and O'Connell, P. E. (2000). A stochastic rainfall model for the assessment of regional water resource systems under changed climatic conditions. *Hydrology and Earth System Sciences*, **4**, 263-282.
- Frees, E. and Valdez, E. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Review*, **2**, 1-25.
- Genest, C., Quessy, J.-F. and RéMillard, B. (2006). Goodness-of-fit procedures for copula models based on the probability integral transformation. *Scandinavian Journal of Statistics*, **33**, 337-366.
- Geweke, J. (1991). *Efficient simulation from the multivariate normal and student-t distributions subject to linear constraints and the evaluation of constraint probabilities*, Computing science and statistics: The twenty-third symposium on the interface, Seattle.
- Kim, E. and Lee, T. (2011). A numerical study on portfolio VaR forecasting based on conditional copula. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **22**, 1065-1074.
- Klugman, S., Panjer, H. and Willmot, G. (2008). *Loss models: From data to decisions*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Lee, C., Kwon, H. and Ha, H. (2008). A study on weather insurance pricing based on stochastic temperature modeling. *Journal of Insurance Studies*, **19**, 55-76.
- Lee, I. and Kim, S. (2004). Properties of extended gamma distribution, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **15**, 753-758.
- Lee, J. (2002). A study on the valuation of the CDD/HDD weather options. *Korean Journal of Financial Studies*, **31**, 229-255.
- Leobacher, G. and Ngare, P. (2011). On modeling and pricing rainfall derivatives with seasonality. *Applied Mathematical Finance*, **18**, 71-91.
- Malevergne, Y. and Sornette, D. (2006). *Extreme financial risks: From dependence to risk management*, Springer, Heidelberg.
- Martin, S. W., Barnett, B. J. and Coble, K. H. (2001). Developing and pricing precipitation insurance. *Journal of Agricultural and Resource Economics*, **26**, 261-274.
- Moller, T. (2003). Indifference pricing of insurance contracts in a product space model. *Finance and Stochastics*, **7**, 197-217.
- Moore, K. S. and Young, V. R. (2003). Pricing equity-linked pure endowments via the principle of equivalent utility. *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 497-516.
- Nelsen, R. B. (1999). *An introduction to copulas*, Springer, New York.
- Sanso, B. and Guenni, L. (1999). A stochastic model for tropical rainfall at a single location. *Journal of Hydrology*, **214**, 64-73.
- Schmidt, T. (2007). Coping with copulas. In *Copulas: From Theory to Applications in Finance*, edited by J. Rank, Risk Books, Torquay, 3-34.
- Schölzel, C. and Friederichs, P. (2008). Multivariate non-normally distributed random variables in climate

- research: Introduction to the copula approach. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **15**, 761-772.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition n dimensions et leurs marges. *Publications de l'institut de statistique de l'université de Paris*, **8**, 229-231.
- Stowasser, M. (2012). Modelling rain risk: A multi-order Markov chain model approach. *Journal of Risk Finance*, **13**, 45-60.
- Trivedi, P. and Zimmer, D. (2005). Copula modeling: An introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics*, **1**, 61-64.
- Wilks, D. S. (1998). Multi site generalization of a daily stochastic precipitation generation model. *Journal of Hydrology*, **210**, 178-191.
- Young, V. R. (2003). Equity-indexed life insurance: pricing and reserving using the principle of equivalent utility. *North American Actuarial Journal*, **7**, 68-86.

Analyzing rainfall patterns and pricing rainfall insurance using copula[†]

Changhui Choi¹ · Hangsuck Lee² · Hyo Chan Ju³

¹KWeather Inc.

²Department of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University

³Department of Mathematics, Sungkyunkwan University

Received 4 February 2013, revised 8 April 2013, accepted 21 May 2013

Abstract

This paper proposes analyzing monthly rainfall patterns using copula and pricing related rainfall insurance using it. We analyze 30-year monthly precipitation data for 9 Korean cities between June and September using copula showing so that it can effectively generate realistic monthly rainfall patterns. In addition, we show that our copula rainfall models can be used in pricing various kinds of rainfall insurances effectively.

Keywords: Copula, pricing insurance, rainfall (precipitation) insurance, simulation, weather insurance.

[†] This research was supported by Korea Meteorological Industry Promotion Agency (No. KMIPA-2012-1207).

¹ Manager, Kweather Inc., Seoul 152-740, Korea.

² Corresponding author: Associate professor, Department of Actuarial Science/Mathematics, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea. E-mail: hangsuck@skku.edu

³ Graduate assistant, Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Seoul 110-745, Korea.