

공정능력지수 \hat{C}_p , \hat{C}_{pk} 와 \hat{C}_{pm} 를 위한 점근적 상관성에 관한 연구[†]

조중재¹ · 유혜경²

¹충북대학교 정보통계학과 · ²질병관리본부 에이즈중양바이러스과
접수 2013년 3월 20일, 수정 2013년 4월 11일, 게재확정 2013년 4월 21일

요약

공정능력을 측정하고 분석하기 위하여 공정능력지수가 매우 중요한 역할을 한다. 흔히 품질수준은 공정능력지수들에 의해 측정된다. 세 가지 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 들은 품질 현장에서 프로세스 성과를 평가하는 데 널리 유용하게 사용되는 바, 이들 추정량들의 상관관계를 보다 명확하게 규명, 연구하여 적절히 활용할 필요가 있다. 본 논문에서는 공정표본이 정규분포에 따를 때 이러한 지수들의 추정량들에 대한 점근적 상관성을 연구하였다. 제2절에서는 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 들을 정의하여 기본적인 관계를 설명하였고, 제3절에서는 단일변량 정규공정하에서의 점근적인 상관계수를 구체적으로 계산, 규명하였다. 이러한 연구결과를 이용하여 보다 정확한 공정능력지수들의 상관관계를 통해 필요한 분석을 수행하는 것이 바람직할 것이다.

주요용어: 공정능력분석, 공정능력지수, 극한분포, 점근적 상관성, 품질수준.

1. 서론

공정능력분석은 응용 통계학 분야인 통계적 품질관리와 품질경영, 나아가 6시그마에서도 매우 중요한 분석영역이라고 할 수 있다. 고객들은 일반적으로 보다 높은 품질 수준이 보다 높은 고객 만족으로 이어져 개선된 성과를 내는 것으로 인식하고 있다. 어떤 종류의 공정에서나 품질특성이 완전히 일치하는 제품이나 서비스를 동일하게 반복해서 생산해 낼 수는 없을 것이다. 왜냐하면 제품이나 서비스를 생산하기 위한 방법과 작업자, 설비, 재료, 환경 등에 의해 품질 특성에 많은 영향을 주기 때문에 필연적으로 품질변동이 발생할 수밖에 없을 것이다. 품질변동을 고려한 공정분포를 기초로 하여 공정능력을 측정하고 분석하기 위하여 공정능력지수는 매우 중요한 역할을 한다. 공정능력이란 제조공정이 제품의 설계과정에 설정한대로 얼마나 균일한 제품을 생산할 수 있는지를 반영하는 공정의 고유능력 즉, 균일성을 의미한다. 이처럼 고유능력을 평가하기 위해서 이를 공정의 변동과 제품의 규격한계, 목표치 등으로 공정능력을 평가하는 것을 공정능력분석이라 하고, 이를 정량적으로 표현한 것이 공정능력지수 (process capability index)이다.

가장 기본적인 공정능력지수 C_p 는 제1세대 지수로서 Juran (1974)에 의해 제안되었다. 이어 공정능력지수 C_p 를 보완하여 제2세대 지수들인 C_{pk} 와 C_{pm} 이 제안되어 (Kane, 1986; Chan 등, 1988) 널리 사용되고 있다. 그리고 나아가 제3세대 공정능력지수인 C_{pmk} 이 제안되고 그 외 여러 가지 다양한 공

[†] 이 논문은 2011년도 충북대학교 학술연구지원 사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

¹ 교신저자: (361-763) 충북 청주시 흥덕구 내수동로 52, 충북대학교 정보통계학과, 교수.

Email: jjcho@chungbuk.ac.kr

² (363-951) 충북 청원군 오송읍 오송생명 2로 187, 질병관리본부 에이즈중양바이러스과, 선임연구원.

정능률지수들이 여러 학자들에 의해 제안, 연구되고 있는 실정이다 (Pearn 등, 1992; Kotz와 Johnson, 1993; Park 등, 2002; Shahriari와 Abdollahzadeh, 2009).

또한 Chan 등 (1990)은 몇 가지 추정된 공정능률지수들과 관련된 극한분포 결과를 유도하였다.

본 논문에서는 공정능률지수 C_p 와 C_{pm} 그리고 C_{pk} 의 추정량들의 점근적 상관관계에 대하여 연구하였다. 먼저 2절에서는 이들 공정능률지수들의 기본적인 관계에 대하여 설명하였다. 그리고 3절에서는 단일변량 정규공정 하에서의 추정량 \hat{C}_{px} 와 \hat{C}_{pkx} , \hat{C}_{px} 와 \hat{C}_{pmx} 그리고 \hat{C}_{pmx} 와 \hat{C}_{pkx} 의 점근적인 상관관계를 규명, 연구하였다. 마지막으로 4절에서는 본 논문의 결론과 앞으로의 연구방향에 대하여 논하였다.

2. 공정능률지수들의 기본적인 관계

우선 평균 μ 이고 분산 σ^2 인 공정 모집단에 대하여 가장 기본적이고 많이 사용되고 있는 공정능률지수들인 C_p 와 C_{pk} 그리고 C_{pm} 은 다음과 같이 정의된다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma},$$

$$C_{pk} = \frac{\min(\mu - LSL, USL - \mu)}{3\sigma} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma},$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{USL - LSL}{6\tau} = \frac{d}{3\tau}$$

단, USL 와 LSL 은 각각 위의 공정에 대한 규격상한과 규격하한을 나타낸다. 또한 상수 d 와 M 그리고 τ^2 는 각각 다음을 뜻하며 상수 T 는 목표치이다.

$$d = \frac{USL - LSL}{2}, \quad M = \frac{USL + LSL}{2}, \quad \tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2$$

특히 단일변량 정규공정 $N(\mu, \sigma^2)$ 하에서 공정능률지수 C_p 와 결함율 (proportion of nonconforming items) 그리고 6 시그마 품질수준과의 관계는 다음 Table 2.1과 같다.

Table 2.1 Index C_p , proportion of nonconforming items & quality level

C_p	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
$2\Phi(-3C_p)$	31.73%	4.55%	0.27%	63ppm	0.57ppm	0.002ppm
quality level	1 σ level	2 σ level	3 σ level	4 σ level	5 σ level	6 σ level

한편, 공정능률지수 C_p 와 C_{pk} 그리고 C_{pm} 의 정의로부터 다음의 식이 성립한다.

$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \left(1 - \frac{|\mu - M|}{d} \right) \leq \frac{d}{3\sigma} = C_p,$$

$$C_{pm} = \frac{d}{3\tau} = \frac{d}{3\sigma\tau} = \frac{d}{3\sigma} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \leq \frac{d}{3\sigma} = C_p$$

즉 일반적으로 공정능률지수 C_p 는 지수 C_{pk} 와 C_{pm} 보다는 크다고 할 수 있으며, 그 정도는 공정모수 μ , σ^2 와 그리고 상수 d 와 M , 목표치 T 의 크기에 따라 영향을 받는다. 또한 위의 식으로부터 다음 관계식

이 성립된다.

$$C_{pk} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \left(1 - \frac{|\mu - M|}{d}\right) = C_{pm} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2} \left(1 - \frac{|\mu - M|}{d}\right)$$

그러므로 공정능력지수 C_{pk} 는 공정모수 μ , σ^2 와 그리고 상수 d 와 M , 목표치 T 의 크기에 따라 공정능력지수 C_{pm} 보다 크거나 같을 수도 있고 작을 수도 있을 것이다.

3. 단일변량 정규공정 하에서의 상관관계

단일변량 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 의 모집단으로부터의 크기 n 의 확률표본 X_1, X_2, \dots, X_n 에 대하여 표본평균 \bar{X} 와 표본분산 S_x^2 을 다음과 정의한다.

$$\hat{\mu}_x = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}_x^2 = S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

이들 표본평균 \bar{X} 와 표본분산 S_x^2 을 기초로 공정능력지수 C_p 와 C_{pk} 그리고 C_{pm} 의 추정량들은 각각 플러그-인 (plug-in) 방법에 의해 다음과 같이 추정된다.

$$\hat{C}_p = \hat{C}_{px} = \frac{d_x}{3S_x}, \quad \hat{C}_{pk} = \hat{C}_{pkx} = \frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3S_x},$$

$$\hat{C}_{pm} = \hat{C}_{pmx} = \frac{USL_x - LSL_x}{6\sqrt{S_x^2 + (\bar{X} - T_x)^2}} = \frac{d_x}{3\hat{\tau}_x}$$

단, USL_x 와 LSL_x 은 각각 위의 공정변수 X 에 대한 규격상한과 규격하한을 나타낸다. 또한 상수 d_x 와 M_x 그리고 τ_x^2 는 각각 다음을 뜻하며 T_x 는 목표치이다.

$$d_x = \frac{USL_x - LSL_x}{2}, \quad M_x = \frac{USL_x + LSL_x}{2}, \quad \hat{\tau}_x^2 = S_x^2 + (\bar{X} - T_x)^2.$$

따라서 일변량 공정능력지수들인 \hat{C}_p 와 \hat{C}_{pk} 그리고 \hat{C}_{pm} 와 관련된 점근적 상관성에 대한 연구 (정리 3.1, 정리 3.2, 정리 3.3)를 위해 다음의 보조정리 3.1을 이용하여 규명할 것이다.

보조정리 3.1 만약 4차 중심적률 $\mu_{4x} = E(X - \mu_x)^4$ 이 존재하는 조건하에서 표본의 크기 n 이 $n \rightarrow \infty$ 일 때, 다음의 결과가 성립된다 (증명은 Serfling (1980)의 제2장을 참고).

$$(Z_n, W_n) = (\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_x), \sqrt{n}(S_x^2 - \sigma_x^2)) \xrightarrow{d} (Z, W) \stackrel{d}{=} MN\left(\mathbf{0}, \sum_{2 \times 2}\right)$$

단, 공분산 행렬 $\sum_{2 \times 2} = (\sigma_{ij})_{2 \times 2}$ 은 다음과 같은 각각의 성분을 갖는다.

$$\sigma_{11} = \text{Var}(X) = \sigma_x^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = E(X - \mu_x)^3 = \mu_{3x}, \quad \sigma_{22} = \mu_{4x} - \sigma_x^4$$

나아가 위의 보조정리 3.1을 이용하여 가장 기본적인 두 공정능력지수 \hat{C}_p 와 \hat{C}_{pk} 의 점근적 상관계수를 계산, 규명한 연구결과는 다음의 정리 3.1과 같다.

정리 3.1 일변량 공정 표본 X_1, X_2, \dots, X_n 가 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 에 따른다면, 두 공정능력지수 $\hat{C}_{px} = \frac{d_x}{3S_x}$ 와 $\hat{C}_{pkx} = \frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3S_x}$ 의 상관계수 $\text{corr}(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pkx})$ 는 표본의 크기 n 이 충분히 클 때, 다음의 결과가 성립한다 (증명은 부록을 참고할 것).

히 클 때, 다음의 결과가 성립한다.

$$\text{corr}(\widehat{C}_{px}, \widehat{C}_{pmx}) \doteq \frac{1}{\sqrt{\left(1 + 2\left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x}\right)^2\right)}}$$

증 명: 기본적인 확률이론과 Slutsky 정리를 이용하면 다음 사실이 성립된다.

$$\sqrt{n}(\widehat{C}_{px} - C_{px}, \widehat{C}_{pmx} - C_{pmx}) \xrightarrow{d} \left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}W, -\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z)\right)$$

물론, 확률변수 Z 와 W 는 보조정리의 $(Z, W) \stackrel{d}{=} MN(\mathbf{0}, \Sigma_{2 \times 2})$ 이다. 그러므로 근사적인 상관계수의 계산에 필요한 분산과 공분산은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ppm11}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}W\right) = \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}(\mu_{4x} - \sigma_x^4), \\ \sigma_{ppm22}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z)\right) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^6}((\mu_{4x} - \sigma_x^4) + 4(\mu_x - T_x)\mu_{3x} + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2), \\ \sigma_{ppm12} &= \sigma_{ppm21} = \text{Cov}\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}W, -\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z)\right) \\ &= \frac{d_x^2}{36\sigma_x^3\tau_x^3}\text{Cov}(W, W + 2(\mu_x - T_x)Z) \\ &= \frac{d_x^2}{36\sigma_x^3\tau_x^3}[(\mu_{4x} - \sigma_x^4) + 2(\mu_x - T_x)\mu_{3x}] \end{aligned}$$

따라서 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 하에서 공정능력지수 \widehat{C}_{px} 와 \widehat{C}_{pmx} 의 점근적 상관계수 ρ_{ppmx} 는 다음의 식으로 계산된다.

$$\begin{aligned} \rho_{ppmx} &= \text{corr}(\widehat{C}_{px}, \widehat{C}_{pmx}) \doteq \frac{\sigma_{ppm12}/n}{\sqrt{\sigma_{ppm11}^2/n}\sqrt{\sigma_{ppm22}^2/n}} \\ &= \frac{\frac{d_x^2}{36\sigma_x^3\tau_x^3}[(\mu_{4x} - \sigma_x^4) + 2(\mu_x - T_x)\mu_{3x}]}{\sqrt{\frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}(\mu_{4x} - \sigma_x^4)}\sqrt{\frac{d_x^2}{36\tau_x^6}((\mu_{4x} - \sigma_x^4) + 4(\mu_x - T_x)\mu_{3x} + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2)}} \\ &= \frac{(2\sigma_x^4)}{\sqrt{2\sigma_x^4}\sqrt{2\sigma_x^4 + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x}\right)^2}} \end{aligned}$$

즉, 공정능력지수 \widehat{C}_{px} 와 \widehat{C}_{pmx} 의 점근적 상관계수 $\text{corr}(\widehat{C}_{px}, \widehat{C}_{pmx})$ 는 양의 상관관계를 나타내고 있다. 특히 공정평균 μ_x 와 목표치 T_x 가 가까울수록 그리고 공정분산 σ_x^2 가 큰 값일수록 상관계수

$corr(\hat{C}_{px}, \hat{C}_{pmx})$ 는 아주 강한 양의 상관관계를 나타낸다. 또한 아래의 Figure 3.2는 정리 3.2의 연구결과를 기초로 공정능력지수 \hat{C}_p 와 \hat{C}_{pm} 의 점근적인 상관성 그림을 대략적으로 알기쉽게 시각적으로 표현한 결과이다. 단, Figure 3.2에서 변수 A 는 σ_x 이며, 변수 B 는 $\mu_x - T_x$ 을 나타낸다.

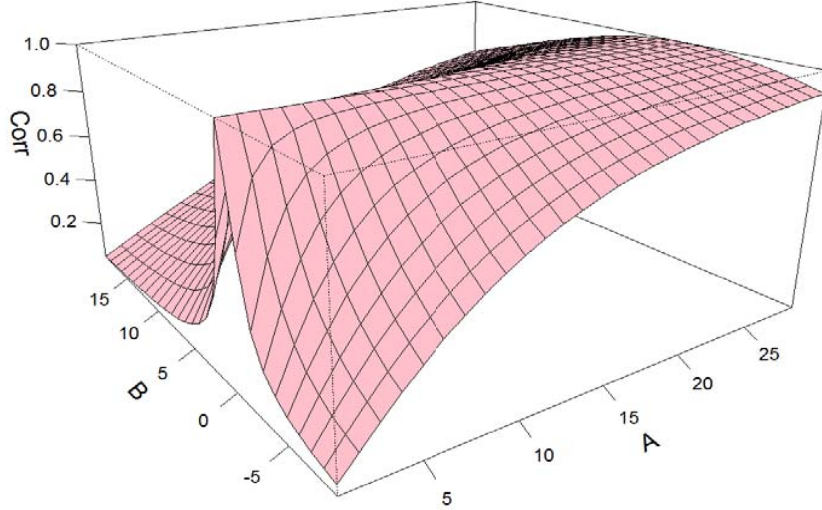


Figure 3.2 Asymptotic correlation coefficient of two indices \hat{C}_{px} & \hat{C}_{pmx}

그리고 중요한 두 공정능력지수 \hat{C}_p 와 \hat{C}_{pm} 의 점근적 상관성을 규명, 연구한 결과는 다음의 정리 3.3과 같다.

정리 3.3 일변량 공정 표본 X_1, X_2, \dots, X_n 가 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 에 따른다면, 두 공정능력지수 $\hat{C}_{pmx} = \frac{d_x}{3\sqrt{S_x^2 + (\bar{X} - T)^2}} = \frac{d_x}{3\hat{\tau}_x}$ 와 $\hat{C}_{pkx} = \frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3S_x}$ 의 근사적인 상관계수 $corr(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx})$ 는 표본의 크기 n 이 충분히 클 때, 다음의 결과가 성립한다. (증명은 부록을 참고할 것)

$$(1) \text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx}) = \frac{1 - 2 \left(\frac{\mu_x - T_x}{d_x - |M_x - \mu_x|} \right) \text{sgn}(M_x - T_x)}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x} \right)^2} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\sigma_x}{d_x - |M_x - \mu_x|} \right)^2}} \quad (\mu_x \neq M_x \text{인 경우})$$

(단, $d_x - |M_x - \mu_x| > 0$ 인 경우에 성립되고, $d_x - |M_x - \mu_x| \leq 0$ 인 경우는 강한 음의 상관관계를 나타내는 바, 실제 상황에서는 거의 발생되지 않는다.)

$$(2) \text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x} \right)^2} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\pi - 2}{\pi} \right) \left(\frac{\sigma_x}{d_x} \right)^2}} \quad (\mu_x = M_x \text{인 경우})$$

즉 $\mu_x \neq M_x$ 인 (1)의 경우, 두 공정능력지수 $\hat{C}_{pmx} = \frac{d_x}{3\sqrt{S_x^2 + (\bar{X} - T)^2}} = \frac{d_x}{3\hat{\tau}_x}$ 와 $\hat{C}_{pkx} = \frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3S_x}$ 의 근사적인 상관계수 $corr(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx})$ 는 표본의 크기 n 이 충분히 클 때, 위에서 유도된 공정평균 μ_x 와 상수 $M_x = (LSL_x + USL_x)/2$, $d_x = (USL_x - LSL_x)/2$, 목표치 T_x 그리고 공정분산 σ_x^2 의 함수로서 표현된다.

특히 공정평균 μ_x 와 목표치 T_x 의 값이 같을 경우, 표본의 크기 n 이 충분히 클 때 상관계수 $\text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx})$ 의 근사적인 크기는 상관계수 $\text{corr}(\hat{C}_p, \hat{C}_{pkx})$ 의 근사적인 크기와 정확하게 같음을 알 수 있다.

그리고 $\mu_x = M_x$ 인 (2)의 경우, 두 공정능력지수 $\hat{C}_{pmx} = \frac{d_x}{3\sqrt{S_x^2 + (\bar{X} - T)^2}} = \frac{d_x}{3\bar{\sigma}_x}$ 와 $\hat{C}_{pkx} = \frac{d_x - |\bar{X} - M_x|}{3S_x}$ 의 근사적인 상관계수 $\text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx})$ 는 표본의 크기 n 이 충분히 클때, 위에서 유도된 공정평균 μ_x 와 상수 π , $d_x = (USL_x - LSL_x)/2$, 목표치 T_x 그리고 공정분산 σ_x^2 의 함수로서 표현된다.

특히 공정평균 μ_x 와 목표치 T_x 의 값이 같을 경우, 표본의 크기 n 이 충분히 클 때 상관계수 $\text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx})$ 의 근사적인 크기는 상관계수 $\text{corr}(\hat{C}_p, \hat{C}_{pkx})$ 의 근사적인 크기와 정확하게 같음을 알 수 있다.

4. 결론과 앞으로의 연구방향

가장 중요하고 기본적인 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 등에 대한 통계적 추정 및 가설검정문제는 많은 연구가 이루어지고 있지만 이들 공정능력지수들의 점근적 상관관계에 대한 연구가 매우 미흡한 실정이다.

본 논문에서는 이들 공정능력지수 C_p , C_{pk} , C_{pm} 등의 추정량들에 대하여 정규공정 하에서 구체적으로 점근적 상관계수들을 유도, 연구하였다. 나아가 연구결과를 기초로 그림을 통해 그리고 적당한 조건 하에서 강한 양의 상관관계가 있음을 보다 구체적으로 규명, 설명하였다.

이번 연구 결과가 현장에서 보다 효율적으로 활용된다면 활발한 공정능력분석에 많은 기여를 할 수 있을 것이다. 또한 6 시그마 경영혁신 프로젝트 수행 시 측정단계나 개선단계 등에서의 과학적인 의사결정 시 매우 중요하게 널리 활용될 수 있을 것이다. 그리고 앞으로 이변량 확률분포 하에서의 공정능력지수들의 추정량 \hat{C}_p 와 \hat{C}_{pm} , 그리고 \hat{C}_{pk} 등의 점근적인 상관관계에 대한 연구는 이론적으로 혹은 응용적으로 매우 유용한 연구가 될 수 있을 것이다.

부록

우선 정리 3.3의 증명과정은 다음과 같다.

증명: (1) $\mu_x \neq M_x$ 인 경우, 기본적인 확률이론과 Slutsky 정리를 이용하여 다음 사실이 성립됨을 쉽게 밝힐 수 있을 것이다.

$$\sqrt{n}(\hat{C}_{pmx} - C_{pmx}, \hat{C}_{pkx} - C_{pkx}) \xrightarrow{d} \left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z), \frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)}{6\sigma_x^3}W + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{3\sigma_x}Z \right)$$

물론, 확률변수 Z 와 W 는 보조정리 3.1의 $(Z, W) \stackrel{d}{=} MN(\mathbf{0}, \Sigma_{2 \times 2})$ 이다.

그러므로 근사적인 상관계수의 계산에 필요한 분산과 공분산은 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 하에서 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{pmk11}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z)\right) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^6}((\mu_{4x} - \sigma_x^4) + 4(\mu_x - T_x)\mu_{3x} + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^6}(2\sigma_x^4 + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{pmk22}^2 &= \text{Var}\left(\frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)}{6\sigma_x^3}W + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{3\sigma_x}Z\right) \\
&= \frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)^2}{36\sigma_x^6}(\mu_x^4 - \sigma_x^4) + \frac{1}{9\sigma_x^2}(\sigma_x^2) + \frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)}{9\sigma_x^4}\text{sgn}(M_x - \mu_x)\text{Cov}(Z, W) \\
&= \frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)^2}{18\sigma_x^2} + \frac{1}{9},
\end{aligned}$$

$$\sigma_{pmk12} = \sigma_{pmk21}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Cov}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z), \frac{(|M_x - \mu_x| - d_x)}{6\sigma_x^3}W + \frac{\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{3\sigma_x}Z\right) \\
&= \frac{d_x(d_x - |M_x - \mu_x|)}{36\tau_x^3\sigma_x^3}\text{Var}(W) - \frac{d_x}{18\tau_x^3\sigma_x}\text{sgn}(M_x - \mu_x)\text{Cov}(Z, W) \\
&\quad + \frac{d_x(\mu_x - T_x)(d_x - |M_x - \mu_x|)}{18\tau_x^3\sigma_x^3}\text{Cov}(Z, W) - \frac{d_x(\mu_x - T_x)}{9\tau_x^3\sigma_x}\text{sgn}(M_x - \mu_x)\text{Var}(Z) \\
&= \frac{d_x(d_x - |M_x - \mu_x|)}{36\tau_x^3\sigma_x^3}\text{Var}(W) - \frac{d_x(\mu_x - T_x)}{9\tau_x^3\sigma_x}\text{sgn}(M_x - \mu_x)\text{Var}(Z) \\
&= \frac{d_x(d_x - |M_x - \mu_x|)}{18\tau_x^3}(\sigma_x) - \frac{d_x(\mu_x - T_x)}{9\tau_x^3}(\sigma_x)\text{sgn}(M_x - \mu_x)
\end{aligned}$$

따라서 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 하에서 공정능력지수 \hat{C}_{pmx} 와 \hat{C}_{pkx} 의 점근적 상관계수 ρ_{pmkx} 는 다음의 식으로 계산된다.

$$\begin{aligned}
\rho_{pmkx} &= \text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx}) \doteq \frac{\sigma_{pmk12}/n}{\sqrt{\sigma_{pmk11}^2/n}\sqrt{\sigma_{pmk22}^2/n}} \\
&= \frac{\frac{d_x(d_x - |M_x - \mu_x|)}{18\tau_x^3}(\sigma_x) - \frac{d_x(\mu_x - T_x)}{9\tau_x^3}(\sigma_x)\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{\sqrt{\frac{d_x^2}{36\tau_x^6}(2\sigma_x^4 + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2)}\sqrt{\frac{(d_x - |M_x - \mu_x|)^2}{18\sigma_x^2} + \frac{1}{9}}} \\
&= \frac{(d_x - |M_x - \mu_x|)(\sigma_x) - 2\sigma_x(\mu_x - T_x)\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{\sqrt{\sigma_x^2 + 2(\mu_x - T_x)^2}\sqrt{(d_x - |M_x - \mu_x|)^2 + 2\sigma_x^2}} \\
&= \frac{(d_x - |M_x - \mu_x|) - 2(\mu_x - T_x)\text{sgn}(M_x - \mu_x)}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x}\right)^2}\sqrt{(d_x - |M_x - \mu_x|)^2 + 2\sigma_x^2}} \\
&= \frac{1 - 2\left(\frac{\mu_x - T_x}{d_x - |M_x - \mu_x|}\right)\text{sgn}(M_x - T_x)}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x}\right)^2}\sqrt{1 + 2\left(\frac{\sigma_x}{d_x - |M_x - \mu_x|}\right)^2}}
\end{aligned}$$

(2) $\mu_x = M_x$ 인 경우, 기본적인 확률이론과 Slutsky 정리를 이용하여 다음 사실이 성립됨을 쉽게 밝힐 수 있을 것이다.

$$\sqrt{n}(\hat{C}_{pmx} - C_{pmx}, \hat{C}_{pkx} - C_{pkx}) \xrightarrow{d} \left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z), -\frac{d_x}{6\sigma_x^3}W - \frac{1}{3\sigma_x}|Z|\right)$$

물론, 확률변수 Z 과 W 는 보조정리 3.1의 $(Z, W) \stackrel{d}{=} MN(\mathbf{0}, \Sigma_{2 \times 2})$ 이다.

그러므로 근사적인 상관계수의 계산에 필요한 분산과 공분산은 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 하에서 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\sigma_{pmk11}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z)\right) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^6}((\mu_{4x} - \sigma_x^4) + 4(\mu_x - T_x)\mu_{3x} + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^6}(2\sigma_x^4 + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2), \\ \sigma_{pmk22}^2 &= \text{Var}\left(-\frac{d_x}{6\sigma_x^3}W - \frac{1}{3\sigma_x}|Z|\right) \\ &= \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}\text{Var}(W) + \frac{1}{9\sigma_x^2}\text{Var}(|Z|) + \frac{d_x}{9\sigma_x^4}\text{Cov}(W, |Z|) \\ &= \frac{d_x^2}{36\sigma_x^6}(\mu_{4x} - \sigma_x^4) + \frac{1}{9\sigma_x^2}(E(|Z|^2) - (E(|Z|))^2) + \frac{d_x}{9\sigma_x^4}\text{Cov}(W, |Z|) \\ &= \frac{d_x^2}{18\sigma_x^2} + \frac{1}{9\sigma_x^2}\left[\sigma_x^2 - \frac{2}{\pi}\sigma_x^2\right] + 0 = \frac{d_x^2}{18\sigma_x^2} + \frac{\pi - 2}{9\pi}, \\ \sigma_{pmk12} &= \sigma_{pmk21} = \text{Cov}\left(-\frac{d_x}{6\tau_x^3}(W + 2(\mu_x - T_x)Z), -\frac{d_x}{6\sigma_x^3}W - \frac{1}{3\sigma_x}|Z|\right) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^3\sigma_x^3}\text{Var}(W) + \frac{d_x}{18\tau_x^3\sigma_x}\text{Cov}(W, |Z|) \\ &\quad + \frac{d_x^2(\mu_x - T_x)}{18\tau_x^3\sigma_x^3}\text{Cov}(Z, W) + \frac{d_x(\mu_x - T_x)}{9\tau_x^3\sigma_x}\text{Cov}(Z, |Z|) \\ &= \frac{d_x^2}{36\tau_x^3\sigma_x^3}(2\sigma_x^4) + 0 + 0 + 0 = \frac{d_x^2}{18\tau_x^3}(\sigma_x)\end{aligned}$$

따라서 정규공정 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ 하에서 공정능력지수 \hat{C}_{pmx} 와 \hat{C}_{pkx} 의 점근적 상관계수 ρ_{pmkx} 는 다음의 식으로 계산된다.

$$\begin{aligned}\rho_{pmkx} &= \text{corr}(\hat{C}_{pmx}, \hat{C}_{pkx}) = \frac{\sigma_{pmk12}/n}{\sqrt{\sigma_{pmk11}^2/n}\sqrt{\sigma_{pmk22}^2/n}} \\ &= \frac{\frac{d_x^2}{18\tau_x^3}(\sigma_x)}{\sqrt{\frac{d_x^2}{36\tau_x^6}(2\sigma_x^4 + 4(\mu_x - T_x)^2\sigma_x^2)}\sqrt{\frac{d_x^2}{18\sigma_x^2} + \frac{\pi - 2}{9\pi}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(\frac{\mu_x - T_x}{\sigma_x}\right)^2}\sqrt{1 + 2\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right)\left(\frac{\sigma_x}{d_x}\right)^2}}\end{aligned}$$

한편, 정리 3.1의 증명은 정리 3.3의 증명과정의 특별한 경우로 쉽게 유도된다.

왜냐하면 공정능력지수 $C_{pmx} = \frac{USL_x - LSL_x}{6\sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2}}$ 에서 $\mu_x = T_x$ 인 경우에는

$$\begin{aligned} C_{pmx} &= \frac{USL_x - LSL_x}{6\sqrt{\sigma_x^2 + (\mu_x - T_x)^2}} \\ &= \frac{USL_x - LSL_x}{6\sigma_x} = C_{px} \end{aligned}$$

이 성립되고, $\mu_x \neq M_x$ 혹은 $\mu_x = M_x$ 인 경우에 두 확률변수 $\sqrt{n}(\hat{C}_{px} - C_{px}, \hat{C}_{pkx} - C_{pkx})$ 와 $\sqrt{n}(\hat{C}_{pmx} - C_{pmx}, \hat{C}_{pkx} - C_{pkx})$ 의 극한분포가 정확히 같기 때문이다.

References

- Chan, J. K., Cheng, S. W. and Spiring, F. A (1988). A new measure of process capability, C_{pm} . *Journal of Quality Technology*, **20**, 160-175.
- Chan, L. K., Xiong, Z. and Zhang, D. (1990). On the asymptotic distributions of some process capability indices. *Communications in Statistics : Theory and Methods*, **19**, 11-18.
- Juran, J. M. (1974). *Jurans quality control handbook*, 3rd Ed., McGrawHill, New York.
- Kane, V. E. (1986). Process capability indices. *Journal of Quality Technology*, **18**, 41-52.
- Kotz, S. and Johnson, N. L. (1993). *Process capability indices*, 1st Ed., Chapman & Hall, London.
- Park, B. S., Lee, C. H. and Cho, J. J. (2002). On the confidence region of vector-valued process capability indices C_p and C_{pk} . *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **30**, No.4, 44-57.
- Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology*, **24**, 216-231.
- Serfling, R. J. (1980). *Approximation theorem of mathematical statistics*, John Wiley & Sons.
- Shahriari, H. and Abdollahzadeh, M. (2009). A new multivariate process capability vector. *Quality Engineering*, **21**, 290-299.

On the asymptotic correlationship for some process capability indices \widehat{C}_p , \widehat{C}_{pk} and \widehat{C}_{pm} [†]

Joong-Jae Cho¹ · Hye-Kyung Yu²

¹Department of Information & Statistics, Chungbuk National University

²Department of AIDS, Korea Centers for Disease Control & Prevention

Received 20 March 2013, revised 11 April 2013, accepted 21 April 2013

Abstract

Higher quality level is generally perceived by customers as improved performance by assigning a correspondingly higher satisfaction score. Usually, the quality level is measured by process capability indices. The index is used to determine whether a production process is capable of producing items within a specified tolerance. Some useful process capability indices C_p , C_{pk} and C_{pm} have been widely used in six sigma industries to assess process performance. Most evaluations on process capability indices focus on point estimates, which may result in unreliable assessments of process performance. It is necessary to investigate their asymptotic correlationship among process capability indices \widehat{C}_p , \widehat{C}_{pk} and \widehat{C}_{pm} . In this paper, we study their asymptotic correlationship for some process capability indices \widehat{C}_p , \widehat{C}_{pk} and \widehat{C}_{pm} under the normal process.

Keywords: Asymptotic correlationship, limiting distribution, process capability analysis, process capability index, quality level.

[†] This work was supported by Chungbuk National University Research Grant in 2011.

¹ Correspondence author: Professor, Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763, Korea. E-mail: jjcho@chungbuk.ac.kr

² Researcher, Division of AIDS, Korea Centers for Disease Control & Prevention, Osong-eup 363-951, Korea.