Journal of the Korean Data & Information Science Society
2013, **24**(3), 445–451
http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2013.24.3.445
한국데이터정보과학회지

지수모형의 제한된 대체 효과에 관한 연구†

조길호[1]

[1]경북대학교 통계학과

접수 2013년 3월 27일, 수정 2013년 4월 13일, 게재확정 2013년 4월 18일

요 약

시간 중도 절단된 지수모형에서 고장이 일어나는 즉시 고장 난 부품들을 새로운 부품들로 대체시키는 방법을 고려하였다. 이때 대체 가능한 개수를 제한하는 조건하에서 부품들의 수명분포가 모두 같은 경우와 모두 같지 않은 일반적인 경우에 대한 모수의 최우추정량을 구하였다. 그리고 모의실험을 통해 대체 가능한 개수를 제한한 경우의 모수에 대한 최우추정량과, 대체개수를 제한하지 않은 경우의 모수에 대한 최우추정량을 평균제곱오차의 관점에서 비교하고, 그 차이가 미세하게 되는 제한된 대체 개수를 제시하였다.

주요용어: 시간 중도 절단된 자료, 제한된 대체 개수, 지수모형, 최우추정량.

1. 서론

어떤 검사할 장비가 n개의 부품으로 구성되어 있고, 그 부품들의 고장시간은 주어진 시간 t까지 조사된다고 하자. 만약 고장시간이 평균고장률 $\frac{1}{\theta}$인 포아송과정을 따른다면, 그 검사 장비에서 일어나는 부품의 고장개수 r은 식 (1.1)과 같은 확률질량함수를 가지는 포아송분포를 따른다.

$$g(r) = \frac{1}{r!}\exp\left(-\frac{nt}{\theta}\right)\left(\frac{nt}{\theta}\right)^r, \quad r = 0, 1, \cdots . \tag{1.1}$$

중도 절단된 자료를 가진 지수모형의 모수에 대한 추정문제는 여러 학자들에 의해 연구되어왔다 (Bartholomew, 1957; Cho와 Kim, 2003; Hwang 등, 2007; Jeong 등, 2009). Ebrahimi (1986)와 Consul과 Famoye (1989)는 혼합 중도 절단된 자료를 이용하여 두 모수 지수모형의 모수들에 대해 점추정과 구간추정을 연구하였다.

이 논문에서는 시간 중도 절단되고 제한된 대체 개수를 가진 경우의 자료를 이용하여 지수모형에 대한 모수의 추정 문제를 연구하고자 한다. 실제적인 상황에서는 표본크기는 항상 유한개이며, 큰 값 r에 대한 확률은 매우 작아서 거의 관측되지 않는다. 그러므로 만약 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 방법과 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우의 방법을 비교할 때 비슷한 효과를 얻을 수 있다면, 시간과 비용을 절약하는 측면에서 제한된 대체 개수를 사용한 방법이 바람직한 방법이 될 것이다. 따라서 시간 중도 절단되고 제한된 대체 개수를 가진 경우의 자료를 이용하여 지수모형의 모수에 대한 추정량을 제안하고, 평균제곱오차의 측면에서 두 경우의 추정량의 효과가 비슷하게 되는 바람직한 제한된 대체 개수를 찾고자 한다.

† 이 논문은 2012학년도 경북대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.
[1] (702-701) 대구광역시 북구 산격동 1370번지, 경북대학교 통계학과, 교수. E-mail: khcho@knu.ac.kr

2. 추정

먼저 시간 중도 절단되고 제한된 대체 개수를 가진 경우의 자료를 이용하여 지수모형의 모수에 대한 추정량을 연구하고자 한다. n개의 부품이 주어진 시간 t $(t > 0)$까지 수명시간이 측정된다고 가정하자. 모든 부품은 시간 0에서 실험이 시작되고, 서로 독립인 수명시간을 가지며, 각 부품의 수명시간은 식 (2.1)과 같은 평균 θ를 가진 지수분포를 따른다고 가정하자.

$$f(x) = \frac{1}{\theta_i} \exp\left(-\frac{1}{\theta_i}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.1}$$

또한 $N_1(t), N_2(t), \cdots, N_n(t)$을 실험시간 $[0, t]$ 동안 부품 1, 부품 2, $\cdots$, 부품 n의 각각의 고장 개수(혹은 대체 개수)라 하자. 각 부품은 고장이 난 즉시 새로운 부품으로 교체된다고 가정하면, $N_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$는 평균고장률이 각각 $\frac{1}{\theta_i}$인 포아송과정이 된다.

보조정리 2.1 $\{N_1(t),\ t > 0\}$ 가 평균고장률이 $\frac{1}{\theta_1}$인 포아송과정이고, $\{N_2(t),\ t > 0\}$가 평균고장률이 $\frac{1}{\theta_2}$인 포아송과정이라고 가정하면, $\{N_1(t) + N_2(t),\ t > 0\}$는 평균고장률이 $\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}$인 포아송과정을 따른다.

보조정리 2.2 k개의 사건이 실험시간 $[0, t]$ 동안 일어났다고 하자. 이때 k개의 생존시간 $S_1, \cdots, S_k$는 $[0, t]$ 상에서 일량분포로부터 표본크기 k의 순서통계량과 같은 결합확률밀도함수를 가진다. 즉, 만약 $f(s_1, s_2, \cdots, s_k|k)$를 $N(t) = k$가 주어졌을 때 $S_1, S_2, \cdots, S_k$의 조건확률밀도함수라 하면

$$f(s_1, s_2, \cdots, s_k|k) = \frac{k!}{t^k}, \quad 0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_k \le t. \tag{2.2}$$

2.1. 같은 부품의 경우

먼저, 시간 중도 절단되고 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우의 자료를 이용한 평균 θ를 가진 지수모형의 모수에 대한 추정을 살펴보자.

만약 n개 같은 부품들의 수명시험이 시간 0에서 시작하여, 미리 정해진 시간 t $(t > 0)$까지 이루어진다고 가정하자.

$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$를 실험시간 $[0, t]$ 동안 n개 부품들의 총 고장 개수라 하면, 보조정리 2.1에 의해서 $N(t)$는 평균고장률이 $\frac{n}{\theta}$인 포아송과정을 따른다.

만약 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r)}$을 평균고장률이 $\frac{n}{\theta}$인 포아송과정에서 실험시간 $[0, t]$동안 일어난 r개의 순서화된 고장시간이라 하면, 보조정리 2.2에 의해서 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r)}$와 r의 우도함수 $f(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(r)}, r)$은 식 (2.3)과 같다.

$$\begin{aligned} f(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(r)}, r) &= \frac{r!}{t^r} \left(\frac{nt}{\theta}\right)^r \exp\left(-\frac{nt}{\theta}\right) \frac{1}{r!} \\ &= \left(\frac{n}{\theta}\right)^r \exp\left(-\frac{nt}{\theta}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

그러므로 모수 θ의 최우추정량 (MLE), $\hat{\theta}$을 구하면 식 (2.4)와 같다.

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \dfrac{nt}{r} & \text{if} \quad r \ge 1 \\ \text{정의 안됨} & \text{if} \quad r = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

다음으로 시간 중도 절단되고 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 자료를 이용한 평균 θ를 가진 지수모형의 모수에 대한 추정을 살펴보자.

정리 2.1 수명시간이 평균 θ인 지수분포일 때, $N(t)=r$를 실험시간 $[0,t]$ 동안 n개 부품들의 총 고장개수라 하자. 그리고 $N(t)=4$은 m $(1\le r\le m<\infty)$개로 제한되어 있다고 가정하자. 이때 우도방정식은 식 (2.5)로 주어진다.

$$\sum_{d=1}^{m}\frac{r}{d!}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}-\sum_{d=1}^{m}\frac{1}{(d-1)!}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}=0. \tag{2.5}$$

증명: $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(r)}$을 평균이 θ인 지수분포에서 일어난 r개의 순서화된 고장시간이라 하자. 그러므로 $N(t)=r$는 식 (2.6)과 같은 절단된 포아송분포 $g(r)$을 따른다.

$$\begin{aligned} g(r)&=\left\{\sum_{d=1}^{m}\exp\left(-\frac{nt}{\theta}\right)\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}\frac{1}{d!}\right\}^{-1}\exp\left(-\frac{nt}{\theta}\right)\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{r}\frac{1}{r!}\\ &=\left\{\sum_{d=1}^{m}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}\frac{1}{d!}\right\}^{-1}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{r}\frac{1}{r!},\quad \theta>0,\ r=1,2,\cdots,m. \end{aligned} \tag{2.6}$$

보조정리 2.2로부터 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(r)}$과 $N(t)=r$의 우도함수는 식 (2.7)과 같다.

$$\begin{aligned} f(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(r)},r)&=\frac{r!}{t^{r}}\left\{\sum_{d=1}^{m}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}\frac{1}{d!}\right\}^{-1}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{r}\frac{1}{r!}\\ &=\left\{\sum_{d=1}^{m}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}\frac{1}{d!}\right\}^{-1}\left(\frac{n}{\theta}\right)^{r},\quad \theta>0,\quad r=1,2,\cdots,m,\quad 0\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(r)}\le t. \end{aligned} \tag{2.7}$$

식 (2.7)의 양변에 로그함수를 취하고, θ에 대해서 미분하여 0으로 두면, 식 (2.8)의 우도방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{d=1}^{m}\frac{1}{d!}\left(\frac{nt}{\theta}\right)^{d}(r-d)=0,\quad 0\le x_{(1)}\le\cdots\le x_{(r)},\quad r=1,2,\cdots,m. \tag{2.8}$$

이것으로 증명이 마무리된다. □

이 경우에 우도방정식의 근은 쉽게 구해질 수 없다. 그러므로 수치해석적 방법으로 해결하고자 한다.

2.2. 일반적인 부품의 경우

n개의 부품들이 서로 독립이고, 부품 i의 수명시간은 평균이 θ_i인 지수분포를 따르며, n개 부품들의 수명시험이 시간 0에서 시작하여 미리 정해진 시간 t $(t>0)$까지 이루어진다고 가정하자.

또한, $N_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$을 실험시간 $[0,t]$ 동안 일어난 부품 i의 고장개수라 하고, $X_{(i,j)}$를 부품 i의 r_i개 수명시간들의 j번째 순서통계량이라고 하자. 여기서 $i=1,2,\cdots,n$이고 $j=1,2,\cdots,r_i$이다.

보조정리 2.2에 의해서 부품 i에 대한 $X_{(i,1)}$, $X_{(i,2)},\cdots,X_{(i,r_i)}$와 r_i의 결합확률밀도함수 $f(x_{(i,1)}$, $x_{(i,2)},\cdots,x_{(i,r_i)},r_i)$은 식 (2.9)와 같다.

$$f(x_{(i,1)},x_{(i,2)},\cdots,x_{(i,r_i)},r_i)=\exp\left(-\frac{t}{\theta_i}\right)\left(\frac{1}{\theta_i}\right)^{r_i}, \tag{2.9}$$

$x_{(i,1)}\le x_{(i,2)}\le\cdots\le x_{(i,r_i)}\le t,\quad \theta_i>0,\quad r_i=1,2,\cdots,\quad i=1,2,\cdots,n.$

그러므로 시간 중도 절단되고 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우의 n개 부품 전체의 수명시간 $X_{(i,j)}$와 고장개수 r_i의 결합확률밀도함수는 식 (2.10)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} f(&x_{(1,1)}, x_{(1,2)}, \cdots, x_{(1,r_1)}, r_1, \cdots, x_{(n,1)}, x_{(n,2)}, \cdots, x_{(n,r_n)}, r_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_{(i,1)}, x_{(i,2)}, \cdots, x_{(i,r_i)}, r_i) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{\theta_i}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\theta_i}\right)^{r_i}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

따라서 식 (2.10)을 이용하여 θ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$에 대한 최우추정량 $\hat{\theta}_i$를 구하면 식 (2.11)과 같다.

$$\hat{\theta}_i = \begin{cases} \dfrac{t}{r_i} & \text{if} \quad r_i \geq 1 \\ \text{정의 안됨} & \text{if} \quad r_i = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

다음으로 시간 중도 절단되고 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 자료를 이용한 모수의 추정을 살펴보자.

정리 2.2 부품 i의 수명시간이 평균 θ_i인 지수분포를 따르고, $N_i(t) = r_i$를 실험시간 $[0, t]$ 동안 부품 i의 고장개수라 하자. 그리고 $N_i(t) = r_i$은 m_i $(1 \leq r_i \leq m_i < \infty)$개로 제한되어 있다고 가정하자. 이때 우도방정식은 식 (2.12)로 주어진다.

$$\sum_{d=1}^{m_i} \frac{r_i}{d!} \left(\frac{t}{\theta_i}\right)^d - \sum_{d=1}^{m_i} \frac{1}{(d-1)!} \left(\frac{t}{\theta_i}\right)^d = 0, \tag{2.12}$$

$r_i = 1, 2, \cdots, m_i, \quad 0 < m_i < \infty, \quad \theta_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

증명: n개의 부품이 서로 독립이므로 정리 2.1을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. □

이 경우에도 우도방정식의 근은 쉽게 구해질 수 없다. 그러므로 수치해석적 방법으로 해결하고자 한다.

3. 모의실험 및 결론

몬테칼로 모의실험을 이용하여 시간 중도 절단된 상황에서 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우와 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 각각에 대해서 평균 수명시간 θ에 대한 최우추정량을 구하고, 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 효과를 얻기 위해서 두 추정량에 대한 평균제곱오차를 계산한다.

모의실험은 Table 3.1과 같이 지수분포의 평균 수명시간 (1, 2), 부품 개수 (1, 3, 5), 그리고 몇 종류의 정해진 시간의 여러 가지 조합에 대해서 시행되었다.

Table 3.1 The design of simulations

mean lifetime (θ)	number of items (n)	fixed time (t)
1	1 3 5	2 4 6
2	1 3 5	4 8 12

그리고 두 추정량의 평균제곱오차 차이의 절대값을 DMSE로 나타냈다. 제한된 대체 개수를 m으로 했을 때, 각 경우의 DMSE를 계산하면 Table 3.2와 같다.

Table 3.2 DMSE (when $\theta = 1$)

n	t	m (DMSE)		
1	2	3 (0.0837)	5 (0.0775)	7 (0.0690)
		9 (0.0650)	10 (0.0650)	11 (0.0650)
		12 (0.0650)	13 (0.0650)	14 (0.0650)
		15 (0.0650)	16 (0.0650)	17 (0.0650)
	4	4 (0.0884)	5 (0.0738)	6 (0.0287)
		9 (0.0052)	10 (0.0022)	11 (0.0014)
		12 (0.0008)	13 (0.0008)	15 (0.0007)
		18 (0.0007)	20 (0.0007)	22 (0.0007)
	6	5 (0.1375)	7 (0.0974)	9 (0.0264)
		11 (0.0155)	12 (0.0081)	13 (0.0043)
		14 (0.0025)	16 (0.0008)	18 (0.0003)
		19 (0.0001)	20 (0.0001)	21 (0.0001)
3	2	4 (0.9251)	5 (0.5375)	6 (0.3574)
		9 (0.0256)	11 (0.0194)	13 (0.0103)
		15 (0.0026)	16 (0.0012)	17 (0.0005)
		18 (0.0001)	19 (0.0001)	20 (0.0001)
	4	8 (0.5078)	9 (0.3190)	10 (0.1578)
		12 (0.0385)	15 (0.0268)	18 (0.0092)
		21 (0.0046)	24 (0.0031)	27 (0.0011)
		28 (0.0006)	29 (0.0001)	30 (0.0001)
	6	12 (0.2715)	14 (0.1110)	16 (0.0459)
		18 (0.0394)	20 (0.0299)	22 (0.0207)
		25 (0.0111)	28 (0.0079)	31 (0.0043)
		35 (0.0009)	40 (0.0001)	45 (0.0001)
5	2	8 (0.1408)	10 (0.0605)	12 (0.0187)
		15 (0.0160)	16 (0.0089)	17 (0.0059)
		20 (0.0017)	22 (0.0010)	24 (0.0006)
		25 (0.0001)	26 (0.0001)	27 (0.0001)
	4	15 (0.1870)	17 (0.1121)	19 (0.0353)
		20 (0.0141)	22 (0.0097)	24 (0.0083)
		30 (0.0056)	33 (0.0027)	36 (0.0007)
		40 (0.0001)	41 (0.0001)	42 (0.0001)
	6	25 (0.1023)	27 (0.0472)	29 (0.0125)
		31 (0.0068)	34 (0.0054)	37 (0.0043)
		40 (0.0030)	42 (0.0022)	44 (0.0017)
		46 (0.0002)	49 (0.0001)	50 (0.0001)

DMSE (when $\theta = 2$)

1	4	3 (0.0988)	5 (0.0812)	7 (0.0749)
		9 (0.0736)	10 (0.0735)	11 (0.0735)
		12 (0.0735)	13 (0.0735)	14 (0.0735)
		15 (0.0735)	16 (0.0735)	17 (0.0735)
	8	5 (0.3534)	6 (0.1149)	7 (0.0155)
		8 (0.0097)	10 (0.0083)	12 (0.0063)
		14 (0.0051)	16 (0.0039)	18 (0.0029)
		20 (0.0027)	25 (0.0027)	30 (0.0026)
	12	5 (0.9499)	6 (0.4543)	7 (0.1356)
		8 (0.0962)	10 (0.0439)	12 (0.0168)
		14 (0.0029)	15 (0.0011)	16 (0.0003)
		17 (0.0003)	18 (0.0003)	20 (0.0003)
3	4	5 (0.8497)	7 (0.1543)	9 (0.0082)
		10 (0.0068)	12 (0.0154)	14 (0.0030)
		15 (0.0011)	16 (0.0003)	17 (0.0002)
		18 (0.0002)	19 (0.0001)	20 (0.0001)
	8	10 (0.4442)	12 (0.2290)	14 (0.0621)
		16 (0.0338)	18 (0.0217)	20 (0.0115)
		21 (0.0063)	22 (0.0047)	23 (0.0025)
		24 (0.0014)	26 (0.0003)	28 (0.0003)
	12	14 (0.5903)	17 (0.2930)	20 (0.0367)
		23 (0.0157)	25 (0.0091)	27 (0.0079)
		30 (0.0048)	32 (0.0021)	34 (0.0008)
		35 (0.0007)	36 (0.0007)	37 (0.0007)
5	4	10 (0.2419)	12 (0.0948)	14 (0.0674)
		16 (0.0221)	17 (0.0052)	18 (0.0028)
		19 (0.0015)	20 (0.0008)	21 (0.0006)
		23 (0.0005)	24 (0.0001)	25 (0.0001)
	8	16 (0.7264)	18 (0.2912)	20 (0.1558)
		22 (0.0882)	24 (0.0524)	26 (0.0294)
		28 (0.0116)	30 (0.0087)	32 (0.0008)
		38 (0.0001)	38 (0.0001)	40 (0.0001)
	12	25 (0.4068)	28 (0.2976)	31 (0.0717)
		34 (0.0499)	36 (0.0147)	38 (0.0092)
		40 (0.0084)	44 (0.0039)	48 (0.0021)
		50 (0.0003)	52 (0.0001)	54 (0.0001)

Table 3.2로부터 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

1. 발생하는 평균수가 10보다 작을 경우에는, 제한된 대체 개수를 평균수의 3배정도로 했을 때, 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우와 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 각각에 대한 θ의 최우추정량의 평균제곱오차가 거의 같아짐을 볼 수 있다.
2. 발생하는 평균수가 10보다 큰 경우에는, 제한된 대체 개수를 평균수의 2배정도로 했을 때, 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우와 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 각각에 대한 θ의 최우추정량의 평균제곱오차가 거의 같아짐을 볼 수 있다.
3. 제한된 대체 개수가 증가함에 따라 제한되지 않은 대체 개수를 사용한 경우와 제한된 대체 개수를 사용한 경우의 각각에 대한 θ의 최우추정량의 평균제곱오차 차이의 절대값은 감소하는 경향이 있으며, 위의 두 경우에 언급된 대체 개수보다 더 많은 대체 개수를 준비하더라도 평균제곱오차 차이의 절대값은 거의 일정함을 알 수 있다.

또한, 일반적인 부품의 경우에서도 Table 3.2와 같은 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

References

Bain, L. J. (1978). *Statistical analysis of reliability and life-testing models: Theory and methods*, Marcel Dekker Inc., New York.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975). *Statistical theory of reliability and life testing: Probability models*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., Canada.

Bartholomew, D. J. (1957). A problom in life testing. *Journal of the American Statistical Association*, **52**, 350-355.

Cho, K. H. and Kim, Y. I. (2003). Estimation of bivariate exponential model under censored data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **14**, 751-758.

Consul, P. C. and Famoye, F. (1989). The truncated generalized Poisson distribution and its estimation. *Communication in Statistics- Theory and Method*, **18**, 3625-3648.

Ebrahimi, N. (1986). Estimating the parameters of an exponential distribution from a hybrid life test. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **14**, 255-261.

Hwang, I. S., Cho, K. H. and Cho J. S. (2007). Estimation for Block and Basu model under system level life testing. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **18**, 637-644.

Jeong, I. H., Cho, K. H. and Cho, J. S. (2009). Estimation of Block and Basu model for system level life testing with censored data. *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, **20**, 941-948.

Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulations and the Monte Carlo method*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Sinha, S. K. (1986). *Reliability and life testing*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Journal of the Korean Data & Information Science Society
2013, **24**(3), 445–451
http://dx.doi.org/10.7465/jkdi.2013.24.3.445
한국데이터정보과학회지

A study on effects of limited replacements in exponential model[†]

Kil-Ho Cho[1]

[1]Department of Statistics, Kyungpook National University

Received 27 March 2013, revised 13 April 2013, accepted 18 April 2013

Abstract

We consider the estimators for the parameters of the exponential model with limited replacements under the type I censoring scheme. Also, we propose the desirable number of replacements to provide the similar effects in terms of the mean square errors.

Keywords: Exponential model, limited replacements, maximum likelihood estimator, type I censoring data.

[†] This research was supported by Kyungpook National University Research Fund, 2012.
[1] Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu 702-701, Korea.
E-mail: khcho@knu.ac.kr