

수학 성취 수준에 따른 고등학생들의 함수적 표현의 번역 능력

천유영¹⁾ · 임대근²⁾ · 류현아³⁾

함수에서 한 표현 양식을 해석하여 다른 표현 양식으로 번역하는 과정은 함수적 사고 능력의 개발에 있어서 중요한 과정이며 함수의 지도에서 강조되어야 한다. 본 연구는 수학 수준별 함수의 번역 능력과 번역 과정에서 나타나는 오류를 파악하고 그 원인을 찾아 함수 교수 학습에 시사점을 제공하는 것에 목적이 있다. 이를 위해 고등학교 1학년을 대상으로 함수적 표현의 번역 능력을 검사하기 위한 과제를 수행하게 하고, 각 문항에 대하여 수준별로 정답률을 분석하고, 오류 유형과 그 원인을 분석하여 교정 방안을 모색하고자 한다.

주요용어 : 함수 표현, 번역 능력, 그래프

I. 연구의 필요성 및 목적

함수는 대응도, 히스토그램, 그래프, 그림, 수, 도표, 순서쌍, 문자기호, 식, 사상 등 여러 가지 방식으로 표현할 수 있다. 수학적 표현 간의 연결성을 인식하고 활용하며, 각각의 수학적 아이디어에 기초한 일관된 전체를 인식, 즉 하나의 함수를 다양한 방식으로 표현할 수 있어야 하고 반대로 다양한 방식으로 표현된 것을 일관된 하나의 함수로 인식하는 것이 중요하다(NCTM, 2000).

함수 표현 양식을 상황·언어적 표현, 표, 그래프, 식과 같이 네 가지로 분류할 수 있는데 (Janvier, 1987), 다양한 표현 간의 번역과 해석을 할 수 있도록 함수를 지도하는 것은 함수 개념에 대한 정신적인 이미지를 학생들 스스로 구성할 수 있도록 하여 함수 개념의 본질적인 의미를 줄 수 있다(Moschovich, Schoenfeld, Arcavi, 1993). 즉 한 표현 양식을 해석하여 다른 표현 양식으로 표현하는 과정은 함수적 사고 능력의 개발에 있어서 중요한 과정이며 함수의 지도에서 강조되어야 한다.

그러나 학생들은 점과 구간, 기울기와 높이를 혼동하기도 하고, 그래프를 상황에 대한 그림으로 인식하거나 직선의 기울기의 의미를 바르게 이해하지 못하는 등 함수의 그래프를 이

1) 계명대학교 교육대학원 (loudlaugh@nate.com)
2) 계명대학교 (limd@kmu.ac.kr)
3) 계명대학교 (ryumath@kmu.ac.kr), 교신저자

해하는데 어려움을 겪는다. 또한 방정식으로부터 그래프로의 표현에 비해 그래프에서 방정식으로의 표현에 더 어려움을 보인다(Greenes, Chang, Ben-Chaim, 2007; 안가영, 권오남, 2002).

따라서 학생들의 함수의 표현과 표현 간의 번역 능력을 살펴보고, 오류를 범할 경우 그 형태와 원인을 파악함으로써 함수를 지도하는 데 시사점을 제공할 필요가 있다. 현재까지 관련 연구들을 살펴보면 학생들을 대상으로 함수적 상황 번역 능력을 조사하거나 학생들의 함수에 대한 4가지 표현 능력과 각 표현 능력간의 12가지 상호 번역 능력 과정에서 나타나는 인식론적 장애를 분석, 분류하여 함수 단원의 지도에 시사점을 얻고자 하였다. 또한, 그래프를 질적 그래프와 양적 그래프로 구분하여 함수적 상황과 그래프 사이의 번역 능력을 조사하거나 교과서 분석을 통해 학교수학에서 함수 단원 지도 시 나타나는 함수 표현의 다양성을 알아보고 학생들을 대상으로 함수 표현 간의 번역 능력을 평가하고 있다(김인희, 2009; 박천수, 2010; 성홍순, 2008; 이승민, 2010; 최정연, 2010). 이는 연구를 통해 학생들의 오류를 파악하거나 학생들의 번역 능력을 향상시킬 수 있는 지도 방안을 제안하고 있는 것이다. 수학교과는 실제로 많은 학교에서 수준별 수업을 실시하고 있으므로 학생들의 함수적 번역 능력 역시 수학 수준에 따라 조사하는 것이 실제 수업에 적용하기에 더욱 유용할 것이다. 따라서 본 연구는 수학 성취 수준별 함수의 번역 능력과 번역 과정에서 나타나는 오류를 파악하고 그 원인을 찾아 함수 단원 지도와 학습에 시사점을 제공하는 것에 목적이 있다.

II. 함수의 표현과 번역

Janvier(1987)는 수학에서 자주 사용되는 표현 양식을 상황·언어적 묘사, 표, 그래프, 식의 네 가지로 분류하고 각각의 번역 과정에 대해 <표II-1>과 같이 제시하였다. 상황·언어적 표현에서 표로, 그래프로, 식으로 세 가지 번역이 가능하므로 전체 12가지 번역 유형을 다룰 수 있다. 이 12가지 번역 양식은 본 논문의 검사지 문항을 구성하고 결과를 분석하는 데 기초 자료로 쓰인다.

한편 하나의 표현에서 다른 표현으로의 번역 과정은 측정하기, 그래프 개형 그리기, 모델링, 읽기, 점 찍기, 식 알아내기, 해석하기, 점의 좌표 읽기, 곡선 알아내기, 변수 인식하기, 계산하기 등의 요소로 구성된다. 이를테면, 표에서 그래프로 번역하기 위해 점을 찍을 수 있어야 하며, 그래프에서 상황·언어적으로 묘사하기 위해서는 그래프를 해석할 수 있어야 한다.

<표 II-1> 표현 양식들 간의 번역 과정

~에서 \ ~로	상황·언어적 표현	표	그래프	식
상황·언어적 표현		추정하기	그래프 개형 그리기	모델링
표	점의 좌표 읽기		점 찍기	식 알아내기
그래프	해석하기	읽기		곡선 알아내기
식	변수 인식하기	계산하기	그래프 개형 그리기	

Janvier(1987)는 번역 과정에서 언어 표현이 중심적인 역할을 한다는 것을 지적하고 있다. 언어는 여러 가지 표현들을 연결하는 역할을 하기 때문이다. 예를 들면, 그래프의 해석은 기본적인 상황을 바탕으로 해서 그래프가 전달하는 다양한 정보들을 통합하는 것이다. 상황은 흔히 그래프를 설명하는 언어 표현이나 그림에 의해 규정되며, 그러한 구체적인 요소들이 그래프의 표현에 부착된 의미를 결정하기 때문에 상황에 속하거나 상황에 관련된 요소들로 인해 잘못된 해석을 할 수도 있다. 실제로 각 번역 과정에는 관련된 요소로써 언어 표현들이 부수적으로 포함되며, 번역 과정의 실행은 그러한 언어 표현들을 효율적으로 다루는 것을 통해 수행되는 것으로 나타났다.

학교수학에서 처음 함수 유형에 대해 다룰 때 함수에 대한 식이 제시되고, 이를 계산하여 표를 작성한 후, 이에 따라 점을 찍고 나머지 부분은 그래프 개형 그리기의 활동이 이루어진다. 이것이 함수를 다룰 때 가장 많이 하게 되는 번역 활동이다(김남희 외, 2007). 더 나아가 주어진 상황에 알맞은 식을 세우거나 그래프에 대한 상황을 설명하기도 한다. 만약 학생들이 주어진 상황에 알맞은 식을 세우는데 어려움이 있다면 상황에 알맞은 값을 표를 만들어 기록하고 이에 따라 규칙성을 찾아 식을 만들게 할 수 있다. 또한 어떤 번역 과정은 서로 그 반대되는 과정과 함께 실행될 때 잘 발달된다(Janvier, 1987)고 볼 때, 학생들이 어떤 번역 과정을 어려워할 때 그 번역의 반대 과정을 수행하도록 함으로써 도움을 줄 수 있다. 이를테면 그래프 해석해서 알맞은 상황을 설명하는데 어려움이 있다면 어떤 상황을 그래프로 그리는 과정을 함께 수행하도록 하는 것이다. 즉 한쪽 방향으로의 번역 활동뿐만 아니라 양쪽 방향으로의 번역 활동과 다양한 번역활동을 하도록 해야 할 것이다. 이러한 함수의 여러 가지 표현들 사이의 번역은 함수를 하나의 규칙이나 그래프에 고착시켜서 생각하지 않고 함수를 폭넓게 이해하는 데 도움이 될 것이다(김남희 외, 2007).

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 대구광역시에 소재한 인문계 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 이루어졌다. 수학 성적에 따라 분류된 상수준과 하수준 각각 50명씩, 총 100명의 학생들이 함수 표현의 번역 능력을 검사하는 과제 해결에 참여하였다. 대상 학생들은 함수영역에서 함수를 표, 식, 그래프로 나타내는 것과 일차함수와 이차함수의 뜻과 그래프 등에 관하여 학습한 상태이다.

2. 검사 도구

Janvier의 분류를 근거로 하여 각각의 번역 능력을 검사하기 위해 사용한 ‘함수 표현과 번역 능력 검사지’는 관련 문헌(김인희, 2009; 이승민, 2010; 이종희, 김부미, 2004; 김남희 외, 2007)에서 이미 신뢰성을 입증한 문항들과 MIC 교과서(박영훈, 2004)를 참고하여 본 연구자가 연구의 목적에 맞게 문항을 개발하였다. 검사 문항은 12가지의 번역 능력에 맞추어 12가지 유형의 문항으로 구성하였으며 하위 문항을 포함한 전체 문항 수는 19개이다. 개발한 검사지의 문항 구성은 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 검사지의 문항 구성

번역 능력	문항 번호	문항 내용
그래프에서 다른 표현으로의 번역 능력	1	그래프의 좌표를 해석하여 표로 번역
	2	그래프를 해석하여 상황·언어적 표현으로 번역
	3	그래프에서 해당하는 직선의 형태를 식으로 번역
표에서 다른 표현으로의 번역 능력	4	함수적 관계를 나타내는 표에서 그래프로의 번역
	5	함수적 관계를 나타내는 표를 보고 상황·언어적 표현 표현으로 번역
	6	함수적 관계를 나타내는 표를 보고 정비례관계를 파악하여 식으로 번역
식에서 다른 표현으로의 번역 능력	7	식을 보고 계산하여 표로 질적 번역
	8	식을 보고 좌표평면에 그래프 개형 그리기로 번역
	9	변수를 파악하여 공식이 적용되는 사례를 찾아 상황·언어적 표현으로 번역
상황·언어에서 다른 표현으로의 번역 능력	10	함수적 상황을 식으로 번역
	11	함수적 상황을 통해 변수간의 관계를 파악하여 그래프 개형 그리기로 질적 번역
	12	함수적 상황 다양하게 제시하여 표로 번역

검사지의 신뢰도를 알아보기 위해 총 19가지 하위 문항들의 검사 결과에 대하여 신뢰도를 분석하였다. 이를 위해 SPSS Version 18 프로그램을 이용하여 Cronbach α 계수를 구한 결과는 0.866 이다. 일반적으로 Cronbach α 계수가 0.7 이상이면 검사지의 신뢰성은 있다고 보며 전체 항목을 하나의 척도로 종합하여 분석할 수 있다는 것을 의미(노형진, 정한열, 2006)하므로 본 연구에서 사용된 검사지는 12가지 함수 표현의 번역 능력을 검사하는데 신뢰성이 높다고 할 수 있다.

3. 분석 방법

대상 학생 100명의 검사지가 모두 회수되었으나 그 중 모든 문항에 대하여 응답하지 않은 검사지 10개를 제외하여 상수준 46, 하수준 44개, 총 90개의 검사지에 대하여 분석하였다.

먼저 전체 19개 문항 중에 번역 능력과 직접 관련된 15개 문항에 대하여 정답률, 오답률, 무응답률을 분석하고, 그 중에서 전체 학생의 정답률이 현저히 낮은 문항과, 상수준과 하수준의 정답률 차이가 큰 문항에 대하여 살펴보았다. 또한 검사지에 작성한 학생들의 답안을 면밀히 살펴보고 오답의 유형을 분류하고 그 원인을 분석하면서 교정 방안을 모색하고자 하였다.

IV. 연구 결과

1. 학생들의 함수적 표현의 번역 능력

그래프에서 다른 표현으로의 번역, 표에서 다른 표현으로의 번역, 식에서 다른 표현으로의 번역, 성황·언어에서 다른 표현으로의 번역 능력을 검사하는 문항 각각에서 상수준과 하수준의 정답률은 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 학생들의 함수적 표현의 번역 능력 과제의 정답률

문항 번호	번역 상황	그룹	정답		오답		무응답	
			비율(%)	빈도(명)	비율(%)	빈도(명)	비율(%)	빈도(명)
1	그래프→표	상	69.6	32	30.4	14	0	0
		하	43.2	19	47.7	21	9.1	4
2-2	그래프→언어	상	69.6	32	23.9	11	6.5	3
		하	13.6	6	50.0	22	36.4	16
3	그래프→식	상	30.4	14	52.2	24	17.4	8
		하	9.1	4	34.1	15	56.8	25
4	표→그래프	상	73.9	34	21.8	10	4.3	2
		하	27.3	12	38.6	17	34.1	15

5	표→언어	상	89.1	41	4.3	2	6.5	3
		하	56.8	25	15.9	7	27.3	12
6	표→식	상	65.2	30	15.2	7	19.6	9
		하	31.8	14	20.5	9	47.7	21
7	식→표	상	82.6	36	8.7	4	8.7	4
		하	43.2	19	15.9	7	40.9	18
8	식→그래프	상	78.3	36	10.8	5	10.8	5
		하	47.7	21	13.6	6	38.6	17
9	식→언어	상	71.7	33	17.4	8	10.9	5
		하	27.3	12	15.9	7	56.8	25
10-1	언어→식	상	63.1	29	17.3	6	19.6	2
10-2		하	11.7	5	11.3	4	77.3	1
		상	34.8	16	13.0	6	52.2	24
10-3		하	2.3	1	4.5	2	93.2	41
		상	67.4	31	8.7	4	23.9	11
하		25.0	11	4.5	2	70.5	31	
11-1	언어→그래프	상	78.3	36	13.0	6	8.7	4
		하	52.3	23	18.2	8	29.5	13
11-2		상	45.7	21	30.4	14	23.9	11
		하	9.1	4	52.3	23	38.6	17
12	언어→표	상	52.2	24	41.3	19	6.5	3
		하	22.7	10	34.1	15	43.2	19

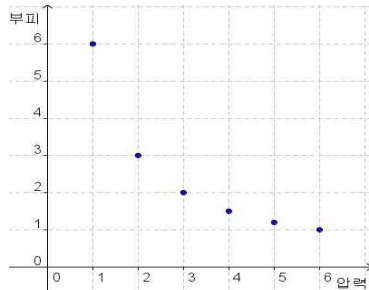
상수준과 하수준의 정답률이 모두 낮은 문항은 3번, 10-2번, 11-2번이다. 그래프에서 식으로의 번역, 상황·언어에서 식으로의 번역, 상황·언어에서 그래프로의 번역에서 어려움이 많은 것으로 나타났다. 주목할 사항은 하수준의 정답률과 무응답률이다. 4번, 9번, 10-1번, 10-3번 문항에서 상수준과 비교할 때 하수준의 정답률이 매우 낮고, 3번, 6번, 9번, 10번 문항에서 무응답이 절반 이상으로 나타났다. 하수준의 학생들은 표에서 그래프로, 식에서 상황·언어로, 상황·언어에서 식으로, 상황·언어에서 그래프로, 그래프에서 식으로, 상황·언어에서 식으로의 번역에서 어려움을 겪고 있는 것이다. 다시 말해 함수를 식으로 표현하는 것과 상황·언어로 표현한 것을 해석하거나 상황·언어로 설명하는 것에 어려움이 있음을 알 수 있다. 상황·언어를 식이나 그래프로 번역하는 과정은 상수준 학생들도 마찬가지로 어려워하고 있다.

2. 학생들의 함수 표현 번역에서 오류 사례

문항을 통해 함수 표현의 번역에 관한 능력을 검사한 후, 학생들의 답안에서 특징적인 사례에 대해 분석하였다. 각 사례에 대하여 오류를 범하는 원인이나 교정 방법에 대하여 논하고자 한다.

1) 그래프에서 표로의 번역

문항 1은 [그림 V-1]의 그래프를 보고 표에 알맞은 값을 기록하는 것으로 그래프에서 표로의 번역 능력을 검사하는 문항이다.



[그림 V-1]

6	3	2	1.5	1.2	1
1	2	3	4	5	6

[그림 V-2]

상수준과 하수준 학생들의 오답의 대부분은 [그림 V-2]와 같이 표의 윗줄에 부피(y), 아랫줄에 압력(x)을 기록한 경우이다. 학생들은 함수에서 독립변수와 종속변수의 개념을 제대로 이해하지 못하고 바꾸어 생각하는 경우가 있음을 알 수 있다. 이것은 학생들이 변하는 대상이 무엇인지, 그것이 변함에 따라 함께 변하는 것은 무엇인지 명확히 파악하지 못하는 것으로 해석할 수 있다. 한편 이러한 현상은 학생들이 그래프에서 보이는 순서대로 좌측 위쪽에 위치하고 있는 y 축의 값을 먼저 읽어 쓰고, 다음 아래쪽 x 축의 값을 나중에 읽어 쓰는 실수를 범한 것으로 생각될 수 있다. 이런 경우는 작성한 표를 보고 순서쌍으로 다시 표기하도록 한다면 x 값과 y 값의 위치가 잘못되었음을 알게 하고 x 값에 따라 y 값이 변화함을 인지시킬 수 있을 것이다.

2) 그래프에서 상황·언어로의 번역

문항 2는 [그림 V-3]의 그래프를 보고 ‘지원이가 현빈이보다 더 빠른 속도로 움직이는 시간대’를 찾아 설명하는 문제로 그래프에서 상황·언어로 번역하는 능력을 검사하기 위한 것이다.

오답의 유형은 크게 세 가지로 분류할 수 있다. 그 중 한 가지는 그래프가 위쪽에 있으면 속도가 더 빠른 것으로 생각하는 경우로 상수준 오답의 36.3%, 하수준 오답의 63.6%로 나타났다. 이러한 학생들은 속도를 시간당 움직인 거리로 생각하지 않고 그래프의 모양을 그대로 대상이 움직이고 있는 상태로 보는 경우이다. 즉, 시각적 요소에 의존하는 경우라 볼 수 있다.

또한 1~4분으로 답하면서 그 이유를 ‘면적의 넓이가 더 크기 때문’이라 답하는 경우(상수준의 오답 중 9.1%)가 있다. 이는 속도가 그래프의 면적이라고 생각한 것으로 시간과 속도 그래프에서 그래프의 면적이 이동거리와 같다는 사실에 근거하여 잘못된 결론을 가져온 것으로 보인다.

나머지 오답(상수준 54.5%, 하수준 313.8%)은 그래프에서 속도는 기울기와 같다는 것을 알고 있지만 시간대를 7~9분으로 잘 못 기입한 경우이다. 이는 그래프를 읽을 때 오류를 범한 것으로 해석할 수 있다.

이러한 오류를 교정하기 위해서 기울기에 대한 이해가 절대적으로 필요하다. 많은 학생들이 기울기를 대수적으로 ‘ y 증가량/ x 증가량’으로 구하는 것에만 집중하고 그 의미를 소홀히 하고 있으므로, 주어진 상황에서 기울기로서 ‘ y 증가량/ x 증가량’ 자체의 의미를 파악할 수 있도록 해야 할 것이다.

3) 그래프에서 식으로의 번역

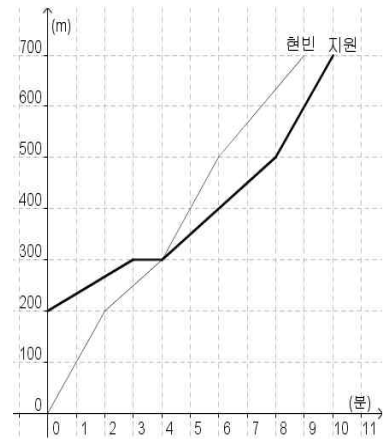
문항 3은 [그림 V-4]의 그래프에 대한 함수식을 구하는 것으로 그래프에서 식으로의 번역 능력을 검사하기 위한 것이다.

오답 중 가장 많은 경우(상수준 37.5%, 하수준 46.7%)는 그래프의 기울기 즉 속도를 구한 것이다. 이는 ‘시간과 거리 사이에 관한 식을 구하라’ 라는 물음에 학생들은 ‘시간에 대한 거리의 비’로 답한 것으로 보인다. 학생들은 ‘식’에 대한 뜻이 모호하며, 구해야 하는 것에 대해 명확히 하지 않는 것으로 생각된다.

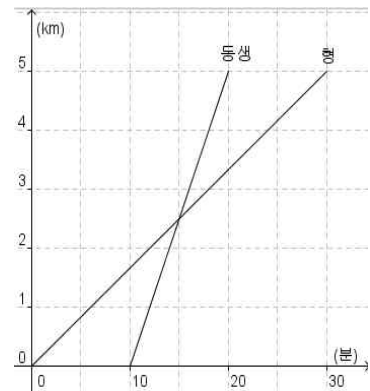
한편 그래프의 기울기를 구할 때 ‘ y 값의 변화량/ x 값의 변화량’을 ‘ x 값의 변화량/ y 값의 변화량’으로 잘못 이용한 경우가 오답에서 상수준의 25%, 하수준의 20%로 나타났다. 이것은 기울기의 의미를 명확히 이해하지 못한 것으로 보인다.

또한 오답 중에 상수준 4.2%, 하수준 26.7%의 학생들에게서 찾아볼 수 있는 답안은 변수 하나만을 이용하여 형 그래프에 대한 식을 $\frac{1}{6}x$, 동생 그래프에 대한 식을 $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}x-5$ 등으로 구하는 경우이다. 이는 ‘한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계’로서의 함수 개념을 이해하지 못하는 것이다.

마지막으로 오답 중 상수준의 33.3%의 학생들이 문자를 사용하지 않고 ‘거리’, ‘시간’등의 단어를 사용하여 식을 세우려고 시도한 경우가 있다. 학생들이 문자 사용의 필요성을 느끼고, 문자를 사용하는 것의 유용성을 체험할 수 있도록 지도해야 하며, 학생 스스로 상황에 알맞게 문자를 선택할 수 있는 기회를 충분히 제공해야 할 것이다.



[그림 V-3]



[그림 V-4]

4) 표에서 식으로의 번역

문항 6은 네 가지 음식물에 대하여 조리 전과 조리 후의 영양분을 기록한 표를 보고, 식을 구하는 문제이다.

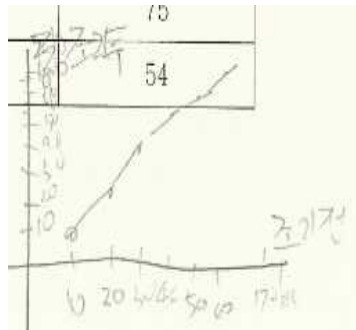
오답 유형 중 첫 번째는 함수 관계를 잘못 파악한 경우이다. 상수준 42.8%, 하수준 44.5%의 학생들이 두 변수간의 관계를 문제에서 주어진 정비례 관계가 아닌 두 변수간의 차로 파악한 것이다. 두 변수간의 차에서 일정한 관계가 파악되지 않음에도 불구하고 [그림 V-5]와 같이 식을 세우려고 시도하고 있다. 이런 경우는

(조리후) (조리전)
 $y = x - 20 (\pm 5)$
 영양분 가감

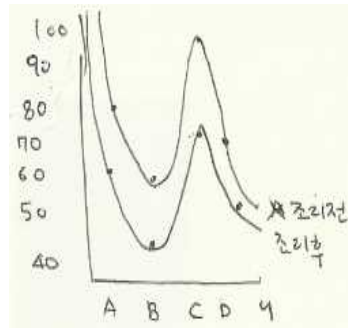
[그림 V-5]

다양한 수 패턴을 제공하여 규칙성을 찾는 연습이 필요하며, 두 변수간의 관계를 파악할 때는 단순히 그 차이만을 생각하는 것이 아니라 일반화된 식을 찾게 해야 할 것이다.

두 번째는 식이 아닌 그래프로 답하는 경우(상수준 28.6%, 하수준 33.3%)이다. [그림 V-6]은 상수준 학생의 답으로 x 축과 y 축을 조리 전과 조리 후로 하여 적절하게 그래프를 그렸지만, 하수준 학생의 답 [그림 V-7]을 보면 x 축에는 음식물, y 축에는 영양분을 표시하여 조리전과 조리후의 그래프를 그린 것을 알 수 있다. 이러한 학생들은 보통 표의 값에 따라 점을 찍고 그래프의 개형을 그리는 번역 활동에 따라 문제에서 요구하는 대로 식을 세우지 않고 우선 그래프를 그린 것으로 파악된다.



[그림 V-6]



[그림 V-7]

기타로 하수준 학생 중에 ' $x = \frac{3}{4}y$ ' 라 답한 경우이다. 이것은 독립변수, 종속변수 개념을 불완전하게 이해하고 있는 것이다. 어떤 관계에서 한 변수의 변화에 의해 다른 문자의 값이 따라서 변할 수 있다는 개념을 인식시킬 필요가 있다.

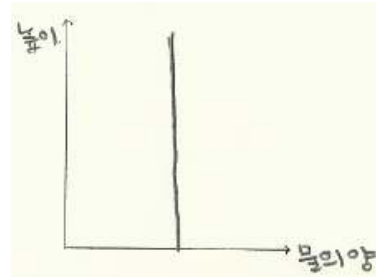
5) 상황·언어에서 그래프로의 번역

문항 11은 그림으로 주어진 물통에 일정한 속도로 물을 담을 때 물의 양에 따른 물의 높

이 관계를 그래프로 나타내는 것이다. 11-1에서는 원기둥 모양을 제시하였다.

이를 해결하기 위해서는 물의 양(x)이 증가함에 따라 물의 높이(y)가 일정하게 증가하며 그 관계가 정비례 관계임을 인식하여야 한다. 그래프는 1사분면의 원점에서 출발하고 양의 기울기를 갖는 직선이 되어야 한다.

오답 유형을 크게 두 가지로 살펴보면 상수준 50%, 하수준 25%의 학생들은 독립변수(x)와 종속변수(y)를 바꾸어서 그래프를 그린 것으로 나타났다. 이것은 문제에서 ‘물의 양에 따른 물의 높이’라고 제시하였음에도 불구하고 학생들은 함수에서 독립변수와 종속변수의 중요성을 인식하지 못하는 것으로 해석할 수 있다. 또 다른 오답은 [그림 V-8]과 같이 그린 경우(상수준 16.6%, 하수준 50%)이다. 이것은 물통의 모양과 같이 수직으로 그린 것으로 함수로서 물의 양에 따른 물의 높이 관계를 인지하지 못하고 물통의 모양 즉 시각적 요인에 의존한 것으로 해석할 수 있다. 이런 경우 모두 어떤 양이 변함에 따라 다른 양이 변한다는 함수 개념을 인식시킬 필요가 있다.



[그림 V-8]

한편 11-2 문제에서는 [그림 V-9]와 같은 모양을 제시하였다. 이것은 삼각뿔 모양에서 위로 가서는 원기둥 모양이 되는 것으로 삼각뿔 모양에서는 위로 갈수록 일정한 기울기로 물통이 좁아지게 된다. 따라서 물의 양(x)이 증가함에 따라 물의 높이(y)는 증가하되 물통이 좁아지는 만큼 점점 더 빠르게 증가하게 된다. 즉, 기울기가 점점 커지는 곡선의 형태로 그래프를 그려야 한다. 그리고 삼각뿔 모양에서 원기둥 모양으로 바뀌면서 물의 양(x)이 증가함에 따라 물의 높이(y)가 일정하게 증가하므로 위의 곡선에 이어서 양의 기울기를 갖는 직선으로 그려야 한다. 또한, 삼각뿔 모양에 비해 원기둥 모양일 때 물통의 너비가 좁으므로 그래프의 기울기는 더 커져야 한다.



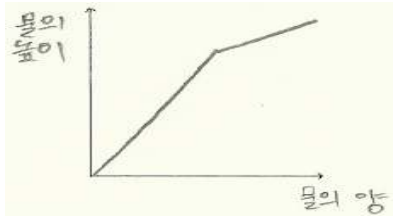
[그림 V-9]

오류 유형을 보면, 첫 번째는 [그림 V-10]과 같이 기울기의 변화는 있지만 처음에 곡선의 형태가 아니며 선이 꺾어지면서 기울기가 커져야 하는데 오히려 작아지고 있어 전체적인 변화 양상이 옳지 않은 경우(상수준 28.6%, 하수준 34.8%)이다. 이는 함수적 상황을 개략적으로는 파악하고 있으나 그래프의 기울기 변화를 올바르게 그리지 못한 것으로 볼 수 있다.

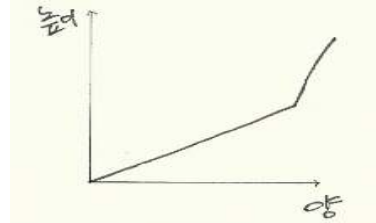
두 번째는 [그림 V-11]과 같이 기울기의 변화가 있으며 처음에 곡선의 형태는 아니지만 선이 꺾어지면서 기울기가 커지고 있어 전체적인 변화 양상은 옳은 경우(상수준 42.9%, 하수준 21.8%)이다. 이는 함수적 상황과 기울기의 변화를 전체적으로는 바르게 파악하고 있으나, 세부적인 변화를 파악하지 못한 것으로 해석할 수 있다. 이 유형은 상수준에서 가장 비율이 높은 오답 유형으로 다른 오답 유형들에 비해 함수적 상황과 기울기에 대한 이해가 높

수학 성취 수준에 따른 고등학생들의 함수적 표현의 번역 능력

은 편이라 할 수 있다.

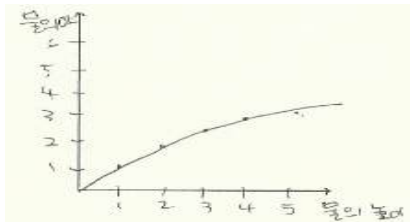


[그림 V-10]

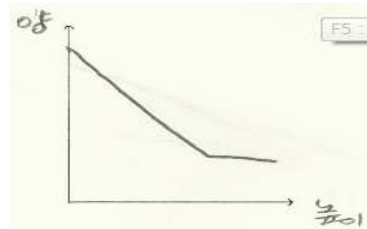


[그림 V-11]

그 밖에 독립변수와 종속변수를 바꾸어서 그래프를 그리는 경우이다. 그 중 [그림 V-12]와 같이 처음에는 곡선을 표현하지만 끝에서 직선을 그리지 못하는 경우(상수준 14.3%, 하수준 8.6%)가 있다. 또한 그래프가 원점에서 시작하지 않은 [그림 V-13]를 보면 높이가 커질수록 그래프가 물통의 모양과 같이 그려져 있음을 알 수 있다. 이는 시각적 요소에 의존한 것으로 해석할 수 있는데, 상수준 7.1%, 하수준 21.8%로 하수준의 학생들이 많이 범하는 오류이다.



[그림 V-12]



[그림 V-13]

이러한 어려움은 학교수학에서 상황·언어적 표현을 표나 식으로 표현하는 활동에 비해 그래프로 번역하는 활동은 잘 이루어지지 않은 결과라 생각된다. 그래프를 해석하여 상황을 설명하게 하고 그것을 다시 그래프로 연결 지을 수 있어야 할 것이다. 이 과정에서 표나 식이 도움이 될 수 있으며, 차츰 표나 식의 도움 없이도 직접 상황을 그래프로, 그래프를 상황으로 표현할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 결론

본 연구에서는 수학 성취도에 따른 고등학교 1학년 학생들의 함수 번역 능력을 파악하기 위해 총 12가지 번역 능력과 관련된 문항을 구성하여 고등학교 1학년 학생 100명에게 시행

하고, 90명 자료에 대하여 분석하였다. 각각의 번역 능력에 대한 정답률을 통해 학생들의 어려움을 분석하고, 오답 유형의 분석을 통해 원인과 교정 방법을 제안하고자 하였다.

본 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 학생들은 독립변수와 종속변수를 바꾸어 생각하는 오류가 많음을 알 수 있다. 이것은 독립변수와 종속변수를 완전하게 이해하지 못한 결과이다. 이러한 오류는 그래프와 표를 표현하는 과정에서 많이 나타나고 있다. 우리나라 학생들을 대상으로 한 실험 연구에 따르면, 학생들이 독립변수, 종속변수 개념을 모호하게 이해하고 있으며, 독립변수에 대한 이해도와 종속변수에 대한 이해도에 차이가 나타남을 알 수 있다(김남희 외, 2007). 함수 교수-학습 시 학생들이 변하는 대상을 관찰하고 변수가 무엇을 의미하는지에 대해 생각하고 설명할 수 있는 기회가 필요하며, 하나의 변수가 변함에 따라 따라서 또 다른 변수의 값이 변한다는 함수 개념을 인식시킬 필요가 있다.

둘째, 상수준의 학생들은 그래프나 상황·언어적 표현에서 식으로 번역하는 과정, 상황·언어적 표현에서 그래프로 번역하는 과정에서 어려움이 나타났다. Janvier(1987)는 어떤 번역 과정은 서로 그 반대되는 과정과 함께 실행될 때 잘 발달될 수 있다고 제안한 바, 그래프나 상황·언어적 표현에서 식으로 번역하는 과정과 그 반대로 식에서 그래프나 상황·언어적 표현으로의 번역 활동이 함께 이루어져야 할 것이다.

셋째, 하수준의 학생들은 표, 그래프, 식을 상황·언어적 표현으로 번역하는 과정과 그 반대 과정 모두에서 어려움을 겪는 것을 알 수 있다. Janvier(1987)에 의하면 언어는 여러 가지 표현들을 연결하는 역할을 하기 때문에 번역 과정에서 언어 표현이 중심적인 역할을 한다. 그래프에서 식으로의 번역 과정에서도 그래프를 해석하여 상황을 말할 수 있어야 식으로의 번역도 가능한 것처럼 실제로 상황이나 언어적 표현은 각 번역 과정에서 부수적으로 포함되어 있다. 그러므로 표에 있는 값들의 변화를 말하게 하고 그것에 대한 그래프 개형을 그리거나, 그래프를 해석하여 그 상황을 설명하게 하고 다시 식으로 표현하는 등 각각의 번역 과정 사이에 상황·언어적 표현을 거쳐 가게 함으로써 상황·언어적 표현에 대한 어려움을 극복할 수 있을 것이라 생각한다.

넷째, 하수준은 상수준에 비하여 함수의 그래프는 무조건 직선 또는 곡선으로 그려진다고 생각하는 경향이 있다. 학생들은 함수는 모든 정의역에서 한 가지 규칙이나 대수식으로 표현되어야 한다고 생각하면서 함수의 그래프는 규칙적이고 체계적이어야 하며, 갑자기 그래프상의 변화가 일어나면 함수가 아니라고 생각하는 것이다. 이는 함수의 임의성을 이해하지 못한 결과이다. Kieran은 일차함수 그래프 학습에서 학생들이 겪는 어려움에 관한 1980년대 연구 결과에 기초하여, 학생들은 대수식을 만족시키는 값을 표로 작성하고 좌표평면에 점을 찍어 그래프를 그리도록 하는 기능 위주로 그래프 학습을 하고 있으며, 그 때문에 학생들은 그래프의 의미를 이해하지 못한 채 그래프를 단순히 ‘직선’으로만 인식한다고 하였다(김남희 외 2007). 함수 개념의 정의를 제시하기 전에 교과서에서 다루는 기본적인 함수 유형 외에도 다양한 현상을 통해 함수의 임의성을 경험할 수 있도록 해야 할 것이다.

다섯째, 그밖에 하수준은 상수준에 비하여 그래프의 기울기에 대한 개념적 이해가 부족하

며, 정의역을 고려하지 않거나 그래프의 시각적 요소에 의존하는 경향을 보였다.

전체적으로 그래프나 상황·언어적 표현에 있어서 어려움이 많은 것으로 나타난 바, 그래프를 의미 있게 사용하고 해석하기 위해서는 여러 가지 접근 방식이 통합되어야 할 것이다. 그래프의 한 점에 초점을 맞추어 해석하는 점별 접근, 한 점의 근방에서 그래프의 변화를 관찰하는 국소적 접근, 어떤 구간이나 전체 구간에서 그래프를 해석하는 전체적 접근이 함께 이루어져야 할 것이다. 또한 정확한 수치적 자료를 이용하여 좌표공간에 나타내는 양적 접근뿐만 아니라 어떤 상황을 수량화하지 않고 개략적으로 표현하는 질적 접근의 경험이 제공되어야 할 것이다.

참고 문헌

- 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2007). 예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구, 경문사, 서울.
- 김인희 (2009). 고등학교 2학년 학생들의 함수적 상황 번역 능력, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.
- 노형진, 정한열 (2006). 한글 SPSS 기초에서 응용까지, 형설출판사.
- 박영훈 (2004). Tracking Graphs, 도서출판 나온.
- 박천수 (2010). 고등학교 2학년 학생들의 함수적 상황과 그래프 사이의 번역 능력 실태조사, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.
- 성홍순 (2008). 함수의 표현에서의 번역 활동에 대한 지도 방안, 석사학위논문, 서강대학교 교육대학원.
- 안가영, 권오남 (2002). 함수 그래프 과제에서의 오류분석 및 처치:테크놀러지를 활용한 교수학적 환경에서. 수학교육논문집 제 13-1집. 한국수학교육학회지 E. 337-360. 한국수학교육학회.
- 이승민 (2010). 중학교 1학년 학생들의 함수 표현과 번역에서의 인식론적 장애에 관한 연구, 석사학위논문, 한국교원대학교 교육대학원.
- 이종희, 김부미 (2004) 일차함수 활용문제의 해결을 위한 강의식, 모델링, 과제기반 표현변환 학습의 교수학적 효과 분석, 대한수학교육학회지 수학교육학회지 <수학교육학연구> 12(1), 36-69.
- 최정연 (2010). 함수의 표현간 번역 능력에 관한 연구 -중학교 2학년을 중심으로-, 석사학위논문, 동국대학교 교육대학원.
- Greenes, C., Chang, K. & Ben-Chaim, D. (2007). International Survey of High School Students' Understanding of Key Concepts of Linearity. In J. Woo, H. Lew, K. Park & D. Suh. (eds.) Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. vol. 2. (pp. 273-280), Seoul: PME.
- Janvier, C. (1987). Problem of representation in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates. Publisher.
- Moschovich, J., Schoenfeld, A.H. & Arcavim A.(1993), Aspects of understanding: on multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, and T. P. Carpenters (Eds.), Intergrating research on the graphical representation of function, Erlbaum Hillsdale, N.J.
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Restion, VA: NCTM.

The Translation Ability of Functional Expressions of High School Students according to the level of Mathematics

Chun, You Young⁴⁾ · Lim, Daekeun⁵⁾ · Ryu, Hyunah⁶⁾

Abstract

Process to translate into other forms in the form of expression for function is important in the development of functional thinking. Also it should be emphasized on the teaching of the function.

This study will identify the translation ability of functional expressions and errors in the process to translate. The purpose of this study is to suggest important implications for the teaching and learning of function.

To do this, we lead high school students perform the task to examine the translation ability. Then we compute a percentage of correct answers for each question and analyze the types of errors and their causes.

Key Words : Expression for Function, The Translation Ability, Graph

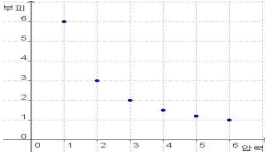
4) Graduate School of Education Keimyung University (loudlaugh@nate.com)

5) Keimyung University (limd@kmu.ac.kr)

6) Keimyung University (ryumath@kmu.ac.kr), 교신저자

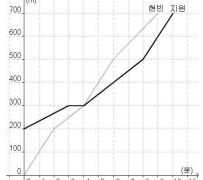
<부록> 함수 표현과 번역 능력 검사지

1. 다음 그래프는 온도가 일정할 때, 어떤 기체의 압력과 기체의 부피 사이의 변화를 나타낸 그래프이다. 일정한 온도에서 기체의 부피는 압력에 반비례하는데 이를 보일 법칙이라고 한다. 그래프를 보고 기체의 압력과 부피 변화에 대한 다음 표를 완성하여라. (가로(x)축과 세로(y)축에서 표에 들어갈 내용과 숫자를 각자 결정하여 표를 완성하여라.)



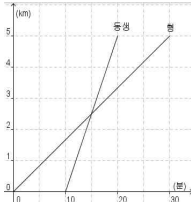
--	--	--	--	--	--	--	--

2. 현빈이와 지원이는 700 m 달리기 시합을 하려고 한다. 공정한 시합을 위해 지원이가 먼저 출발하기로 하였다. 아래 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.



(1) 이 시합에서 누가 이겼습니까?
 (2) 지원이가 현빈이보다 더 빠른 속도로 움직이는 구간(시간대)을 쓰고, 그 이유를 그래프와 관련하여 적으시오.

3. 형은 걸어서, 동생은 자전거를 타고 각각 집에서 5 km 떨어진 역에 간다고 한다. 아래 그림은 두 사람이 출발하여 역에 도착할 때까지의 시간과 집으로부터 떨어진 거리와의 관계를 나타낸 그래프이다. 형과 동생의 시간과 이동한 거리 사이의 공식을 각각 구하여라.



형: _____
 동생: _____

4. 다음은 신종 박테리아에 새로 개발한 신약을 처리했을 때 박테리아의 양 사이의 관계를 나타내는 표이다. 신약은 1 ml씩 늘려서 처리하고 있다. 이를 한 눈에 파악하기 위하여 이를 그래프로 나타내어라. (x 축과 y 축이 의미하는 내용과 숫자를 각자 정해서 완성하여라.)

약 투입량(ml)	0	1	2	3	4	5	6	7
박테리아의 양	3.47	2.83	1.67	1.60	1.65	1.47	1.08	1.23

5. 다음은 민지의 하루 간격으로 같은 시간에 쟈 몸무게의 변화를 나타낸 표이다. 표를 보고 시간에 따른 민지의 몸무게 변화를 설명하세요.

시간(일)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
몸무게(kg)	55	55	55	54.7	54.6	54.4	54.2	54.1	54	54.3	55	55.5

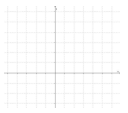
6. 다음 표는 조리 전후 음식물에 함유된 영양분의 양을 나타낸 표이다. 표를 보고 조리 전의 영양분의 양과 조리 후의 영양분의 양 사이의 관계를 x , y 를 사용한 함수로 나타내어라. (단, 사용한 변수가 무엇을 의미하는지 쓸 것)

음식물	조리 전	조리 후
A	80	60
B		45
C	100	75
D	72	54

7. 유리는 현상에게 포물선을 그리며 공을 발로 찼다. 이 때, 시간(x)에 따른 공의 높이는 $y = -x^2 + 6x + 5$ 와 같은 공식으로 나타난다. 이때 높이(y)의 단위는 cm이다. 그렇다면 다음의 표를 완성하여라.

시간(x)						
추의 위치(y)						

8. 아래 좌표평면에 다음 그래프를 완성하여라.
 (1) $y = 2x^2 - 4x + 7$




9. 다음 함수식이 적용될 수 있는 실생활의 사례 혹은 문제를 만들어 보시오.
 $y = 2000x + 1000$

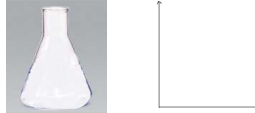
10. 제주도로부터 570 km 떨어진 남쪽 해상에서 발생한 태풍이 한 시간에 20 km의 속도로 제주도를 향해 북상하고 있다. 시간에 따른 제주도와 태풍 사이의 거리의 변화를 설명해 주는 함수식(공식)을 구 하려고 한다. 어떠한 함수 (예, 반비례함수, 일차함수, 이차함수, 정비례함수, 유리함수, 무리함수, 삼각함수 등등)가 이 상황을 설명해준다고 생각하는가? 그 이유를 적고 함수식을 구하여라.

11. 다음 그림과 같이 서로 다른 2 개의 물통에 일정한 속도로 물을 채우고 있다. 물통에 들어가는 물의 양과 각 물통에서의 물의 높이 사이의 관계를 각각 그래프로 나타내어라. (단, x 축, y 축에 해당하는 변수가 무엇을 의미하는지 쓸 것)

11-1)



11-2)



12. 현상이네 학교에서는 수행평가를 위해서 장미를 관찰하여 보고서를 제출하는 과제가 제시되었다. 다음은 현상, 정민, 하균, 성무의 장미에 대한 관찰 결과이다.

현상: 나는 장미를 매우 잘 보살폈다. 햇볕, 좋은 토양을 제공하였고 장미에게 말도 걸어주었다. 매주 그 전 주보다 더 많은 양이 성장하였다.
 정민: 나는 그늘진 곳에 장미를 심었다. 장미는 자라고 있었지만, 빨리 자라지는 못했다. 높이는 매주 같은 크기로 성장하였다.
 하균: 나는 장미를 심었지만, 바빠서 전혀 돌보지 못했다. 그래서인지 장미는 자라지 않았다.
 성무: 나는 매마른 땅에 장미를 심었고, 물을 많이 주지 못했다. 조금씩 자라긴 했지만, 점점 자라는 속도가 느려졌다.

위와 같은 상황에서 현상, 정민, 하균, 성무의 관찰 결과가 어떠할지 대략적으로 예상하여 표를 완성하여라.

현상	시간(주)	0	1	2	3	4	5
	높이(cm)	7					
정민	시간(주)	0	1	2	3	4	5
	높이(cm)	7					
하균	시간(주)	0	1	2	3	4	5
	높이(cm)	7					
성무	시간(주)	0	1	2	3	4	5
	높이(cm)	7					