한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 1, 113-139, March 2013

초등학생들의 문제해결전략에 따른 오류 유형 분석

김영아[1] · 김성준[2]

본 연구는 초등학생들의 문장제 해결과정에서 나타나는 오류를 분석하고 문제해결전략별 오류 유형 및 그 특징을 파악함으로써 문제해결학습의 실패 원인에 대한 정보를 제공하고 문제해결력을 향상시킬 수 있는 교수학습방안을 제안하기 위한 것이다. 문장제 해결과정에서 학생들이 선호하는 전략을 살펴보면 식 세우기와 예상과 확인, 규칙 찾기 순으로 나타났으며, 단순화하기 전략은 거의 사용하지 않고 있다. 문장제 해결과정에서 나타나는 오류 유형의 특징은 문제해결전략에 따라 차이를 보였는데, 이를테면 식 세우기의 경우, '문항 이해의 오류', '개념 원리의 오류', '풀이 과정의 오류' 순으로 나타난 반면, 그림그리기에서는 문제에서 설명하는 내용을 잘못 이해하여 그림으로 나타내는 오류를 주로 범하였고, 표 만들기의 경우 문제에서 주어진 정보를 표로 나타내는 과정에서 정보들 간의 관계를 잘못 이해하여 오류를 범하는 '문항 이해의 오류'가 많은 것으로 나타났다. 이처럼 문장제를 통한 문제해결학습에서 학생들이 선호하는 문제해결전략을 확인함과 동시에 문제해결전략별 나타나는 오류의 특징을 확인함으로써 해결전략에 따른 오류를 예상하고 이에 대처하는 교수학습방안을 생각해볼 수 있을 것이다.

주요용어 : 문장제, 문제해결전략, 오류(유형), 문제해결학습, 문제해결력

Ⅰ. 서론

2007 개정 수학과 교육과정에서는 기초적인 수학적 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변에서 일어나는 현상과 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기르는 것을 목표로 하고 있다(교육인적자원부, 2007). 수학교육의 목적은 수학적으로 사고하도록 가르치는 것이며, 수학적으로 사고하도록 가르친다는 것은 수학적인 안목으로 문제를 해결하는 능력을 기른다는 것을 의미한다. 문제해결의 경험을 통하여 학생들은 기초적인 수학적 지식이나 기능을 확실하게 이해할 수 있게 되며, 고등 정신 기능을 신장시킬 수 있게 된다.

수학교육연구에서의 문제해결에 대한 관심과 움직임은 이미 여러 나라에서의 교육과정에서뿐만 아니라 우리나라에서도 공통된 경향으로 나타나고 있는데, 교육과정이 거듭 개편되면서 문제해결에 대한 실천적 의지가 지속적으로 강조되어왔다. 문제해결교육의 목적은 문

1) 부산충렬초등학교 (duddk56@hanmail.net)
2) 부산교육대학교 (joonysk@bnue.ac.kr)

제해결의 과정이나 국소적 전략 등의 숙달과 같은 지엽적인 면에서 찾을 것이 아니라, 이를 포함하여 학교수학의 전반적인 내용을 문제해결 방식으로 문제해결 정신에 입각하여 지도하려는 데서 찾을 수 있다. 이를 위해 문제해결에 대한 의미를 분명히 하고, 문제해결 지도에 적합하고 다양한 문제나 문제 상황의 개발은 물론, 수학 교과의 내용 전개가 전체적으로 문제해결을 지향하는 방식으로 이루어지도록 구성할 필요가 있다(교육인적자원부, 1998). 이처럼 교육과정에서 문제해결을 거듭 강조해왔음에도 불구하고 학교 현장의 수학교육은 단편적인 수식과 기호를 사용하여 문제를 해결하는 수준에 머물러 있으며 결과에 비중을 두어 학생들이 풀이 과정에서 범하는 오류에 대한 분석은 부족한 것이 현실이다. 이는 교사들의 문제해결과 문제해결전략에 대한 이해가 부족한 점, 문제해결이 (7차 교육과정의 경우) '문제 푸는 방법 찾기', (2007 개정 교육과정의 경우) '문제 해결 방법 찾기'와 같은 특정 단원에서만 학습되어온 점 그리고 문제해결전략에 대한 연습과 경험이 부족한 점 등에서 원인을 찾아볼 수 있다. 따라서 단편적인 수학적 지식과 문제 풀이만을 위한 기능의 숙달에서 벗어나 수학적 사고력과 문제해결력을 신장시킬 수 있는 문제해결교육이 더욱 필요한 시점이다.

한편 교사의 입장에서 보면, 유능하고 성공적인 수학 교사가 되 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학적 구조를 알아야 할 뿐만 아니라 학생들의 오류를 진단하기 위해 학생들이 사용하는 전략에 대한 지식을 갖추어야 한다. 학교 현장의 교사들은 학생들의 오류를 파악할 필요가 있으며, 이는 다음과 같은 긍정적인 효과를 낳을 수 있다. 첫째, 학생들의 오류 원인과 유형을 파악하고 각각의 오류에 대하여 학생들에게 필요한 피드백을 제공할 수 있다. 둘째, 오류 분석을 통해 내재되어 있는 수학적 개념에 대한 잘못된 이해, 문제해결전략의 부족이나 미성숙한 풀이 방법을 깨닫게 한다. 셋째, 오류 분석에서 드러난 학생들의 사고 과정의 결함은 교사가 교수 계획을 수립하는데 도움을 줄 수 있다(Clayton 외 3인, 1990; 김차숙, 2003, 재인용). 또한 학생들이 수학 문제를 해결하는 과정에서 범하는 오류는 학생들로 하여금 수학에 대한 자신감과 학습 의욕을 상실하게하며 후속 학습을 불가능하게 하여 수학을 포기하게 만드는 요인이 될 수 있다. 따라서 교사는 학생 개개인이 문제해결과정에서 범하는 오류에 대한 체계적인 접근을 해야 하며, 적절한 피드백을 제공하여 교정할 수 있어야 한다. Piaget는 많은 학생들이 일관성 있게 보인 오류는 그 문제를 접근하는 학생들의 인지구조를 나타내는 것이라고 말한 바 있다. 실제로 문제해결과정 중 학생들이 범하는 오류는 무작위로 아무렇게나 나타나는 것이 아니라 그들이 믿고 있는 의미 있는 체계적 관계 속에서 오류가 진행되고 있는바 이러한 오류는 학습자로 하여금 문제해결을 저해시키는 것은 물론 잘못된 개념의 획득으로 이어진다. 즉, 학습하는 과정에서 발생하는 오류는 학습에서의 실패 원인에 대한 가치 있는 정보를 제공하고 그 대안을 제시한다.

교육현장에서 학생들이 단순한 계산 문제는 잘 해결하나 생활 주변에서 일어날 수 있는 수학적 상황을 문장으로 표현한 문장제(word problem/sentence problem)를 해결할 때 어려움을 보이는 경우를 흔히 목격한다. 문제를 해결할 때 문제를 읽고 문제에서 무엇을 요구하는지, 주어진 자료와 조건은 무엇인지, 어떤 조건에 맞추어 무엇을 구해야 하는지를 파악하고 문제해결을 위한 여러 가지 사고전략을 검토하여 풀이계획을 세우고 실행하며 풀이가 다 이루어지면 풀이에 대한 반성을 할 수 있어야 하나 현장에서의 문제해결 수업은 문제를 읽고 풀이를 한 후 검산을 통해 답을 확인하는 정도에 머물러 있다. 문장제가 중요하게 다루어지는 이

유는 이해, 적용, 분석, 종합 등과 관련된 종합적인 수학적 사고를 개발하는데 있어 효과적이기 때문이며 이러한 이유로 인해 문장제는 문제해결교육과 함께 강조되어왔다(신승용, 1997).

이에 본 연구는 초등학교 5학년을 대상으로 수학과 교육과정과 교과서를 중심으로 검사지를 구성하고 평가를 실시하고, 그런 다음 문장제 해결과정에서 나타나는 오류들을 분석하고 문제해결전략별 오류 유형 및 그 특징을 파악함으로써 학습의 실패 원인에 대한 정보를 제공하는데 일차적인 목적을 두고 있으며 이로부터 수학적인 사고와 문제해결력을 향상시킬 수 있는 학습지도방안을 생각해보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제해결전략

문제해결에서 말하는 사고전략이란 문제해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방책 등을 의미한다. 문제해결에 필요한 지식과 개념을 알고 있다고 하더라도, 그것을 받아들여 문제의 조건과 연결 짓고 문제해결의 단서를 찾아내도록 하는 것이 바로 사고전략이다. 전략은 인간이 자신의 학습이나 사고의 과정을 통제하는 능력으로서 문제를 성공적으로 해결하는데 있어 가장 중요하게 작용하는 요소이다. 문제해결에 유용한 사고전략은 여러 가지로 제시되는데, 초등학교 수학에서 등장하는 사고전략으로 실제로 해보기, 식 세우기, 예상과 확인, 그림그리기, 표 만들기, 규칙 찾기, 단순화하기, 거꾸로 풀기 등이 있으며, 이들은 모두 2007 개정 수학과 교육과정에서 취급하도록 한 문제해결 사고전략들이다. 본 연구에서는 문장제 해결 평가 검사지 분석을 통해 선호하는 문제해결전략에 대해 조사하고 아울러 문제해결전략별 오류 유형 분석을 위해 실제로 해보기를 제외한 식 세우기, 예상과 확인, 그림그리기, 표 만들기, 규칙 찾기, 단순화하기, 거꾸로 풀기 전략을 대상으로 교육과정 및 교과서에서 제시한 문제해결전략과 학생들이 선택한 문제해결전략이 일치하는 경우를 중심으로 이때 발생한 오류에 대해 분석하였다.

2. 수학적 오류

수학교육에서 오류 연구가 시작된 초기에는 오류가 학습하는 과정에서 무언가 잘못되어 교정을 필요로 하는 징후로만 여겼다. 그러나 오류가 학생이 자신의 문제해결전략과 인지구조에 따라 지식을 구성하고 사고하는 과정을 드러낸다는 주장이 등장하게 되면서 오류 연구는 보다 폭넓게 전개되기 시작했다(Brown, 1983). 곧, 학생의 오류 발생 원인은 이미 형성된 지식과 새로운 지식간의 연결의 관점에서 이해될 수 있다. Vanlehn은 학생이 잘못 학습된 지식을 가지고 새로운 문제 상황으로 확장함에 따라 오류가 발생한다고 하였으며, 대부분의 체계적인 오류 패턴은 학생 자신들이 들은 것을 이해하고 주어진 문제를 수행하려는 시도에 대한 자연스러운 결과이며, 수학적인 개념을 이해하지 못한 채 상징적 기호 측면에서만 수

학을 다루기 때문에 오류가 발생한다고 하였다(Resnick & Klopfer, 1989, 재인용).

한편 Brousseau(1997)는 수학 학습에서 오류가 발생하는 원인에 대해 그 특징을 다음 세 가지로 분류하였다. 첫째, 오류는 종종 수학의 기본적인 개념에 관한 오개념의 결과로 나타난다. 둘째, 오류는 학생들이 결함이 있는 절차를 사용하고 교사에 의해 잘못 인식된 오개념을 가짐으로써 발생한다. 셋째, 학생들은 종종 문제해결을 위해 자신의 독창적이고 비형식적인 방법을 창안하는데, 이것들은 더욱 일반적인 문제 형태의 특별한 경우에 기초한 귀납적 추론 과정의 결과이며 이런 방법들이 때로는 심각한 오류를 일으킬 수 있다(이종희, 2002, 재인용).

이러한 이유로 인해 수학교육자들에게 오류 분석은 교육적인 측면에서 그 의의를 갖는다(이경아, 1997). 이를테면, 오류분석을 통해 수학의 다양한 주제에 대한 학생의 지식과 지식 구성방식을 이해할 수 있게 되며, 문제 해결과정에 대한 학생의 사고 과정을 드러내어 그 원인을 진단할 수 있는 도구로 유용하게 사용될 수 있다. 특히 계산 과정에서의 오류는 학생이 생성하는 부정확한 알고리즘의 원인을 규명할 수 있게 해준다. 그리고 무엇보다 오류 분석을 통해 오류를 발생시키는 내용에 대한 교수 방법의 개선을 가져올 수 있으며, 본 연구 역시 이러한 관점에서 문제해결전략별 오류 유형을 분석하고 있다.

3. 오류 유형 분석

학생들이 범하는 일반적인 오류 유형을 교사가 숙지한다면 수학 교과 내용을 가르치거나 교정을 하는 과정이 훨씬 효과적 될 수 있다. 뿐만 아니라 각 유형에 대한 발생 빈도는 교사로 하여금 특히 어떠한 부분에 주의를 두어야 하며 어떤 요소는 무시해도 되는지에 대한 실제적인 정보를 제공해 준다. 실제로 오류 유형에 대한 많은 연구는 오류 유형과 더불어 유형별 발생 빈도를 제시하고 있다. 수학과 오류 유형은 다양한 범위에서 조사되어왔으며 학자마다 여러 가지 방식을 제시하고 있다. 한 예로 Hadar & Zaslavsky(1987)는 오류는 우연한 것이 아니며, 학생들에게는 나름대로 의미를 갖는 유사-논리에 의해서 일어난다고 가정하였다. 그들이 제시한 오류 모델은 다음 <표Ⅱ-1>과 같다.

<표Ⅱ-1> Hadar & Zaslavsky의 오류 모델

오류	설명
문제의 자료를 잘못 사용하는 오류	문제에 주어진 자료와 피험자가 처리하는 자료 사이의 일치하지 않음과 관계된 오류
문제 내용을 잘못 해석하는 오류	한 언어에서 설명된 수학적 사실을 다른 언어로 잘못 옮김으로써 나중에 자료들을 처리하는 오류
논리적으로 부적절한 추론	잘못된 추론을 다루고 특별한 내용을 다루지 않는 오류, 즉 주어진 정보로부터 잘못 유도된 새로운 정보를 포함하는 오류
정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류	특별하고 동일시 할 수 있는 원리, 규칙, 정리와 정의에 대한 왜곡을 다루는 오류
논증되지 않은 해답	피험자에 의해서 수행된 각 단계는 옳지만, 제시된 최종 결과가 진술된 문제에 대한 해가 아닌 오류
기술적인 오류	계산적 오류, 표로부터 자료를 끌어내는데 있어서의 오류

본 연구에서는 위의 오류모델을 초등학교 수준에 적용하기 위해, 정현도(2009)에 제시된 문장제 해결과정에서 나타날 수 있는 오류의 범주에 따른 오류 유형을 차용했는데, 이에 따르면 오류를 개념적 오류와 기술적 오류로 분류하고, 개념적 오류의 키워드로는 읽기, 이해, 변환이 있고, 기술적 오류의 키워드로는 처리, 기록, 생략에 따라 각각의 오류를 문항 이해의 오류, 개념 원리의 오류, 자료 사용의 오류, 풀이 과정의 오류, 기록 단계의 오류, 풀이 과정의 생략 등으로 구분하여 문장제 평가 검사지의 문항에 대해 문제해결전략별 오류를 분석하였다.

<표Ⅱ-2> 오류 유형 및 그 정의

키워드	오류 유형	내용
읽기	문항 이해의 오류	문제에서 요구하는 내용을 잘못 해석하여 발생하는 오류
이해	개념 원리의 오류	기본 개념을 잘못 파악, 기본 정보가 부적절하게 이끌어져 발생하는 오류
변환	자료 사용의 오류	문제의 내용을 이해하고, 구조를 파악해서 해결하는 것이 아니라 문제에 주어진 실마리나 키워드를 문제 내용의 식을 변환하거나 연산을 선택하는 오류
처리	풀이 과정의 오류	문제의 답을 논증하는 과정이 잘못되어 발생하는 오류
기록	기록 단계의 오류	풀이 과정은 옳게 정의 되었으나, 답을 잘못 옮겨 쓴 경우 발생하는 오류
생략	풀이 과정의 생략	풀이 과정을 생략하고 답만을 언급한 경우

4. 선행연구 고찰

선행연구 고찰에서는 문제해결과 오류 유형에 대한 몇몇 수학교육연구를 살펴보았다.

먼저 국내외의 여러 학자들에 의하여 문제해결에 관한 다양하고 많은 연구가 이루어졌으나 본 연구에서는 국내의 수학교육에서 문제해결 교육에 관한 연구를 학위논문에서 찾아보았다. 그 가운데 일부를 소개하면, 백한식(1990)은 문제해결력을 기르는 수학 학습지도에 관한 연구에서 문제해결력을 기르는 수업은 교사가 일방적으로 가르치는 교사 위주의 수업에서 탈피하여 학생 스스로가 수학을 공부하는 방법 즉, 학생이 스스로 문제를 발견하고 스스로 계획을 수립하여 실행에 옮겨 검증하는 태도를 갖게 하는 방법의 수업이 바람직하고, 한 가지 문제를 여러 가지 방법으로 풀어보게 함으로써 학생들의 문제해결력을 계발시키고 그 때의 기쁨을 맛보게 하는 것도 필요하다고 했다. 그리고 황치홍(2001)은 수학교육에서 문제해결교육과 연구경향을 분석하고 설문지를 통해 교사들의 의식을 분석하여 앞으로의 문제해결교육과 관련해서 바람직한 방향을 모색하고자 하였다.

수학교육에서 오류에 관한 연구는 오랫동안 전개되어왔는데, 이는 오류에 대한 연구를 함으로써 학생들의 인지 능력을 파악할 수 있고 교수학습에서 더 효과적인 교육을 할 수 있기 때문이다. 이를테면, 장영은(2003)은 학생들의 오류 분석을 통해 오류가 지식과 연계되거나

또는 연계되지 않을 수도 있는 특별한 방법들을 확인함으로써 그 원인을 설명하려고 하였다. 또한 문장제 해결에 있어 초등학교 6학년 학생들의 전략 선택과 장애 형태를 조사하여 장애 유형과 그 분포를 알아보기 위한 손원동(1994)의 연구가 있는데, 여기서는 정형적인 문장제 해결에서 성공여부의 주요전략은 '식 세우기'이고, 비정형적인 문제에서 성공적인 학생은 다양한 전략을 사용하는 경향이 있음을 밝히고 있다. 오세경(1996)은 수학 학습 지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안에 대해 오류의 요인을 수학에 대한 두려움, 용어와 정의에 익숙하지 못함, 기호에 익숙하지 못함, 응용력의 부족, 논리적 사고 기피, 계산능력 부족의 6가지로 분류하였다. 석경희(2004) 은 6학년 학생 2학급 72명(남 30명, 여 42명) 을 대상으로 10개의 문장제를 풀게 하고, 풀이과정에서 나타난 오류들을 유형화하여 문제별 유형 빈도와 수학 성취도에 따른 오류 유형 빈도를 분석하였다. 문제별 오류 유형 빈도는 풀이를 시도하지 않음(39%), 문제의 문장에 대한 오해(19%), 잘못 이해된 수학내용의 사용(17%) 순으로 나타났다. 김윤선(2009)은 4-6학년 학생들의 수학 교과서와 익힘책에 제시된 문장제 이해도를 분석한 결과 수와 연산, 측정, 문자와 식 영역 모두 문장제 이해 정도가 전체적으로 낮게 나타났으며 특히 문자와 식 영역에서 학생들의 문장제 이해 정도가 가장 부족한 것으로 나타났다. 이는 문자와 식 영역은 복잡하고 고차적인 수학적 사고력을 요구하기 때문으로 보인다고 분석하였다.

이처럼 수학교육에서 문제해결을 위한 교수학습방안에 대한 연구와 문제해결에서 비롯되는 오류 유형 및 그 원인 분석에 대한 연구는 함께 맞물리면서 진행되어왔다. 그러나 지금까지의 연구들이 문제해결전략에 따라 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 오류의 유형이나 그 비율에 대한 검토는 없었으며, 이에 본 연구에서는 학생들이 선호하는 문제해결전략을 우선적으로 살펴보고 이어서 각 문제해결전략별 오류의 유형을 앞서 제시한 <표Ⅱ-2>에 따라 분석하고자 하였다.

Ⅲ. 연구의 방법

본 연구는 학생들이 문장제 해결과정에서 문제해결전략(식 세우기, 예상과 확인, 그림그리기, 표 만들기, 규칙 찾기, 단순화하기, 거꾸로 풀기)의 유형별 선호도를 분석하고, 문장제 해결과정에서 나타나는 문제해결전략별 오류의 유형을 분석하고자 한다. 이를 위해 부산광역시에 소재한 Y초등학교 5학년 6반 39명을 연구대상으로 선정하였다.

먼저 5-1, 5-2 수학교과서와 수학 익힘책, 교사용 지도서(교육과학기술부, 2010A, 2010B, 2010C)의 문장제 문항을 추출하여 검사지(<부록1>)를 제작한 후 5학년 2학기 8단원 '문제해결 방법 찾기' 단원 학습 시 평가 문항을 적용하여 학생들이 문장제 해결과정에서 선호하는 문제해결전략과 문제해결전략별 오류 유형을 분석하였다. 문장제 해결 검사지는 <표Ⅲ-1>과 같이 순차적으로 적용되었다. 학생들은 각 검사지의 문항을 풀기 전에 자신이 해결하고자 하는 문제해결전략을 표시한 다음, 그에 따라 문제를 해결한다. 따라서 본 연구는 교과서와 익힘책, 지도서에 제시된 문제해결전략과 학생들이 선호하는 문제해결전략 사이에서 학생들이 선택한 전략에 따라 그 오류 유형과 특징을 분석한 것이다.

<표Ⅲ-1> 문장제 해결 검사지 적용 계획

단원	8. 문제 해결 방법 찾기	
차시	주제	수업 내용 및 활동
1	식을 세우거나 그림을 그려 문제 해결하기	- 문제의 조건에 맞는 식을 세워 문제를 해결할 수 있다. - 문제의 조건에 맞는 그림을 그려 문제를 해결할 수 있다. - 두 가지 방법을 비교하여 각각의 방법에 좋은 점을 말할 수 있다.
2	예상하고 확인하거나 표를 만들어 문제 해결하기	- 문제의 조건에 맞게 답을 예상하고 확인하여 문제를 해결할 수 있다. - 문제의 조건에 따라 표를 만들어 문제를 해결할 수 있다. - 두 가지 방법을 비교하여 각각의 방법에 좋은 점을 말할 수 있다.
3	거꾸로 생각하거나 규칙을 찾아 문제 풀기	- 문제의 조건과 결과를 이해하고 결과로부터 거꾸로 생각하여 처음의 조건을 구하게 한다. - 문제를 이해하고 규칙을 찾아 해결하게 한다. - 두 가지 방법을 비교하여 각각의 방법에 좋은 점을 말할 수 있다.
4	간단히 하여 문제 풀기, 여러 가지 방법으로 문제 풀고 문제 푸는 방법 비교하기	- 문제를 간단한 경우로 바꾸어 생각하여 규칙이나 원리를 찾아내어 원래의 문제를 해결하게 한다. - 문제의 조건에 따라 생각해보며 문제를 해결할 수 있다. - 문제풀이 방법을 비교하여 각각의 방법에 좋은 점을 말할 수 있다.
5~8	여러 가지 방법으로 문제 풀고, 문제 푸는 방법 비교하기	- 문제를 알맞은 방법으로 풀고 풀이방법을 말하게 한다. - 문제풀이 방법을 비교하여 각각의 방법에 좋은 점을 말할 수 있다.

본 연구에서 먼저 사전평가(P)를 실시했다. 사전평가 검사지는 5학년 수학 교과서 수준으로 교사용 지도서에 제시되어 있는 문제해결전략별 1문항씩(식 세우기와 그림그리기, 예상과 확인과 표 만들기는 두 전략 중 선택하도록 함) 총 5문항을 추출하여 구성했다. 문장제 해결 검사지를 구성하는 평가 문항은 수학 ‘5-가, 5-나 수학교과서’와 ‘수학익힘책’ 수준의 문장제 40문항을 추출하여 학생들의 문장제 해결과정에서 문제해결전략의 선호도를 분석하고, 문장제 해결과정에서 나타나는 문제해결전략별 오류의 유형을 오류 범주에 따라 분석하였다. 이를 위해 문항에 대한 분석 및 교과서, 교사용 지도서에 제시된 문제해결전략의 유형을 바탕으로 문제해결전략 유형별로 문항을 분류하여 검사지를 개발하였다.

문장제 해결과정에서 나타나는 오류 유형을 수집하기 위해 학생들이 검사지에 직접 기록한 풀이과정과 답안만을 분석대상으로 하였으며, 사전평가 문항 5문제, 문장제 평가 문항 40문제에 대해 학생의 문제해결과정을 문항별로 검토하여 분석하였다. 다음 <표Ⅲ-2>는 문장제 평가 검사지 문항에 대해 교과서와 교사용 지도서에 제시된 문제해결전략을 중심으로 문항과 문제해결전략 사이의 관련성을 정리한 것이며, 학생들이 문장제를 해결하는 과정에서 보이는 문제해결전략별 오류는 관련성이 있는 전략에 대해서만 분석을 실시하였다.[3)]

3) 다양한 문제해결전략으로 접근하여 해결하려는 시도가 부정적인 것은 아니다. 하지만 본 연구에서는 문제해결전략별 오류에 관심이 있으며, 이를 위해 교과서와 교사용 지도서에 제시된 전략을 중심으로 분석하였다.

<표Ⅲ-2> 문장제 평가 검사지 문항의 문제해결전략과의 관련성 분석

차시	문항	식 세우기	예상과 확인	그림 그리기	표 만들기	규칙 찾기	단순화 하기	거꾸로 풀기
1	1	○	○	◉	○	△	△	△
	2	◉	△	◉	△	△	△	△
	3	◉	△	◉	△	△	△	△
	4	◉	△	◉	△	△	△	△
	5	○	△	◉	△	△	△	△
2	1	△	○	△	◉	△	△	△
	2	○	◉	△	◉	△	△	△
	3	○	◉	△	○	△	△	△
	4	○	◉	△	○	△	△	△
	5	○	◉	△	◉	△	△	△
3	1	○	△	△	△	△	△	◉
	2	△	△	△	△	◉	△	△
	3	○	△	△	△	△	△	◉
	4	○	△	△	△	◉	△	△
	5	○	△	△	△	△	△	◉
4	1	△	△	○	△	△	◉	△
	2	○	△	◉	△	△	△	◉
	3	△	△	△	△	△	◉	△
	4	△	△	△	◉	△	△	△
	5	△	△	△	△	○	◉	△
5	1	△	◉	△	△	△	△	△
	2	○	△	△	△	△	△	◉
	3	△	△	◉	△	◉	△	△
	4	△	△	○	△	△	◉	△
	5	◉	△	△	△	△	△	△
6	1	◉	△	◉	△	△	△	△
	2	△	△	○	△	△	◉	△
	3	△	△	△	△	◉	△	△
	4	△	○	△	◉	△	△	△
	5	○	△	△	△	△	△	◉
7	1	△	△	△	△	△	△	◉
	2	△	◉	△	△	△	△	△
	3	△	△	△	△	△	◉	△
	4	△	△	△	◉	△	△	△
	5	◉	△	◉	△	△	△	△
8	1	◉	△	◉	△	△	△	△
	2	△	△	△	△	△	◉	△
	3	△	◉	△	◉	△	△	△
	4	△	△	△	△	◉	△	△
	5	○	△	△	△	△	△	◉

(◉ : 매우 관련 있음, ○: 조금 관련 있음, △: 거의 관련 없음.)

Ⅳ. 연구의 결과

문장제 검사지(<부록1>)를 이용하여 평가를 실시하고 채점한 결과를 바탕으로 문제해결전략의 선호도와 문제해결전략별 오류 유형을 분석하여 학생들의 학습의 실패 원인에 대한 정보를 제공하고 수학적인 사고와 문제해결력을 향상시킬 수 있는 교수 방안을 생각해보고자 한다.

1. 문제해결전략의 유형별 선호도

문장제 해결과정에서 학생들이 선호하는 문제해결전략의 유형을 알아보기 위해 <부록1>과 같은 문장제 해결 검사지를 개발하였으며, 학생들이 문항을 보고 풀고자하는 문제해결전략을 선택하여 문제를 해결하도록 하였다. 검사지는 5학년 2학기 '문제 해결 방법 찾기' 단원 수업시간에 수행하였다. 1~4차시는 각각의 문제해결전략을 단계별로 소개하면서 그에 따른 문장제 해결을 지도하였으며, 5~8차시에서는 여러 가지 방법으로 문장제를 해결하는 수업으로 진행되었다. 다음 <표Ⅳ-1>은 문장제 해결과정에서 학생들이 선호하는 문제해결전략유형을 정리한 것으로, 5~8차시에서 문제 푸는 방법 비교하기를 주제로 한 수업에서 적용한 문항을 대상으로 분석하였다(음영은 교과서 및 교사용지도서를 분석하여 정리한 문제해결전략과 일치하는 전략을 표시한 것임).

<표Ⅳ-1> 문장제 해결과정에서 학생들이 선호하는 문제해결전략

차시	문항	식 세우기	예상과 확인	그림 그리기	표 만들기	규칙 찾기	단순화 하기	거꾸로 풀기
5	1	2	29	0	7	0	0	0
	2	9	0	0	0	0	1	28
	3	6	2	21	0	5	1	0
	4	11	3	6	1	8	5	0
	5	11	3	6	1	8	5	0
6	1	27	0	9	0	0	1	0
	2	13	1	3	1	13	4	0
	3	7	2	8	0	15	4	0
	4	4	16	1	15	1	0	0
	5	2	0	2	0	0	0	32
7	1	18	2	11	1	1	0	1
	2	0	24	0	12	0	0	0
	3	26	2	3	0	0	1	0
	4	5	3	6	21	2	0	0
	5	27	0	2	1	0	1	2
8	1	21	7	4	2	0	0	2

	2	2	2	20	0	7	2	0
	3	3	14	0	17	1	0	0
	4	8	3	1	0	25	0	0
	5	5	1	0	0	0	0	30
계		207	114	103	79	86	25	95
추천빈도		4	3	4	3	3	4	4
비율 (선택자수)		51.75% (207)	38% (114)	25.75% (103)	26.3% (79)	28.6% (86)	6.25% (25)	23.75% (95)

교과서 및 교사용 지도서를 바탕으로 분석하여 정리한 문제해결전략과 일치하는 전략을 학생들이 선택하는 경우는 55%, 일치하지 않는 경우는 45%였다. 학생들이 단순화하기 전략을 거의 사용하지 못했기 때문에 단순화하기 전략과 관련된 문항을 제외했을 경우 교육과정에 제시된 문제해결전략과 일치하는 경우는 378회(66%), 일치하지 않는 경우 197회(34%)이다. 학생들이 문항에 적합한 문제해결전략을 선택하여 해결 할 수 있도록 다양한 문제를 제시하여 적절한 방법을 선택하여 해결하도록 지도해야 할 것이다.

<표Ⅳ-2> 문제해결전략과 일치도

문제해결전략과 일치		문제해결전략과 불일치	
빈도(회)	백분율(%)	빈도(회)	백분율(%)
390	55	319	45

교과서 및 교사용 지도서를 바탕으로 분석한 문제해결전략과 일치하지 않은 전략을 선택하는 경우 식 세우기와 그림그리기 전략을 선호함을 알 수 있었다. 식 세우기는 문장제의 풀이과정에서 모든 해결전략과 같이 사용되는 것으로 구하려고 하는 해를 구하는 가장 구체적인 방법이며 학생들이 문제를 해결할 때 쉽고 유용하게 사용하는 전략이다. 또한 학생들이 수학 문제를 해결할 때 식을 세우는 것을 문제해결을 위한 가장 일반적인 방법이라고 생각하여 어떤 문제에서든 기계적으로 생각하고 식을 세워 문제를 해결하려는 경향도 보여 가장 선호하는 것으로 보인다. 그림그리기 전략은 문제를 전체적으로 이해하는데 탁월한 효과가 있으며 학습자들의 흥미를 유도하기에 적합한 방법이며 가장 쉽게 접근할 수 있는 전략이기에 선호하는 것으로 보인다.

<표Ⅳ-3> 문항분석과 일치하지 않는 전략 선택 시 선호하는 문제해결전략

문제해결 전략	식 세우기	예상과 확인	그림 그리기	표 만들기	규칙 찾기	단순화 하기	거꾸로 풀기
빈도 (회)	121	47	67	26	41	13	4

2. 문제해결전략별 오류 유형 분석

문장제 해결과정에서 나타나는 문제해결전략별 오류 유형을 분석하기 위해 사전평가(P)에서 8차시까지 평가한 문항을 대상으로 학생들이 교과서와 교사용 지도서에 제시된 문제해결전략과 일치하는 전략을 선택하여 오류를 범한 문항에 대해, 이를테면 식 세우기 문제해결전략이 기대된 문항에서 식 세우기 전략을 사용하여 문제를 해결한 학생이 범한 오류만을 분석 대상으로 하였다. 이러한 오류 분석을 통하여 문장제 해결과정에서 나타나는 학생들의 오류 원인과 형태를 보다 상세하게 파악하고 각각의 오류에 대하여 정확한 진단과 처방을 할 수 있을 뿐만 아니라, 오류 분석에서 드러난 학생들의 사고 과정의 결함을 발견함으로써 학습-지도 계획을 수립하는 데에도 참고가 될 것이다.

1) 식 세우기

식 세우기는 주어진 조건들 사이의 관계를 나타내는 식을 만들어 그것을 문제해결에 이용하는 전략이다. 식 세우기 전략은 학생들이 가장 선호하는 전략인 동시에 가장 많은 오류를 보이는 전략인데, 이 전략을 사용할 때 학생들이 보이는 오류 유형으로는 <표Ⅳ-4>와 같이 ‘문항 이해의 오류’, ‘개념 원리의 오류’, ‘풀이 과정의 오류’ 순으로 나타났다.

<표Ⅳ-4> 식 세우기 전략 사용 시 나타난 오류유형분석

차시	문항	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
P	4	1	1	0	0	1	0
1	2	4	9	0	3	0	0
1	3	5	0	0	0	0	0
1	4	4	3	0	2	4	0
5	5	2	0	0	0	0	3
6	1	7	5	0	0	0	0
7	5	4	0	0	1	0	0
8	1	5	1	0	0	0	0
계		32	19	0	6	5	3

먼저 문항 이해의 오류 사례를 살펴보면, 다음 [그림Ⅳ-1]과 같이 문항에서 요구하는 정답은 3000원의 $\frac{1}{5}$인 600원으로 빵을 사고 남은 돈 2400원의 $\frac{1}{4}$인 600원으로 음료수를 사면 남는 돈은 1800원이어야 하지만 문항을 잘못 이해하여 3000원의 $\frac{1}{5}$인 600원에서 $\frac{1}{4}$인 150원을 답으로 구하였다.

문 제 (1차시 3번)	정선이는 3000원 중에서 $\frac{1}{5}$은 빵을 사고, 나머지의 $\frac{1}{4}$은 음료수를 샀습니다. 남은 돈은 얼마입니까?
$3{,}000 \div 5 \div 4 = 150$ 600 150 150원	

[그림Ⅳ-1] 식 세우기 문항 이해의 오류 사례

다음으로 개념 원리의 오류 사례를 살펴보면, 다음 [그림Ⅳ-2]와 같이 문항에서 처음 헝겊의 넓이는 1600cm^{2}이다. 정희가 사용한 헝겊의 가로는 $40\times\frac{3}{4}=30$(cm)이고, 세로는 $40\times\frac{3}{4}=30$(cm)이다. 식을 세우면, $(40\times\frac{3}{4})\times(40\times\frac{3}{4})=30\times30=900$(cm^2)이다. 정희가 사용한 헝겊의 넓이 900(cm^2)는 처음 헝겊의 넓이 1600(cm^2)의 $\frac{9}{16}$이다. 또는 넓이를 구하지 않고, $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$인 것으로 알아낼 수도 있다. 하지만 학생들은 $\frac{3}{4}$ 줄이는 것을 잘못 이해하여 $\frac{3}{4}$을 줄이면 $\frac{1}{4}$이 남을 것이라 생각하고 $(40\times\frac{1}{4})\times(40\times\frac{1}{4})=10\times10=100$(cm^2) 으로 넓이를 구하여 정희가 사용한 헝겊의 넓이를 처음 헝겊의 넓이의 16배로 답하여 오답인 경우가 3명 있었으며, 가로와 세로를 $\frac{3}{4}$으로 줄이는 것을 $(40-\frac{3}{4})$ 으로 계산하여 오답인 경우, 가로와 세로를 $\frac{3}{4}$으로 줄이는 것을 $(40\div\frac{3}{4})$으로 구하여 오답인 경우가 6명 있었다. 이와 같은 분석을 통해 학생들이 연산자로서의 분수의 개념에 대한 이해가 부족하며, 따라서 분수를 연산자로 활용할 때 각각의 연산자에 대한 각별한 지도가 필요함을 알 수 있다.

식 세우기 전략을 사용하는 경우 규칙 찾기나 거꾸로 풀기와 비교했을 때 상대적으로 풀이 과정의 오류가 적게 나타났는데, 그 이유는 식 세우기 자체가 문제해결을 위한 전략으로 사용되면서 식의 전개 과정에 보다 관심을 갖고 문제를 해결하기 때문으로 보인다. 풀이 과정의 오류에 해당하는 사례로는 [그림Ⅳ-3]과 같이 문항을 이해하여 식을 올바르게 세웠으나 계산과정에서 $12\times\frac{5}{6}\times2=20$ 을 $12\times\frac{5}{6}+2=12$로 구하는 오류를 범하였다. 식 세우기 전략의 경우 올바르게 식을 세우고 계산하는 과정에서 오류를 나타내는 경우가 자주 발생하므로 학생들이 풀이를 실행할 때 풀이의 매 단계가 옳은지 확인하는 습관을 가지도록 지도해야 할 것이다.

<table>
<tr><td>문 제
(6차시
1번)</td><td>정희는 가로, 세로가 40cm인 헝겊으로 방석을 만들려고 합니다. 정희는 가로, 세로를 $\frac{3}{4}$으로 줄여서 만들려고 합니다. 정희가 사용한 헝겊의 넓이는 처음 헝겊 넓이의 몇 배가 됩니까?</td></tr>
<tr><td colspan="2">가로, 세로가 40cm= 40×40=1600cm²
가로, 세로를 $\frac{3}{4}$줄인것=$(40\times\frac{1}{4})\times(40\times\frac{1}{4})$=
10×10= 100cm²

1600÷100=16

답 16배</td></tr>
</table>

[그림Ⅳ-2] 식 세우기 개념 원리의 오류 사례

<table>
<tr><td>문 제
(1차시
2번)</td><td>가로의 길이가 18m, 세로의 길이가 12m인 직사각형 모양의 화단에 가로의 $\frac{7}{9}$만큼, 세로의 $\frac{5}{6}$만큼을 사용하여 장미를 심으려고 합니다. 장미를 심는 부분의 둘레의 길이는 몇 m 입니까?</td></tr>
<tr><td colspan="2">〈풀이과정〉
$\cancel{18}\times\frac{7}{\cancel{9}}\times2+\cancel{12}\times\frac{5}{\cancel{6}}\times2=\cancel{28}+12=30$ ∴30m</td></tr>
</table>

[그림Ⅳ-3] 식 세우기 풀이 과정의 오류 사례

2) 예상과 확인

예상과 확인 전략은 주어진 문제를 해결하기 위해 미리 추측으로 답을 예상해 보고, 그 답이 문제의 조건에 맞는지 검토해 보는 과정을 반복하여 문제를 해결해 나가는 전략이다. 문제를 읽고 식을 세워 답을 구하기가 어려운 경우나 문제의 이해가 잘 안 되는 경우, 미리 문제의 답을 예상해 보고, 그것이 문제의 조건에 맞는지 확인해 보는 시행착오를 거치면서 주어진 문제를 해결 할 수 있다. 예상과 확인 전략을 사용한 문제의 경우 문제 해결 시 오답율이 적었으며 전략의 사용에 대한 이해도 높았다. 다만, 문항에서 조건이 2가지 이상 주

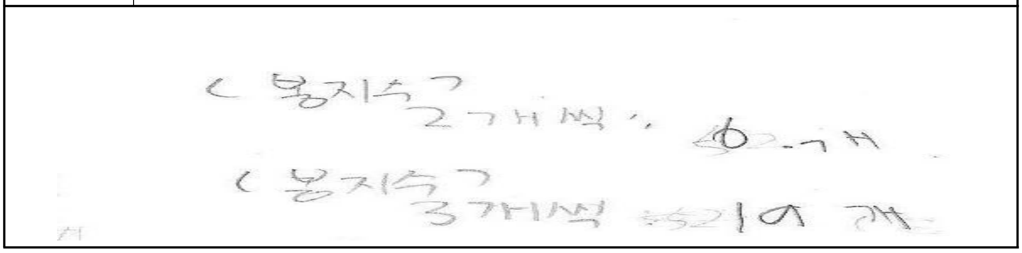
어진 문제의 경우는 2가지 조건 중 1개의 조건을 간과하는 경우가 많았다. 또한 학생들 중에는 예상과 확인 전략에 대한 이해 부족으로 마구잡이로 대입해서 우연의 일치로 해를 구하려는 경우도 있기에 해를 예상할 때에는 계획적이고 수학적인 사고를 통하도록 지도해야 하겠다. 또한 막연하게 예상하지 않고 계획적으로 할 수 있도록 예상되는 모든 경우를 차례로 표를 이용하여 구하는 방법도 지도해야 할 것이다.

<표Ⅳ-5> 예상과 확인 전략 사용 시 나타난 오류 유형 분석

차시	문항 번호	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
P	3	2	0	1	0	1	0
2	2	0	0	0	0	0	2
2	3	1	0	0	0	0	0
2	4	1	0	0	0	0	0
2	5	0	0	0	0	0	1
5	1	5	0	0	0	0	0
7	2	0	0	0	1	0	0
8	3	0	0	0	0	0	0
계		9	0	1	1	1	3

<표Ⅳ-5>에서 보듯이 예상과 확인 전략 사용 시 오류는 다른 전략에 비해 상대적으로 낮은 빈도수를 나타냈으며, 주로 문항 이해의 오류와 풀이 생략의 오류가 일부 나타났다. 한 예로 다음 [그림Ⅳ-4]는 문항 이해의 오류에 해당하는데, 봉지의 합이 25인 것만 생각하고 과자 70개를 봉지에 나눠 담는 정보는 간과하였다. 이처럼 예상과 확인 전략을 사용하여 오답을 범하는 경우 2가지 조건 중 1개의 조건을 간과하는 경우가 문항 이해 단계에서 주로 나타났다. 또한 예상을 하고 확인해가는 과정에서 많은 시행과 수정을 통해 시간이 많이 걸려 중도에 포기하는 경우도 있었기에 체계적인 방법으로 접근 할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

문 제 (5차시 1번)	과자 70개를 어떤 봉지에는 2개씩, 어떤 봉지에는 3개씩 넣어 모두 25봉지를 만들려고 합니다. 2개씩 넣은 봉지의 수와 3개씩 넣은 봉지의 수를 각각 구하시오.



[그림Ⅳ-4] 예상과 확인 문항 이해의 오류 사례

3) 그림그리기

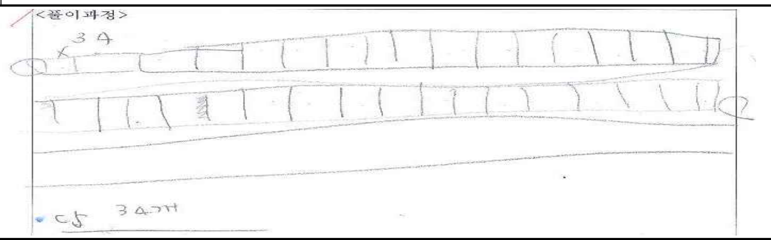
그림그리기 전략은 문제를 읽고 문제에 나타난 사실이나 관계를 이해한 만큼 그림으로 나타내어 해결방법을 찾는 전략이다. 문제에서 설명하는 그대로 그림으로 나타내는 과정 중에 분명하지 않았던 조건이 보다 쉽게 문제의 핵심으로 나타날 수도 있고 그 관계를 파악하는데 도움이 될 수도 있다. 그림그리기 전략 사용 시 문제에서 설명하는 내용을 잘못 이해하고 그림으로 그려서 주로 오류를 범하였고(문항 이해의 오류), 둘레 등에 대한 개념 이해가 부족하여 오류를 나타내는 경우(개념 원리의 오류), 그림은 정확하게 그렸지만 풀이 과정에서 오류를 범하는 경우(풀이 과정의 오류) 순으로 나타났다.

<표Ⅳ-6> 그림 그리기 전략 사용 시 나타난 오류 유형 분석

차시	문항	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
P	4	1	3	1	0	0	0
1	2	3	4	0	7	0	1
1	3	4	0	2	1	0	0
1	4	1	4	0	1	1	0
1	5	3	0	0	0	2	0
5	3	6	0	0	1	0	0
6	1	1	2	0	2	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0
계		20	13	3	12	3	1

먼저 문항 이해의 오류를 살펴보면, [그림Ⅳ-5]와 같이 한 쪽 면에 한명씩 앉을 수 있으므로 식탁이 1개일 경우 4명이, 2개일 경우 6명이 앉을 수 있다. 따라서 36명의 학생이 앉기 위해선 식탁이 17개가 필요하다. 그러나 그림을 보면 문제에서 설명하는 내용을 잘못 이해한 상태에서 그림을 그리고 있음을 알 수 있다. 이에 대해서는 그림을 다시 문제로 해석해 보도록 하는 발문이 지도방안으로 제시될 수 있을 것이다.

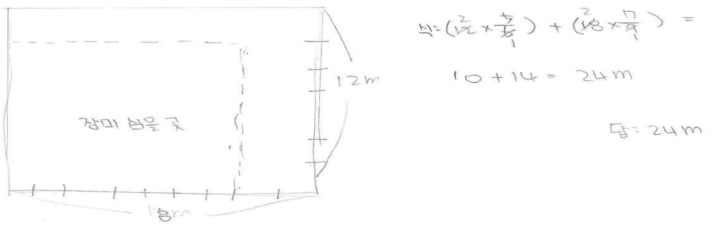
문 제 (5차시 3번)	한쪽 면에 한명씩 앉을 수 있는 식탁을 한 줄로 나란히 붙여 놓고, 식탁 주위에 36명의 학생이 앉으려고 합니다. 식탁은 모두 몇 개 필요합니까?



[그림Ⅳ-5] 그림그리기 문항 이해의 오류 사례

다음으로 [그림Ⅳ-6]은 둘레에 대한 개념이 잘못 형성되어 오류를 보였다. 직사각형의 둘레를 구할 때는 {(가로)+(세로)}×2를 해야 하나 (가로)+(세로)로 구하는 경우를 자주 볼 수 있었는데, 이 경우는 그림은 정확하게 그리지만 잘못된 개념 이해로 인해 오답을 낳고 있다.

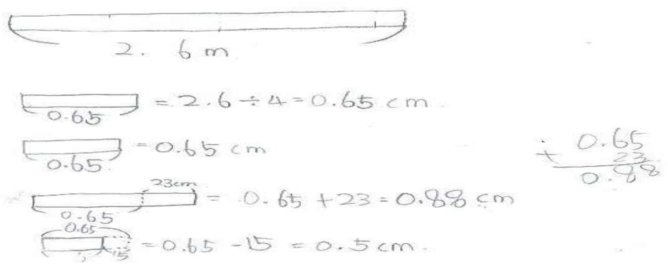
문 제 (1차시 2번)	가로의 길이가 18m, 세로의 길이가 12m인 직사각형 모양의 화단에 가로의 $\frac{7}{9}$ 만큼, 세로의 $\frac{5}{6}$ 만큼을 사용하여 장미를 심으려고 합니다. 장미를 심는 부분의 둘레의 길이는 몇 m 입니까?



[그림Ⅳ-6] 그림그리기 개념 원리의 오류 사례

풀이과정의 오류는 앞서 식 세우기 전략 사용에서와 마찬가지로 그림은 맞게 그리지만 그것을 식으로 표현하여 푸는 과정에서 오류를 범하는 것에 해당한다. 자료사용의 오류는 문제의 내용을 이해하고, 구조를 파악해서 해결하는 것이 아니라 문제에 주어진 실마리나 키워드를 문제 내용의 식을 변환하거나 연산을 선택하는 오류이다. 많은 사례는 아니지만, 다음 [그림Ⅳ-7]과 같이 2.6m의 철사를 4도막으로 나눈다는 문제에 주어진 키워드로 2.6 ÷ 4= 0.65 이며 한 도막은 이것보다 23cm 길다는 자료를 식으로 변환하여 0.65 + 0.23= 0.88 m, 한 도막은 15cm 짧다는 자료를 식으로 변환하여 0.65 - 0.15= 0.5 로 구하는 오류를 범하였다.

문 제 (P차시 1번)	2.6m의 철사가 있습니다. 이 철사를 네 도막으로 나누려고 합니다. 철사 두 도막의 길이는 같고, 한 도막은 이것들보다 23cm 길고, 한 도막은 15cm 짧습니다. 각각의 도막은 몇 cm 입니까?



[그림Ⅳ-7] 그림그리기 자료 사용의 오류 사례

4) 표 만들기

표 만들기는 문제에서 주어진 정보들을 표로 나타냄으로써 정보들 간의 관계를 한 눈에 볼 수 있어 문제를 쉽게 이해할 수 있도록 하는 전략이다. 표에서 직접 답을 구할 수도 있고 또 다른 해결 방법을 찾아낼 수도 있다.

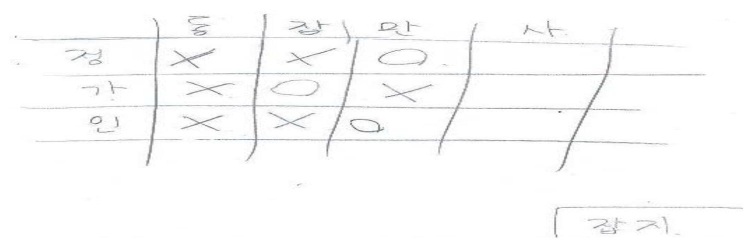
<표Ⅳ-7> 표 만들기 전략 사용 시 나타난 오류 유형 분석

차시	문항	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
P	3	0	0	0	0	1	0
2	1	5	0	0	0	1	0
4	4	2	0	0	0	0	1
6	4	1	0	0	0	0	0
7	4	1	0	0	0	0	0
8	3	1	0	0	0	0	0
계		10	0	0	0	2	1

표 만들기 전략 사용시 나타난 오류에는 대부분 문항에 대한 잘못된 이해에서부터 표를 작성하는 단계에서부터 오류를 범하는 경우였으며, 기록 단계에서도 일부 오류가 나타났다.

다음 문제는 주어진 정보를 표에 적고, 조건을 따져가며 ○표와 X 표로 표시하여 표를 만드는 과정 중에 표 안에서 답을 직접 구할 수 있는 문제이다. 하지만 네 사람이 각각 한권의 책을 가지고 있다는 것을 이해하지 못하여 오류를 보이고 있다. 표 만들기는 논리적이고 문제 상황을 조직화하는 능력이 필요하기에 문제에 주어진 조건을 따져가며 정보들을 표로 나타낼 수 있도록 지도해야 할 것이다.

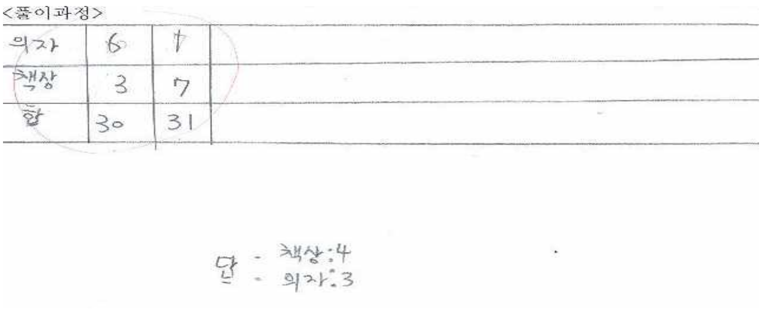
문 제 (2차시 1번)	네 사람이 각각 동화책, 잡지, 만화책, 사전 중에서 한 권씩을 가지고 있습니다. 정민이와 가현이가 가지고 있는 책은 동화책이 아니고, 인수는 만화책을 가지고 있습니다. 정민이가 가지고 있는 책은 잡지책이 아니라면, 철원이는 무슨 책을 가지고 있습니까?



[그림Ⅳ-8] 표 만들기 문항 이해의 오류 사례

다음 [그림Ⅳ-9]는 표 만들기 전략을 사용하여 의자 1개와 책상 7개라는 정답을 구하였으나 기록 단계에서 의자와 책상의 다리 수를 적었다. 문제를 표로 나타내어 풀어가는 과정에서 문제에서 묻고 있는 것이 무엇인지를 잊어버리는 경우도 있으므로 문제를 읽고 구하고자 하는 것이 무엇인지, 그리고 풀이를 통해 구하고 난 후 자신이 구한 것이 옳은지 검증하는 과정이 필요함을 알 수 있다.

문 제 (P차시 3번)	어떤 목수가 다리가 3개인 의자, 다리가 4개인 책상을 만들고 있습니다. 다리 31개로 의자와 책상을 만들었다면, 의자와 책상은 각각 몇 개 입니까?



[그림Ⅳ-9] 표 만들기 기록 단계의 오류 사례

5) 규칙 찾기

규칙 찾기는 문제에서 주어진 조건들에서 불변의 규칙성을 찾아내고 이 규칙성을 이용하여 계산을 확대 적용해 나감으로써 문제를 해결하는 전략이다. 규칙 찾기 전략에서 보이는 오류는 학생들이 문제를 잘못 이해하여 규칙을 찾지 못하거나 잘못 찾는 경우, 문제에 주어진 조건에서 규칙을 발견하였으나 계산 과정에서 오류를 보이는 경우가 있었다.

<표Ⅳ-8> 규칙 찾기 전략 사용 시 나타난 오류 유형 분석

차시	문항	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
P	5	3	0	0	8	0	0
3	2	9	0	0	3	0	0
3	4	3	0	0	4	0	0
5	3	0	0	0	1	0	0
6	3	0	0	0	1	0	0
8	4	1	0	0	4	0	0
계		16	0	0	21	0	0

다음 사례는 한 달 동안 수연이가 읽은 책의 쪽수를 구하는 문제이다. 따라서 1+2+3+ ⋯ + 30 =465(쪽)으로 30일 동안 읽은 쪽수를 모두 표시하고 있으나 그 합을 구하지 않고 단지 30일에 읽은 책의 쪽수를 구함으로써 오류가 나타난 것으로 문항에 대한 이해가 부족하다는 것을 알 수 있다. 이처럼 문항에서 규칙을 구하고자 할 때에는 주어진 정보를 묻고 아는 것과 구하고자 하는 것을 확실하게 할 수 있도록 발문하는 지도방안이 요구되는 대목이다.

문 제 (3차시 2번)	수연이는 한 달(30일)동안 꾸준히 책을 읽었습니다. 첫째 날에는 1쪽, 둘째 날에는 2쪽, 셋째 날에는 3쪽, …씩 읽었습니다. 수연이는 한 달(30일) 동안 몇 쪽을 읽을 수 있습니까?
	첫째날 - 1쪽 둘째날 - 2쪽) +1 셋째날 - 3쪽) +1 ⋮ 30일 - 30쪽 (30쪽)

[그림Ⅳ-10] 규칙 찾기 문항 이해의 오류 사례

규칙 찾기의 경우 특히 풀이 과정에서의 오류가 가장 많이 나타났는데, 다음 그림과 같이 일정한 규칙에 의해서 나열된 수들을 일일이 계산해야 할 때, 규칙을 찾아낼 수 만 있다면 문제를 간단히 해결할 수 있다. 한 달(30일) 동안 읽은 책의 쪽수를 구하기 위해 풀이 계획을 옳게 세웠으나 계산하는 과정에서 오류를 보이고 있음을 알 수 있다.

문 제 (3차시 2번)	수연이는 한 달(30일)동안 꾸준히 책을 읽었습니다. 첫째 날에는 1쪽, 둘째 날에는 2쪽, 셋째 날에는 3쪽, …씩 읽었습니다. 수연이는 한 달(30일) 동안 몇 쪽을 읽을 수 있습니까?
	1+2+3+4+5+6+7 ⋯ +28+29+30 이런식으로 덧셈을 풀어야 하는데 덧셈으로 풀면 시간이 많이 걸린다. 2개 : 15개. 1+2+3 ⋯ 28+29+30 1+2+3..28+29 30 30 15×30=450 답: 450쪽

[그림Ⅳ-11] 규칙 찾기 풀이 과정의 오류 사례

6) 단순화하기

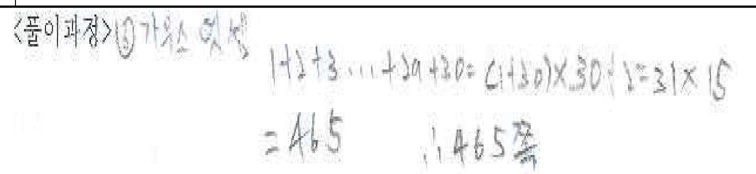
단순화하기 전략은 문제에 제시된 조건이 복잡한 경우 주로 표 만들기 또는 규칙 찾기와 함께 사용되는 전략이다. 주어진 문제를 해결하기 전에 좀 더 간단한 문제로 바꾸어 해결하고 해결과정 중에 나타난 규칙을 원래 문제에 적용하여 주어진 문제를 쉽게 해결하는 전략이다. 단순화하기 전략의 경우 다른 전략에 비해 교과서에 제시되는 경우가 적었으며, 학생들의 단순화하기 전략에 대한 이해도 낮았다. 위의 표에 나타난 단순화하기 전략을 사용한 학생 중 7명은 단순화하기 전략을 사용하지 않았으나 사용하였다고 생각한 경우이다. 학생들은 단순화하기 전략을 거의 사용하지 않았고, 숫자가 단순해지는 경우(적어지는 경우), 식이 단순할 경우가 단순화하기 전략을 사용하는 경우로 잘못 이해하는 경우가 있었다. 또한 간단한 문제로 바꾸어 해결한 후에 발견된 규칙을 적용하여 원래 문제를 해결해야하나 간단한 문제로 바꿔서 나온 해를 답으로 생각하는 풀이 과정의 오류도 보였다. 단순화하기 전략의 적절한 활용 방안에 대한 지도 방법이 모색되어야 할 것이다.

<표Ⅳ-9> 단순화하기 전략 사용 시 나타난 오류 유형 분석

차시	문항	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
4	1	1	0	0	0	0	0
4	3	2	0	0	0	0	0
4	5	0	0	0	0	0	1
5	4	1	0	0	2	0	0
6	2	2	0	0	1	0	0
7	3	1	0	0	0	0	0
계		7	0	0	3	0	1

단순화하기 전략 사용 시 먼저 문제에서 구하고자 하는 것과 주어진 조건이 무엇인지 문제를 이해하고, 간단한 경우로 문제를 바꾸어 생각한 후에 원래의 문제에 이용하여 해결하게 한다. 학생들은 식 세우기 전략을 사용하면서도 이것을 단순화하기로 표시한 경우들이 있었는데, 다음 [그림Ⅳ-12]가 이러한 경우에 해당한다.

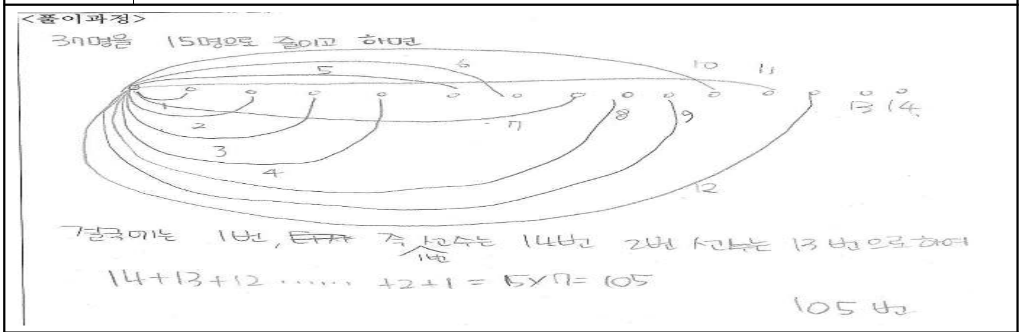
문 제 (3차시 2번)	수연이는 한 달(30일) 동안 꾸준히 책을 읽었습니다. 첫째 날에는 1쪽, 둘째 날에는 2쪽, 셋째 날에는 3쪽, … 씩 읽었습니다. 수연이는 한 달(30일) 동안에 몇 쪽을 읽을 수 있습니까?



[그림Ⅳ-12] 단순화하기 전략의 잘못된 이해 사례

단순화하기의 풀이 과정 오류는 간단한 문제로 바꾸어 해결한 후에 발견된 규칙을 적용하여 원래 문제를 해결해야하나 간단한 문제로 바꿔서 나온 해를 답으로 제시하는 경우였다.

문 제 (5차시 4번)	37명이 2명씩 짝을 지어 가위바위보를 하려고 합니다. 이들이 모두 서로 한번씩 가위바위보를 하면, 가위바위보는 모두 몇 번하게 됩니까?



[그림Ⅳ-13] 단순화하기 풀이 과정의 오류 사례

7) 거꾸로 풀기

거꾸로 풀기 전략은 문제의 구성을 가정과 결론으로 나누어 볼 경우 가정부분에서 찾고자 하는 요소가 있을 때에 결론에서 출발하여 가정에로의 역순으로 생각해 봄으로써 문제를 해결하는 전략이다. 학생들은 거꾸로 풀기 전략을 적용하여 해결해야하는 문제에 대한 인식은 높으나 풀이과정에서 계산 실수와 역연산을 할 때 오류를 보이는 경우가 있었고, 문제에 주어진 조건을 모두 사용하지 못하고 문제를 해결하는 경우, 문제에 주어진 조건을 잘못 이해하여 오류를 보이는 경우가 있었다.

<표Ⅳ-10> 거꾸로 풀기 전략 사용 시 나타난 오류유형분석

차시	문항	문항 이해	개념 원리	자료 사용	풀이 과정	기록 단계	풀이 생략
P	2	2	0	0	4	0	0
3	1	0	0	0	1	0	0
3	3	0	0	0	3	0	0
3	5	0	0	0	2	1	0
5	2	0	0	0	2	0	0
6	5	6	0	0	0	0	0
8	5	6	0	0	3	1	1
계		14	0	0	15	2	1

문항 이해의 오류의 예를 살펴보면, 처음 병지가 서 있던 계단 번호를 구하기 위해서 거꾸로 풀기 전략을 사용하려 했으나 여섯 계단을 올라갔다는 정보를 사용하지 않아 오답을 범하였다. 거꾸로 풀기 전략 사용 시 조건이 많아지는 경우 문제에 주어진 조건을 빠뜨리고 풀이를 하여 오답을 나타내는 경우가 있었으므로 문제를 읽으면서 주어진 조건이 무엇인지 정확히 파악하고 풀이를 하도록 지도해야 할 것이다.

<table>
<tr><td>문 제
(8차시
5번)</td><td>병지는 계단놀이를 하였습니다. 처음 서 있던 계단에서 여섯 계단을 올라간 후, 아홉 계단을 내려오고, 다시 다섯 계단을 올라간 후에 세 계단을 내려왔습니다. 지금 서 있는 계단 번호가 4라면, 처음에 병지가 서 있던 계단 번호는 몇 입니까?</td></tr>
<tr><td colspan="2">□ − 9 + 5 − 3 = 4

4 + 3 = 7
7 − 5 = 2
2 + 9 = 11</td></tr>
</table>

[그림Ⅳ-14] 거꾸로 풀기 문항 이해의 오류 사례

풀이 과정에서의 오류는 [그림Ⅳ-15]에서처럼, 처음에 병지가 서있던 계단 번호를 구하기 위해서는 연산 과정을 역으로 생각해야 하나 이항하는 과정에서 덧셈을 뺄셈으로, 뺄셈을 덧셈으로 역연산하지 못해 답을 잘못 구하였다. 원래 문제에서 덧셈으로 계산하였으면 거꾸로 풀 때에는 뺄셈으로 계산해야 하며, 뺄셈은 덧셈으로, 곱셈은 나눗셈으로, 나눗셈은 곱셈으로 계산해야 한다는 것을 알게 해야 한다.

<table>
<tr><td>문 제
(8차시
5번)</td><td>병지는 계단놀이를 하였습니다. 처음 서 있던 계단에서 여섯 계단을 올라간 후, 아홉 계단을 내려오고, 다시 다섯 계단을 올라간 후에 세 계단을 내려왔습니다. 지금 서 있는 계단 번호가 4라면, 처음에 병지가 서 있던 계단 번호는 몇 입니까?</td></tr>
<tr><td colspan="2"><풀이과정>
4 □ + 6 − 9 + 5 − 3
~~3 + 5 = 9 + 6 = □~~ 거꾸러
8 3 + 5 − 9 + 6 = 7
답 7
먼저 6 계단을 올라 가고 아홉 칸을 내려오고 다시 다섯 계단을 올라간 후 세 칸의 계단을 내려 왔다.</td></tr>
</table>

[그림Ⅳ-15] 거꾸로 풀기 풀이 과정의 오류 사례

Ⅴ. 결론 및 제언

수학학습의 궁극적 목표는 개념적 지식이나 절차적 지식의 습득이 아니라, 이러한 수학적 지식을 적용하여 자신의 삶에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력을 기르는 데에 있다. 그러나 현장에서의 수학교육은 단편적인 수식과 기호를 사용하여 문제를 해결하는 수준에 머물러 있으며 문제 풀이의 결과에 비중을 두어 학생들이 문제풀이 과정에서 범하는 오류에 대한 분석과 교정에 대한 실천적 의지는 부족하다.

이러한 문제인식 하에 본 연구는 문장제 해결과정에서 나타나는 오류들을 분석하고 오류 형태 및 오류의 특징을 파악함으로써 학습의 실패원인에 대한 정보를 제공하고 수학적인 사고와 문제해결력을 향상 시킬 수 있는 교수 방법을 개선하는데 도움을 주고자 하였다. 연구는 초등학교 5학년 학생들의 5학년 교육과정 수준의 문장제 45문항을 가지고 해결하는 과정에서 학생들이 선호하는 문제해결전략과 문제해결전략별 오류유형을 분석하였다. 각 문항에 포함된 오류들은 선행 연구를 참고로 하여 오류의 범주를 문항 이해의 오류, 개념 원리의 오류, 자료 사용의 오류, 풀이 과정의 오류, 기록 단계의 오류, 풀이 과정의 생략으로 총 6가지 유형으로 분류하였다. 그런 다음 문제해결전략별 오류유형 분석하였다. 이와 같은 분석결과로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

먼저 문장제 해결과정에서 학생들이 선호하는 전략은 식 세우기와 예상과 확인, 규칙 찾기 순으로 나타났으며, 단순화하기 전략은 거의 사용하지 않았다. 문항 및 교과서, 교사용 지도서를 바탕으로 분석한 문제해결전략과 일치하지 않은 전략을 선택하는 경우 식 세우기와 그림그리기 전략을 선호하였다. 학생들이 수학문제를 해결할 때 식을 세우는 것을 문제해결을 위한 가장 일반적인 방법이라고 생각하여 어떤 문제에서든 기계적으로 생각하고 식을 세워 풀려는 경향이 있어 식 세우기를 선호하는 것으로 보인다. 그림그리기 전략은 문제를 전체적으로 이해하는데 탁월한 효과가 있으며 학습자들의 흥미를 유도하기에 적합한 방법이며 가장 쉽게 접근 할 수 있는 전략이기에 선호하는 것으로 보인다.

다음으로 문장제 해결과정에서 나타나는 문제해결전략별 오류유형을 6가지(문항 이해의 오류, 개념 원리의 오류, 자료 사용의 오류, 풀이 과정의 오류, 기록 단계의 오류, 풀이 과정의 생략)로 분석하였으며, 대체적으로 ‘문항 이해의 오류’, ‘개념 원리의 오류’, ‘풀이 과정의 오류’ 순으로 나타났다. 다만 특징적인 부분은 예상과 확인에서 오답율이 상대적으로 낮았다는 점과 단순화하기 전략을 거의 사용하지 않고 있다는 점, 규칙 찾기와 거꾸로 풀기의 경우 풀이 과정의 오류가 가장 많이 나타났다는 점 등이다.

본 연구에서 얻은 연구 결과와 연구 과정에서 나타난 제한점을 보완하고 후속연구를 위하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다. 첫째, 문장제 평가 문항에 나타난 학생들의 문제 해결 과정만을 오류 분석 대상으로 삼았으나, 체계적인 면담을 병행하여 좀 더 정확한 오류분석을 할 필요가 있다. 둘째, 문제해결전략별 오류 유형 분석을 통해, 식 세우기, 그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 단순화하기 전략의 경우 문항이해의 오류가 가장 많음을 알 수 있

었다. 하지만 이는 전략에 따른 오류이기 보다는 문제의 이해 단계에서 잘못된 오류이기에 문항 이해의 오류를 범한 문항에 대한 학생들의 이해정도를 분석하여 그에 따른 지도 방안을 강구해야 할 필요가 있을 것이다.

참고 문헌

교육과학기술부 (2010A). 수학 5-1, 5-2 교사용 지도서, 두산동아(주).

교육과학기술부 (2010B). 수학 5-1, 5-2 익힘책, 두산동아(주).

교육과학기술부 (2010C). 수학 5-1, 5-2, 두산동아(주).

교육인적자원부 (1998). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과.

교육인적자원부 (2007). 초・중등학교 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호.

김윤선 (2009). 초등학교 4, 5, 6학년 학생들의 수학 교과서와 수학 익힘책에 제시된 문장제 이해도 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

김차숙 (2003). 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류분석과 교정에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

백한식 (1990). 문제해결력을 기르는 수학학습지도에 관한 연구. 경상대학교 석사학위논문.

석경희 (2004). 초등수학 문장제 해결 과정에 나타나는 오류 분석. 서울교육대학교 석사학위논문.

손원동 (1994). 초등학교 6학년 아동의 수학적 문장제 해결: 전략선택과 장애의 유형 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

신승용 (1997). 초등학교 6학년 아동의 문장제 해결력 수준과 사용전략의 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

오세경 (1996). 수학학습지도에 있어서의 오류 유형의 분류 및 그 지도 방안에 대한 연구: 중학교 1학년을 중심으로. 충북대학교 석사학위논문.

이경아 (1997). 유리수 계산에서 나타나는 오류의 현상적 분석: 초등학교 6학년을 중심으로. 이화여자대학교 석사학위논문.

이종희 (2002). 수학적 개념의 역사적 발달과 인식론적 장애. 교과교육학연구, 6권 2호.

장영은 (2003). 도형과 관련된 문제해결과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인 분석 연구. 전주교육대학교 석사학위논문.

정현도 (2009). 서술형 평가를 통한 수학학습에서의 오류 유형 분석 : 초등학교 4학년 중심으로. 부산교육대학교 석사학위논문.

황치홍 (2001). 수학교육에서 문제해결의 교육과 연구경향의 분석. 서울교육대학교 석사학위논문.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Kluwer Academic Publishers.

Brown, G. W. (1983). Error, Types Ⅰ and Ⅱ. American journal of diseases of children, 137(6), 586-591.

Clayton, G. A., Wilson, B., Scott, K. B., & Dorough, L.(1990). Successful mathematics teaching for middle school. Washington, DC: Office of Educational Research and Improvement.

Movshovitz-Hadar & Orit Zaslavsky (1987). An empirical classification model for error in high school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 18(1), 163-172.

Resnick, L. B. & Klopfer, L. E. (1989). Toward the thinking curriculum. Washington D. C. : The Association.

An Analysis on Elementary Students' Error Types of Word Problem Solving Strategy

Kim, Young A[4] · Kim, Sung Joon[5]

Abstract

The purpose of this study is to provide informations about cause of failures when students solve word problems by analyzing what errors students made in solving word problems and types of error and features of error according to problem solving strategy. The results of this study can be summarized as follows:

First, 5th grade students preferred the expressions, estimate and verify, finding rules in order when solving word problems. But the majority of students couldn't use simplifying.

Second, the types of error encountered according to the problem solving strategy on problem based learning are as follows;

In the case of 'expression', the most common error when using expression was the error of question understanding. The second most common was the error of concept principle, followed by the error of solving procedure. In 'estimate and verify' strategy, there was a low proportion of errors and students understood estimate and verify well. When students use 'drawing diagram', they made errors because they misunderstood the problems, made mistakes in calculations and in transforming key-words of data into expressions. In 'making table' strategy, there were a lot of errors in question understanding because students misunderstood the relationship between information.

Finally, we suggest that problem solving ability can be developed through an analysis of error types according to the problem strategy and a correct teaching about these error types.

Key Words : Word Problem, Problem Solving Strategy, (Types of) Errors, Problem Based Learning, Problem Solving Ability

4) PSCR Elementary School (duddk56@hanmail.net)
5) Busan National University of Education(joonysk@bnue.ac.kr)

<부록1> 문장제 해결 평가 검사지

문장제 해결 평가 5	학교	( )초등학교
	학반	5학년 반 번
	이름	

다음 표는 수학 문제해결의 다양한 전략들입니다.
다음 문제를 해결하기 위해 사용한 문제해결전략은 다음 중 어떤 것인지 ○표 해주세요.

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
식 세우기	예상과 확인	그림 그리기	표 만들기	규칙 찾기	단순화 하기	거꾸로 풀기

문제 1	정일이가 독서를 하기 위해 동화책을 펼쳤습니다. 책을 펼친 두 면의 쪽수의 곱이 1806이라면 정일이가 펼친 두 면의 쪽수는 각각 몇 쪽입니까?
<풀이과정>	