

# 전단빌딩의 강성행렬 및 부재의 강성추정을 위한 부분공간 시스템 확인기법에서의 행렬행렬의 크기 결정

박 승 근<sup>1</sup> · 박 현 우<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>동아대학교 건설기술연구소, <sup>2</sup>동아대학교 토목공학과

## Determining the Size of a Hankel Matrix in Subspace System Identification for Estimating the Stiffness Matrix and Flexural Rigidities of a Shear Building

Seung-Keun Park<sup>1</sup> and Hyun Woo Park<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Research Institute of Construction Technology and Planning, Dong-A Univ., Pusan, 604-714, Korea

<sup>2</sup>Department of Civil Engineering, Dong-A Univ., Pusan, 604-714, Korea

### Abstract

This paper presents a subspace system identification for estimating the stiffness matrix and flexural rigidities of a shear building. System matrices are estimated by LQ decomposition and singular value decomposition from an input-output Hankel matrix. The estimated system matrices are converted into a real coordinate through similarity transformation, and the stiffness matrix is estimated from the system matrices. The accuracy and the stability of an estimated stiffness matrix depend on the size of the associated Hankel matrix. The estimation error curve of the stiffness matrix is obtained with respect to the size of a Hankel matrix using a prior finite element model of a shear building. The sizes of the Hankel matrix, which are consistent with a target accuracy level, are chosen through this curve. Among these candidate sizes of the Hankel matrix, more proper one can be determined considering the computational cost of subspace identification. The stiffness matrix and flexural rigidities are estimated using the Hankel matrix with the candidate sizes. The validity of the proposed method is demonstrated through the numerical example of a five-story shear building model with and without damage.

**Keywords** : subspace system identification, hankel matrix, stiffness matrix, estimation error, prior finite element model, determination of the size of a hankel matrix, target accuracy level

### 1. 서 론

사회 기반 구조물은 건설 및 수리비용 등으로 인한 경제적 측면과 인명 피해와 같은 사회적인 측면을 고려해 볼 때 목표 사용기간 동안 안정성과 사용성을 유지하는 것이 매우 중요하다. 사회 기반 구조물의 성능은 설계 시 고려하지 못했던 공학적 현상이나 과도한 하중, 구조 부재를 이루고 있는 재료의 결함 등에 의해 시간에 따라 감소하게 된다. 사회 기반 시설의 경제적이고 안전한 유지 보수를 위해 이론적으로

잘 정립된 시스템 확인기법을 통하여 구조물의 성능을 평가해야 한다.

시스템 확인기법(System identification scheme; 이하 SI로 표기)은 측정된 하중 및 응답을 이용하여 구조물의 거동을 가장 정확하게 표현할 수 있는 수학적 모델을 찾는 것이다. 구조물의 동적응답을 이용하는 SI는 시간영역 SI(Hjelmstad *et al.*, 1995; Banan *et al.*, 1995; Kang *et al.*, 2005; Park *et al.*, 2008)와 주파수영역 SI(Hjelmstad *et al.*, 1996; Shi *et al.*, 2000; Vestroni *et al.*, 2000)로 구분된

\* Corresponding author:

Tel: +82-10-4411-4396; E-mail: hwpark@dau.ac.kr  
Received November 27 2012; Revised January 22 2013;  
Accepted January 22 2013

©2013 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

다. 주파수영역 SI는 상시 진동 데이터를 이용하여 고유 진동수와 모드 형상을 구할 수 있기 때문에 하중의 시간 이력과 응답의 초기값이 필요하지 않다는 장점이 있다. 그러나 측정 가능한 모드 형상과 고유 진동수는 저차 모드에 국한되어 있고, 일반적으로 저차 모드는 국부적인 손상에 민감하지 않기 때문에 모드 접근법에 의해서는 손상을 탐지하기가 어렵다(Raghavendrachar *et al.*, 1992). 시간영역 SI는 최소자승오차(Least square error)를 이용하는 방법인 equation error estimator(EEE) 방법(Hjelmstad *et al.*, 1995; Banan *et al.*, 1995)과 output error estimator(OEE)방법(Kang *et al.*, 2005; Park *et al.*, 2008)이 있고, 상태-공간 모델(State-space model)을 이용하는 방법인 확장된 칼만 필터(Extended Kalman filter)방법(Yun *et al.*, 1980; Hoshiya *et al.*, 1984; Min *et al.*, 2004)과 부분공간 시스템 확인기법(Subspace system identification; 이하 subspace SI로 표기; Viberg, 1995; Overschee *et al.*, 1996) 등이 있다. EEE는 초기값을 필요로 하지 않고 전체 자유도의 응답을 모두 아는 경우에는 선형 문제를 통해 시스템 변수를 추정할 수 있다는 장점이 있지만, 추정된 시스템 변수가 오차에 의해 편향성이 발생한다는 단점이 있다(Banan *et al.*, 1993). OEE는 추정된 시스템 변수는 오차에 의해 편향성이 나타나지 않고 전체 자유도가 아닌 일부 자유도의 응답만 아는 경우에도 적용이 가능하지만, 초기값을 필요로 하고 비선형을 문제를 풀기 위해 응답에 대한 시스템 변수의 민감도를 필요로 하기 때문에 계산과정이 복잡하다는 단점이 있다(Kang *et al.*, 2005; Park *et al.*, 2008). Subspace SI는 전체 자유도의 측정치를 모두 필요로 하지만 초기값을 필요로 하지 않고 선형 문제를 통해 시스템 행렬을 추정할 수 있고, 추정된 시스템 변수가 오차에 의해 편향성이 나타나지 않는다(Verhaegen *et al.*, 1992). 또한 시스템 변수를 추정하는 것이 아니라 시스템 행렬을 추정하기 때문에 OEE에 비해 대상 구조물이 가지고 있는 실제 동특성에 대해 유연하게 적용한다는 특징이 있다.

Subspace SI는 제어 분야에서 주로 연구된 방법으로 하중, 측정된 응답으로부터 시스템 행렬을 추정하는 방법이다. Subspace SI를 통해 추정된 시스템 행렬은 닮음 변환(Similarity transformation)을 통해 임의의 좌표계에 대한 시스템 행렬로 표현될 수 있다. 닮음 변환을 수행하더라도 시스템 행렬로부터 유도되는 전달함수나 전달행렬은 변하지 않는다. 제어 분야에서는 닮음 변환을 구하는 것이 중요하지 않기 때문에, 추정된 시스템 행렬을 이용하여 실제 구조물의 강성행렬을 추정하는 연구는 드물게 진행되었다.

실제 구조물의 물성치를 추정하기 위해서는 닮음 변환 과정을 통해 물리적인 의미가 있는 실제 좌표계로 구조물의 시

스템 행렬을 변환해야 한다. 닮음 변환을 구하는 방법으로는 추정된 시스템 행렬을 모달 좌표계로 변환한 후 실제 좌표계로 변환하는 방법(Alvin *et al.*, 1992)과 직접 실제 좌표계로 변환하는 방법이 있다(Phan *et al.*, 2004; Koh *et al.*, 2008). 이렇게 실제 좌표계로 변환된 시스템 행렬로부터 계산된 물성치는 subspace SI에서 사용된 동적 계측치에 포함된 계측 오차 또는 모델링 오차에 의해 영향을 받게 된다. 특히 동적 계측치 정보의 양을 나타내는 행켈행렬의 크기가 추정된 시스템 행렬의 정확도와 수치적인 안정성과 밀접한 관계를 가진다(Verhaegen *et al.*, 1992). 기존 연구에서 행켈행렬의 크기에 대해서는 시스템 행렬의 차수를 확보할 수 있을 정도의 충분한 크기를 가져야 한다는 정도로 언급되어 있고, 크기를 결정할 수 있는 구체적인 방법은 제시되지 않았다(Overschee, 1996). 상대적으로 적은 수의 자유도를 갖는 구조물의 경우에는 행켈행렬의 크기가 연산비용에 크게 영향을 미치지 않는다. 그러나 자유도가 큰 구조물의 경우에는 행켈행렬의 크기가 매우 커질 수 있고, 행켈행렬의 크기에 따라 계산비용은 급격하게 증가하기 때문에 적절한 행켈행렬의 크기를 결정하는 것은 매우 중요하다.

이 연구에서는 전단 빌딩에 대한 유한요소 수치모사 실험을 통해 측정 오차와 행켈행렬의 크기에 따른 강성행렬 추정의 불안정성과 정확성에 대해 규명한다. 행켈행렬의 크기에 따른 강성행렬의 추정오차 곡선을 이용하여 행켈행렬의 크기를 결정하는 방법을 제안한다. 결정된 크기의 행켈행렬을 이용하여 강성행렬을 추정하고, 추정된 강성행렬로부터 구조물의 부재 별 강성을 계산한다. 기저 유한요소 모델과 실제 모델의 모델링 오차가 발생하는 경우를 고려하기 위하여 기저 모델로부터 결정된 크기의 행켈행렬을 손상이 발생한 구조물의 물성치 추정에 적용하여 제안한 방법을 검증한다.

## 2. 구조물의 시스템 확인을 위한 subspace SI

### 2.1 Subspace SI

Subspace SI를 통해서 구조물의 시스템 행렬을 추정하는 과정은 Fig. 1을 통해 설명할 수 있다. Subspace SI는 식 (1)과 같이 이산화 된 상태-공간 모델을 지배방정식으로 사용한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ ,  $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^p$ 는 각각 상태 벡터, 입력 벡

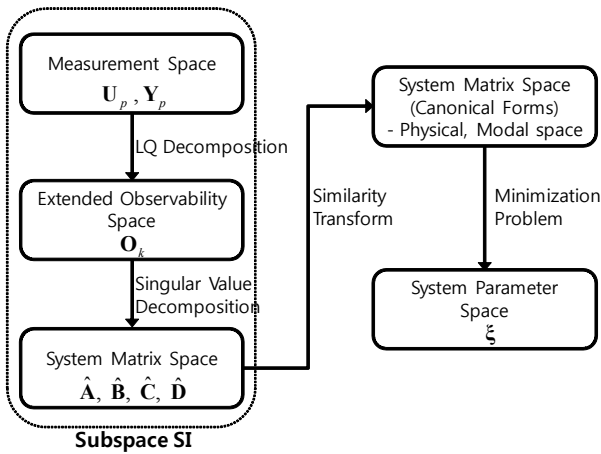


Fig. 1 Subspace SI for structural system identification

터, 출력 벡터를 나타낸다.  $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathcal{R}^{p \times m}$ 는 시스템 행렬을 나타낸다.  $n, m, p, t$ 는 각각 시스템의 자유도의 개수, 하중의 자유도의 개수, 측정된 응답의 자유도의 개수, 시간단계를 나타낸다. 전체 자유도의 하중이력과 응답을 아는 경우에는  $n = m = p$ 가 성립한다. Subspace SI는 입력 벡터와 출력 벡터를 이용하여 시스템 행렬을 추정하는 방법이다. Subspace SI는 입력 벡터와 출력 벡터의 구성 방법과 데이터 행렬의 분해(decomposition)방법에 따라 multivariable output error state space(MOESP), numerical algorithm for subspace state-space system identification(N4SID) 등으로 구분 된다. 이 논문에서는 여러 가지 subspace SI 중에서 MOESP를 이용한다(Katayama, 2005). Subspace SI는 Fig. 1의 좌측 상자와 같이 두 가지 단계를 통해 시스템 행렬을 추정한다.

첫 번째 단계는 입력 벡터와 출력 벡터를 이용하여 확장된 가관측 행렬(extended observability matrix)을 추정하는 단계이다(Overschee, 1996). 이 단계는 Fig. 1의 첫 번째 단계인  $U_p, Y_p$ 로부터  $\Gamma_k$ 를 구하는 단계를 나타낸다. 입력 벡터와 출력 벡터를 이용하여 아래와 같이 블록 행렬행렬(block Hankel Matrix; 이하 행렬행렬로 표기)을 구성한다.

$$\begin{aligned}
 U_p = U_{0:k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{k-1} & \mathbf{u}_k & \cdots & \mathbf{u}_{k+N-2} \end{bmatrix}, \\
 Y_p = Y_{0:k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \cdots & \mathbf{y}_{N-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1} & \mathbf{y}_k & \cdots & \mathbf{y}_{k+N-2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{kp \times N} \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서, 아래첨자  $p$ 와  $0|k-1$ 은 행렬행렬의 첫 번째 열을 구

성하는 하중 혹은 응답벡터의 시간단계가 0부터  $k-1$ 까지 임을 나타낸다.  $k$ 와  $N$ 은 각각 행렬행렬의 행과 열의 크기를 결정하는 값을 나타낸다.  $N$ 의 값은 시간창( $T_w$ )에 포함된 데이터의 개수에 의해 결정된다. 시간창의 크기를  $T_w$ , 시간단계를  $\Delta t$ 라고 하면  $N$ 은  $T_w / \Delta t$ 가 된다.

행렬행렬의 관계는 식 (1)를 이용하여 다음과 같이 유도된다. 식 (1)에  $t=0,1,\dots,k$ 를 대입하여, 입력 벡터와 출력 벡터로 구성된 식을 유도한다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_{t+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{t+k-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (3)에  $t=0,1,\dots,N$ 을 대입하면 아래와 같이 입력 행렬행렬과 출력 행렬행렬로 구성된 식을 얻을 수 있다.

$$Y_p = \Gamma_k X_0 + H_k U_p \quad (4)$$

여기서,  $\Gamma_k, H_k, X_p$ 는 각각 다음과 같다.

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{kp \times n}, \quad (5a)$$

$$H_k = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{k-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{kp \times km} \quad (5a)$$

$$X_p = X_0 = (\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k-1}) \in \mathcal{R}^{n \times k} \quad (5b)$$

식 (4)로부터 확장된 가관측 행렬을 추정하기 위하여 아래와 같은 최소화 문제를 정의한다.

$$\text{Min}_{L_p, L_u} \Pi_E = \left\| Y_p - [L_p \quad L_u] \begin{bmatrix} U_p^\perp \\ U_p \end{bmatrix} \right\|_F^2 \quad (6)$$

여기서,  $U_p^\perp$ 는  $U_p$ 의 공간의 여집합을 나타낸다. 식 (6)의 해는 식 (7)과 같다.

$$\bar{Y}_k = [L_p \quad L_u] \begin{bmatrix} U_p^\perp \\ U_p \end{bmatrix} \quad (7)$$

확장된 가관측 행렬은 Fig. 2와 같이 식 (7)의  $U_p^\perp$  공간으로의 사영을 통해 추정한다. 식 (7)의  $U_p^\perp$  공간으로의 사

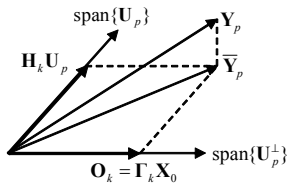


Fig. 2 Orthogonal projection of output Hankel matrix (Katayama, 2005)

영은 식 (8)과 같이 표현되고, 식 (8)은 식 (9)의 데이터 행렬의 LQ 분해를 통해 계산한다.

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{L}_p \mathbf{U}_p^\perp \quad (8)$$

$$\mathbf{W}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2k(p+m) \times N} \quad (9)$$

식 (9)의 LQ 분해는 다음과 같다.

$$\mathbf{W}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,  $\mathbf{L}_{11} \in \mathfrak{R}^{km \times km}$ ,  $\mathbf{L}_{22} \in \mathfrak{R}^{kp \times kp}$  인 하삼각 행렬(lower triangular matrix)이고  $\mathbf{Q}_1 \in \mathfrak{R}^{N \times km}$ ,  $\mathbf{Q}_2 \in \mathfrak{R}^{N \times kp}$  이고 수직이다.

식 (4)와 식 (10)으로부터, 식 (8)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{L}_p \mathbf{U}_p^\perp = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{X}_0 = \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T \quad (11)$$

이와 같이  $\mathbf{O}_k$  를 추정할 수 있다.

두 번째 단계는 Fig. 1의 좌측 상자의 두 번째 단계로서  $\mathbf{O}_k$  로부터 시스템 행렬( $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$ )을 추정하는 단계이다. 시스템 행렬은 식 (11)의 특이치 분해(singular value decomposition)를 통해 추정한다.

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{X}_0 \quad (12)$$

여기서,  $\mathbf{U}_1 \in \mathfrak{R}^{kp \times n}$ ,  $\mathbf{U}_2 \in \mathfrak{R}^{kp \times (kp-n)}$  이다. 식 (12)로부터,  $\mathbf{\Gamma}_k$  와  $\mathbf{X}_0$  는 다음과 같이 결정한다.

$$\mathbf{\Gamma}_k = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1^{1/2} \mathbf{T}, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{\Sigma}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T \quad (13)$$

여기서,  $\mathbf{T}$  는 닻음 변환 행렬,  $n$  은 시스템의 자유도로서  $\mathbf{O}_k$  의 0이 아닌 특이치의 개수로 결정된다. 식 (12)에서  $\mathbf{O}_k$  를 특이치 분해하지 않고,  $\mathbf{L}_{22}$  를 특이치 분해해도  $\mathbf{\Gamma}_k$  와  $\mathbf{X}_0$  를 추정할 수 있다.

$$\mathbf{L}_{22} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (14)$$

여기서,  $\mathbf{V}_1^T$  은  $\mathbf{L}_{22}$  의 우 특이치 벡터이고, 식 (12)와 식 (14)의 관계를 이용하면  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{V}_1^T$  가 성립한다.  $\mathbf{O}_k \in \mathfrak{R}^{kp \times N}$  이고  $\mathbf{L}_{22} \in \mathfrak{R}^{kp \times kp}$  이므로  $\mathbf{O}_k$  의 특이치 분해를 하는 것보다  $\mathbf{L}_{22}$  의 특이치 분해를 하는 것이 계산비용 측면에서 유리하다.

식 (5)로부터, 시스템 행렬  $\mathbf{A}$  와  $\mathbf{C}$  는 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}_k^\dagger [1:(k-1)p, 1:n] \mathbf{\Gamma}_k [p+1:kp, 1:n], \quad \mathbf{C} = \mathbf{\Gamma}_k [1:p, 1:n] \quad (15)$$

시스템 행렬  $\mathbf{B}$  와  $\mathbf{D}$  는 다음의 과정을 통해 추정할 수 있다. 먼저 식 (4)와 식 (10)을 이용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{\Gamma}_k \mathbf{X}_0 + \mathbf{H}_k \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T \quad (16)$$

식 (16)의 양변에  $\mathbf{U}_2^T$  를 곱하면,  $\mathbf{U}_2^T \mathbf{\Gamma}_k = 0$ ,  $\mathbf{U}_2^T \mathbf{L}_{22} = 0$  이기 때문에 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{U}_2^T \mathbf{H}_k \mathbf{L}_{11} = \mathbf{U}_2^T \mathbf{L}_{21} \quad (17)$$

식 (17)을 전개하여, 다음 식과 같은 선형 방정식을 구성하고, 식을 풀어  $\mathbf{B}$  와  $\mathbf{D}$  를 결정한다.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_1 & \bar{\mathbf{L}}_2 \mathbf{\Gamma}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{L}}_2 & \bar{\mathbf{L}}_3 \mathbf{\Gamma}_{k-2} \\ \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{L}}_{k-1} & \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{\Gamma}_1 \\ \hat{\mathbf{L}}_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_1 \\ \hat{\mathbf{M}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{M}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{M}}_k \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서,  $\hat{\mathbf{L}}_k, \bar{\mathbf{L}}_i, \hat{\mathbf{M}}_k$  는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{U}_2^T = [\hat{\mathbf{L}}_1 \quad \hat{\mathbf{L}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{L}}_k], \quad \bar{\mathbf{L}}_i = [\hat{\mathbf{L}}_i \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{L}}_k], \\ \mathbf{U}_2^T \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^{-1} = [\hat{\mathbf{M}}_1 \quad \hat{\mathbf{M}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{M}}_k] \quad (19)$$

식 (15)와 식 (18)을 이용하여 추정된 시스템 행렬은 이산화된 상태-공간 모델의 시스템 행렬이므로 추정된 시스템 행렬을 연속 상태-공간 모델의 시스템 행렬로 변환해야 한다. 연속 시스템( $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$ )에서의 시스템 행렬은 이산화된 시스템에서의 시스템 행렬( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ )을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$\mathbf{A}_c = \frac{1}{\Delta t} \ln \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_c = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_c = \mathbf{C}, \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{D} \quad (20)$$

## 2.2 구조물의 시스템 확인을 위한 시스템 행렬의 닻음 변환

2.1절에서 소개된 방법에 의해 추정된 시스템 행렬은 식 (12)와 식 (13)과 같이 값을 변환 행렬에 따라 무수히 많은 시스템 행렬과 상태벡터의 쌍을 가질 수 있다. 값을 변환은 상태 벡터의 좌표 변환을 나타내며, 아래의 식과 같은 계산을 통해 이뤄진다. 값을 변환 과정을 거치더라도 전달행렬은 동일하게 유지되기 때문에 전달행렬만 필요한 경우에는 값을 변환 과정이 필요없지만 구조물의 시스템 확인에 적용하기 위해서는 시스템 행렬 자체를 추정해야 하기 때문에 반드시 실제 좌표계로의 값을 변환 과정이 필요하다(Alvin *et al.*, 1994; Koh *et al.*, 2008).

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{u}}_k \\ \tilde{\mathbf{y}}_k = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{u}}_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{cases} \quad (21)$$

여기서,  $\mathbf{A} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T}^{-1}$ 이다. 2.1절의 방법으로 추정된 시스템 행렬과 상태 벡터는 어떤 좌표축에 있는지 알 수 없기 때문에, 값을 변환을 통해 실제 좌표축으로 변환시켜야 한다. 이 단계는 Fig. 1에서 오른쪽 상단 부분을 나타낸다. 값을 변환은 다음과 같이 계산한다(Koh *et al.*, 2008).

2차 동적 운동방정식을 상태-공간 방정식 형태로 변환하면 아래와 같은 시스템 행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (22a)$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_c = [\mathbf{I} \ 0], \mathbf{D}_c = 0 \quad (22b)$$

값을 변환을 통해 상태 벡터를 실제 좌표계로의 변환을 하기 위해 식 (22b)과 같은 형태로 시스템 행렬을 변환해야 한다. 따라서 아래와 같은 조건을 제한 조건으로 사용한다.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_c = [\mathbf{I} \ 0], \mathbf{D}_c = 0 \quad (23)$$

여기서,  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$ ,  $\mathbf{B}_2$ 는 추정되어야 하는 부분이고, 나머지 부분은 만족시켜야 하는 제한 조건들이다.

값을 변환은 두 단계의 과정을 통해 이뤄진다. 첫 번째는 추정된 시스템 행렬을  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$ 이라고 하면 변환  $\mathbf{Q}$ 를 통해  $\tilde{\mathbf{C}}$ 를  $\mathbf{C}_c$ 로 변환하는 과정이다. 변환  $\mathbf{Q}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서,  $\bar{\mathbf{Q}}$ 는  $\mathbf{Q}$ 가 정칙행렬(nonsingular matrix)이 되도록

록 해주는 임의의 행렬이다. 추정된 시스템 행렬은 변환  $\mathbf{Q}$ 에 의해 다음과 같이 변환된다.

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^{-1} = [\mathbf{I} \ 0] = \mathbf{C}_c \quad (25)$$

두 번째는 변환  $\mathbf{R}$ 을 통해  $\mathbf{C}_c$ 는  $\mathbf{C}_c$ 로 유지하면서, 첫 번째 단계에서 변환된 시스템 행렬  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ 를 각각  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ 로 변환하는 과정이다. 변환  $\mathbf{R}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

두 단계의 변환  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ 에 의해 추정된 시스템 행렬은 식 (23)의 형태로 변환 된다.

### 2.3 강성행렬의 추정 방법

구조물의 시스템 확인을 통해 구조물의 손상탐지, 물성치 파악에 적용하려면 추정된 시스템 행렬로부터 강성행렬, 감쇠행렬, 질량행렬, 부재의 강성 등을 추정해야 한다. 추정된 시스템 행렬로부터 강성행렬과 감쇠행렬을 다음과 같이 계산할 수 있다.

구조물의 강성행렬, 감쇠행렬, 질량행렬은 실제 좌표계로 변환된 시스템 행렬을 이용하여 계산한다.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서,  $\mathbf{A}_c$ 와  $\mathbf{B}_c$ 는 추정된 시스템 행렬이다. 강성행렬, 감쇠행렬, 질량행렬은 다음과 같이 추정된 시스템 행렬의 성분을 이용하여 계산한다.

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = \mathbf{E}_3^{-1}, \mathbf{C}_{\text{est}} = -\mathbf{M}\mathbf{E}_2, \mathbf{K}_{\text{est}} = -\mathbf{M}\mathbf{E}_1 \quad (28)$$

질량행렬은 하중조건에 따라 추정 가능 여부가 결정된다. 모든 자유도에 무작위 가진을 하는 하중일 경우에는 질량행렬을 추정할 수 있지만(Katayama, 2005), 하중은 모든 자유도에 대해 알기가 어렵고 일반적으로 손상탐지 분야에서 질량행렬은 아는 값으로 가정을 때문에 이 논문에서는 질량행렬은 아는 값으로 가정한다.

### 3. 전단빌딩의 강성행렬 추정을 위한 행렬행렬의 크기 결정 기법

### 3.1 $k$ 와 $T_w$ 의 변화에 따른 강성행렬의 추정오차 변화

Subspace SI에서 측정된 응답에 모델링 오차 혹은 측정 오차가 포함되지 않은 경우에는 사용되는 측정치의 양과 무관하게 같은 시스템을 추정해야 하지만, 모델링 오차 혹은 측정 오차가 포함되는 경우에는 추정된 시스템은 사용되는 측정치의 양에 영향을 받는다.

Subspace SI에서 시스템 행렬은 행켈행렬의 크기에 영향을 받고, 행켈행렬의 크기는 식 (2)의 행켈행렬 구성에 포함되는  $k$ 와  $T_w$ 에 의해 결정된다. 여기서  $T_w$ 는  $N\Delta t$ 이기 때문에  $T_w$ 와  $N$ 은 같은 변수로 생각할 수 있다.  $k$ 는 식 (3)을 구성할 때 필요한 식 (1)의 개수를 나타내고,  $T_w$ 는 식 (4)를 구성할 때 필요한 식 (3)의 개수를 나타낸다.  $k$ 와  $T_w$ 의 증가에 의해 시스템 확인에 사용되는 식의 개수와 계측치의 양이 증가하기 때문에 시스템 추정의 정확도는 높아진다. 따라서,  $k$ 와  $T_w$ 은 가능한 큰 값을 사용하는 것이 가장 정확한 시스템을 추정할 수 있지만,  $k$ 와  $T_w$ 의 증가에 따라 계산량이 급격하게 증가하기 때문에, 토목 구조물과 같이 자유도가 큰 경우에는 안정적인 해석결과를 주는 범위 내에서는 가능한 작은  $k$ 와  $T_w$ 의 값을 갖는 것이 적절하다.

$k$ 는 시스템의 차원  $n$ 보다 커야 하고, 식 (9)의 데이터 행렬에서 행의 개수는 열의 개수보다 작거나 같아야 하기 때문에  $k$ 와  $T_w$ 의 조건은 다음과 같다(Katayama, 2005).

$$n < k \leq \frac{T_w}{2n\Delta t} \tag{29}$$

$k$ 와  $T_w$ 의 변화에 따른 시스템 행렬의 추정 결과는 Fig. 3과 같이 예측할 수 있다. Fig. 3의 세로축  $\bar{\epsilon}$ 은 각  $k$ 와  $T_w$  당 다른 측정오차에 대하여 몬테카를로 모사를 통해 계산된  $\epsilon_i$  값의 평균을 나타낸다.  $\epsilon_i$ 는 다음과 같이 정의되며 강성행렬의 추정오차를 나타낸다.

$$\epsilon_i = \frac{\|\mathbf{K}_{\text{est}} - \mathbf{K}_{\text{exact}}\|_F}{\|\mathbf{K}_{\text{exact}}\|_F} \tag{30}$$

여기서,  $\|\cdot\|_F$ 는 Frobenius norm을 나타낸다.  $\mathbf{K}_{\text{est}}$ 는 2.3절의 식 (28)로부터 추정된 강성행렬,  $\mathbf{K}_{\text{exact}}$ 는 구조 모델의 정확한 강성행렬을 나타낸다. 기저구조 모델은 유한요소법을 이용하여 구성된 해석 모델을 나타낸다. 세로축  $\bar{\epsilon}$ 의 정의는 아래와 같다.

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{n_{MC}} \sum_{i=1}^{n_{MC}} \epsilon_i \tag{31}$$

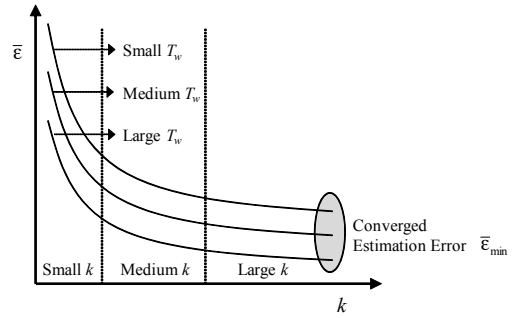


Fig. 3 Variation of the estimation error of the stiffness matrix with respect to  $k$  and time window size( $T_w$ )

여기서,  $T_0$ 와  $n_{MC}$ 는 각각 1차 모드의 고유주기와 몬테카를로 모사의 횟수를 나타낸다.

Fig. 3에서 세 개의 곡선은 각각 위에서부터 시간창의 크기( $T_w$ )가 작은 경우, 중간인 경우, 큰 경우이고 각각의 곡선은 주어진  $T_w$ 에서  $k$ 를 증가시키면서 계산된  $\bar{\epsilon}$ 을 나타낸다. 시간창의 크기가 증가할수록 시스템 확인에 포함되는 계측치의 양이 증가한다. 따라서 추정된 강성행렬의 정확도와 수치적인 안정성을 나타내는  $\bar{\epsilon}$ 은 전체적으로 감소한다.  $T_w$ 가 일정하고  $k$ 의 값이 증가하는 경우에도 시스템 확인에 포함되는 계측치의 양이 증가하기 때문에  $\bar{\epsilon}$ 은 전체적으로 감소한다.  $k$ 의 값이 상대적으로 작은 영역에서는  $k$ 의 값이 약간만 증가해도  $\bar{\epsilon}$ 가 급격하게 감소하지만  $k$ 의 값이 큰 영역에서는 시스템의 계측정보가 이미 충분히 포함되기 때문에  $k$ 의 값이 증가해도  $\bar{\epsilon}$ 의 감소폭은 크지 않다.  $k$ 가 가능한 최대값( $T_w/2n\Delta t$ )에 도달해도 계측오차가 포함되어 있는 경우  $\bar{\epsilon}$ 은 더 이상 감소하지 않고 일정한 수준으로 수렴하는 형태를 가진다. 수렴된 추정 오차의 값은  $\bar{\epsilon}_{\text{min}}$ 으로 표기한다.

### 3.2 행켈행렬의 크기 결정

행켈행렬의 크기는 Fig. 3의 강성행렬의 추정 오차( $\bar{\epsilon}$ ) 곡선과 주어진 목표 정확도 수준(Target accuracy level: 이하  $\chi$ 로 표기)이 만나는 점의  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 결정한다.  $\chi$ 는 측정 오차와 모델링 오차 등을 고려하여 설정한 용인 가능한  $\bar{\epsilon}$ 의 값을 나타낸다.  $\chi$ 를 크게 설정하면 상대적으로 큰 추정 오차가 발생하기 때문에 추정된 강성행렬이 실제 모델의 강성행렬과 큰 차이가 발생한다.  $\chi$ 를 작게 설정하면 추정된 강성행렬의 정확도는 높아지지만 Fig. 3의  $\bar{\epsilon}_{\text{min}}$ 보다 작게 설정할 경우 원하는 목표 정확도 수준을 만족시키는 강성행렬을 추정하지 못하는 경우도 발생할 수 있다. Fig. 4는  $\bar{\epsilon}$ 의 곡선에 설정된  $\chi$ 를 함께 그린 그림이다.  $\bar{\epsilon}$ 의 곡선과  $\chi$ 가 만나는 점에서의  $k$ 와  $T_w$ 의 값을 사용하여 해석을

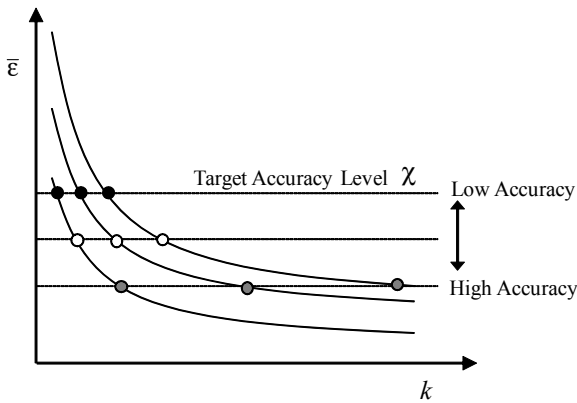


Fig. 4. Estimation error of stiffness matrix( $\bar{\epsilon}$ ) and target accuracy level ( $\chi$ )

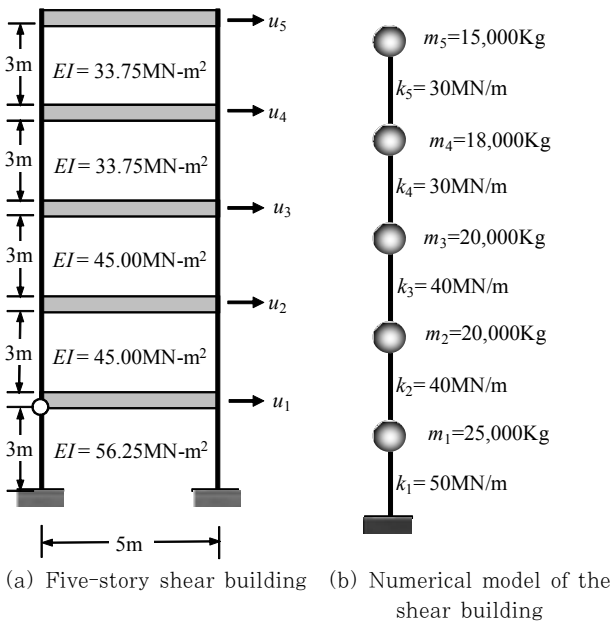


Fig. 5 Five-story shear building(Park *et al.*, 2008)

수행하면 설정된  $\chi$ 만큼의 추정오차를 갖는 강성행렬을 추정할 수 있다. Fig. 4와 같이  $\bar{\epsilon}$ 의 곡선과  $\chi$ 가 만나는 점은  $T_w$ 의 크기에 따라 여러 가지의 쌍이 존재할 수 있다. Fig. 4의 검은색 원에서 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍들을 이용하여 행켈 행렬의 크기를 결정하면 낮은 목표 정확도 수준의 강성행렬을 추정할 수 있고, 회색 원에서 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍들을 이용하여 행켈행렬의 크기를 결정하면 높은 정확도 수준의 강성행렬을 추정할 수 있다.

제안된 방법을 Fig. 5(a)와 같은 5자유도 전단빌딩에 적용하였다. 비 손상 상태의 질량, 휨 강성은 Fig. 5(a)와 같다. 각 모드 고유 주파수는 2.19, 5.76, 9.00, 11.12, 13.07Hz이다. 측정 응답 생성을 위한 모달 감쇠비는 1, 2, 3, 4, 5차 모드에 대해 각각 1, 2, 3, 4, 5%이다. 가진 방

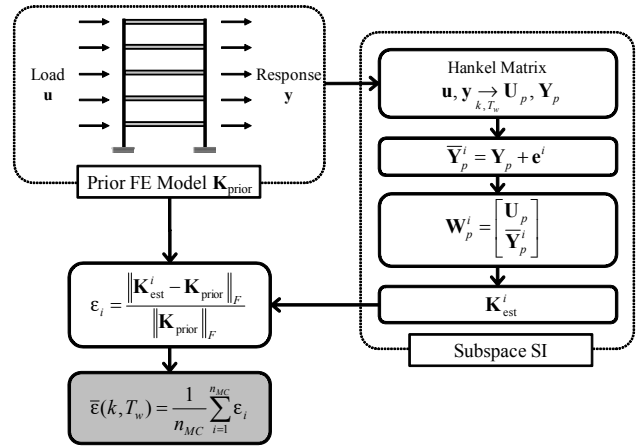


Fig. 6. Numerical procedures to calculate  $\bar{\epsilon}$  for given  $k$  and  $T_w$

법은 상시 하중상태를 고려하여 무작위 하중을 전 자유도에 가진하였다. 시간 간격은 0.0005초이고, 1차 모드의 주기 ( $T_0$ )는 0.487초이다. 강성행렬의 추정오차 곡선은 응답을 측정하는 시간 간격과 응답을 발생시키는 하중이력에 영향을 받을 수 있지만 이 논문의 범위를 넘어서므로 다루지 않는다.

실제 구조물에서 식 (30)의  $\mathbf{K}_{\text{exact}}$ 는 알 수 없기 때문에, 다음과 같이  $\mathbf{K}_{\text{exact}}$  대신  $\mathbf{K}_{\text{prior}}$ 를 이용하여  $\epsilon_i$ 를 계산한다.

$$\epsilon_i(k, T_w) = \frac{\|\mathbf{K}_{\text{est}}^i - \mathbf{K}_{\text{prior}}\|_F}{\|\mathbf{K}_{\text{prior}}\|_F} \quad (32)$$

여기서,  $\mathbf{K}_{\text{prior}}$ 는 Fig. 5(b)와 같이 기저 정보를 이용하여 구성된 유한요소 모델(Finite element model)의 강성행렬을 나타낸다. 기저 유한요소 모델을 이용하여 강성행렬의 추정오차 곡선을 그리는 과정은 Fig. 6과 같다. Fig. 6의 오른쪽 상자는 기저 유한요소 모델로부터 나온 하중벡터와 응답벡터를 이용하여 강성행렬을 추정하는 과정이다. 주어진  $k$ 와  $T_w$ 를 이용하여 식 (2)와 같이 행켈행렬을 구성하고, 응답행켈 행렬을 측정오차( $e^i$ )를 이용하여 교란시킨 후, subspace SI를 통해 강성행렬( $\mathbf{K}_{\text{est}}^i$ )을 추정한다.  $\mathbf{K}_{\text{prior}}$ 와  $\mathbf{K}_{\text{est}}^i$ 를 이용하여 식 (32)와 같이  $\epsilon_i$ 를 계산하고,  $i$ 를 1부터  $n_{MC}$ 까지 반복 계산하여 주어진  $k$ 와  $T_w$ 에 대한  $\epsilon_i$ 의 평균  $\bar{\epsilon}(k, T_w)$ 를 계산한다.

Fig. 7은  $k$ 와  $T_w$ 의 변화에 따른  $\bar{\epsilon}$ 의 변화를 나타낸다. 측정치에는 5%의 비례 오차가 포함되었다. 측정 응답으로는 각 층의 변위이력을 이용한다.  $T_w$ 는 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 2.0초의 6가지 경우,  $k$ 는 5부터  $k_{\text{max}}(T_w/2n\Delta t)$ 까지 5의 간격으로 해석을 수행하였다. 몬테카를로 모

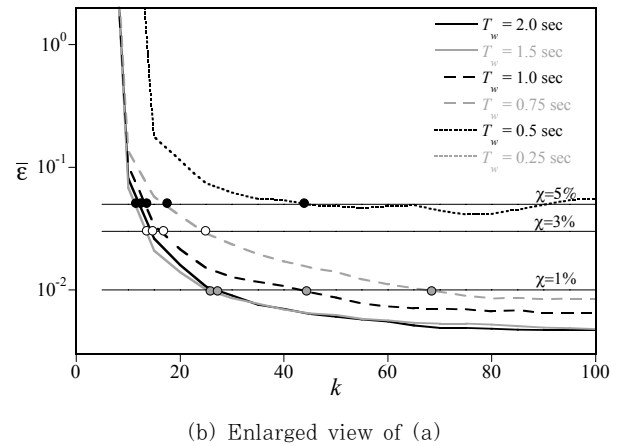
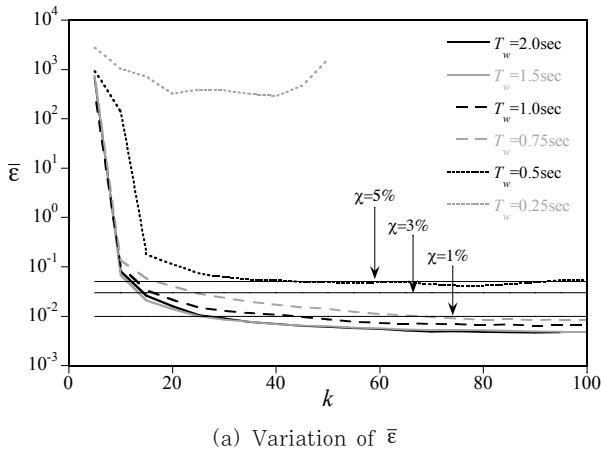


Fig. 7 Estimation error ( $\bar{\epsilon}$ ) of the stiffness matrix with respect to  $k$  and time window size( $T_w$ )

사의 횟수는 30회를 수행하여  $\bar{\epsilon}$ 를 계산하였다.

$T_w$ 가 0.25초이면,  $k$ 가 최대값까지 증가하더라도  $\bar{\epsilon}$ 가 약 1000에 가까운 값에서 감소하지 않는다.  $T_w$ 가 너무 작으면 불안정성이 발생되어 물리적으로 의미없는 강성행렬을 추정한다는 것을 나타낸다.  $T_w$ 가 0.5초이면,  $k$ 가 약 15보다 작은 구간에서는  $\bar{\epsilon}$ 가  $k$ 의 증가에 따라 급격하게 감소하다가  $k$ 가 15 이상인 구간에서는  $\bar{\epsilon}$ 가 완만하게 감소하는 경향이 나타난다.  $T_w$ 가 0.75초 이상인 경우,  $k$ 가 약 10보다 작은 구간에서는  $\bar{\epsilon}$ 가  $k$ 의 증가에 따라 급격하게 감소하다가  $k$ 가 10 이상인 구간에서는  $\bar{\epsilon}$ 가 완만하게 감소하는 경향이 나타난다.  $k$ 가 증가하면 식 (9)의 행렬행렬에 포함되는 데이터가 증가하여 추정된 강성행렬의 정확도는 높아진다.  $k$ 가 충분히 커져 시스템에 관련된 정보가 충분해진 이후에는  $k$ 가 증가하더라도 추정오차로 인해 추정된 강성행렬의 정확도는 크게 향상되지 않고 일정한 값에 수렴하는 형태를 띈다. 따라서,  $T_w$ 가 매우 작은 경우를 제외하고 강성행렬의 추정 오차 곡선은  $L$ 자형 곡선 형태를 이루게 된다. 이 곡선이 완만하게 감소하는 영역에서는  $k$ 와  $T_w$ 의 크기에 따라 강성행렬의 추정 오차가 크게 변하지 않기 때문에 어떤  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 선택하더라도 안정적인 시스템 행렬을 추정할 수 있다. 또한  $T_w$ 가 커질수록 추정된 강성행렬의 오차는 전체적으로 감소하는 경향이 나타난다.

강성행렬의 목표 정확도 수준( $\chi$ )은 1%, 3%, 5%로 설정하였다. Fig. 7(b)는  $\bar{\epsilon}$  곡선과 세 가지의  $\chi$ 가 만나는 점을 확대한 그림이다.  $T_w$ 가 0.25초이면, 불안정성이 발생되어  $\chi$ 와 만나지 않는다.  $T_w$ 가 0.5초이면,  $\chi$ 가 5%인 경우와는 만나지만 1, 3%인 경우와는 만나지 않는다.  $T_w$ 가 0.75, 1.0, 1.5, 2.0초이면,  $\chi$ 가 1, 3, 5%와 만나는 것을 알 수 있다.  $\chi$ 가 5%인 경우와 만나는 ( $k$ ,  $T_w$ )의 쌍은 (17, 0.75초), (13, 1.0초),

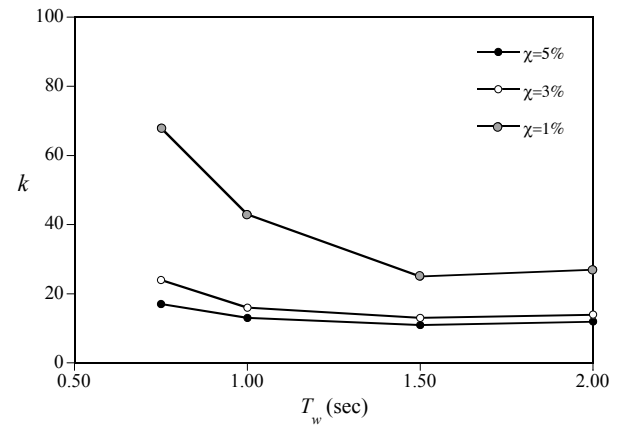


Fig. 8 ( $k$ ,  $T_w$ ) pairs yielding an identical target accuracy level ( $\chi$ )

(11, 1.5초), (12, 2.0초)이고,  $\chi$ 가 1%인 경우와 만나는 ( $k$ ,  $T_w$ )의 쌍은 (68, 0.75초), (43, 1.0초), (25, 1.5초), (27, 2.0초)이다. 보다 정확한 강성행렬을 추정하기 위해서는 전체적으로  $k$ 와  $T_w$ 가 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 8은 같은  $\chi$ 를 갖는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 나타낸 그림이다. Fig. 8을 보면 일정한  $\chi$ 를 갖는 경우,  $k$ 의 값이 증가할수록  $T_w$ 의 크기는 작아진다. 따라서 일정한 목표 정확도 수준을 얻기 위한  $k$ 와  $T_w$ 의 값은 반비례 형태를 갖는다. 위와 같이 가져 구조 모델을 이용하여 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 SI 해석을 수행하면 원하는 정확도 수준의 강성행렬을 추정할 수 있다.

### 3.3 해석시간을 고려한 행렬행렬의 크기 결정

Fig. 8과 같이 같은 목표 정확도 수준( $\chi$ )으로 강성행렬을 추정하는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍은  $T_w$ 의 변화에 따라 무수히 많은 쌍



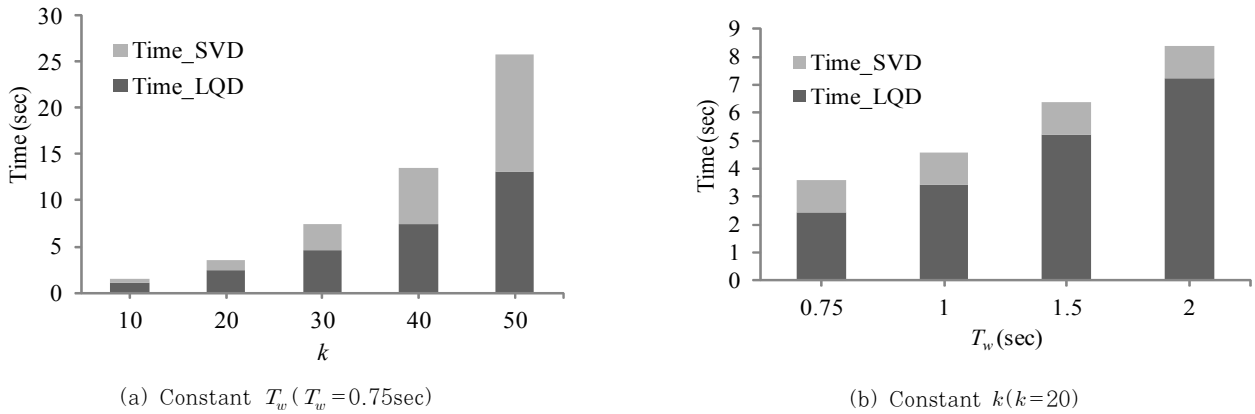


Fig. 9 Computing time with respect to  $k$  and  $T_w$

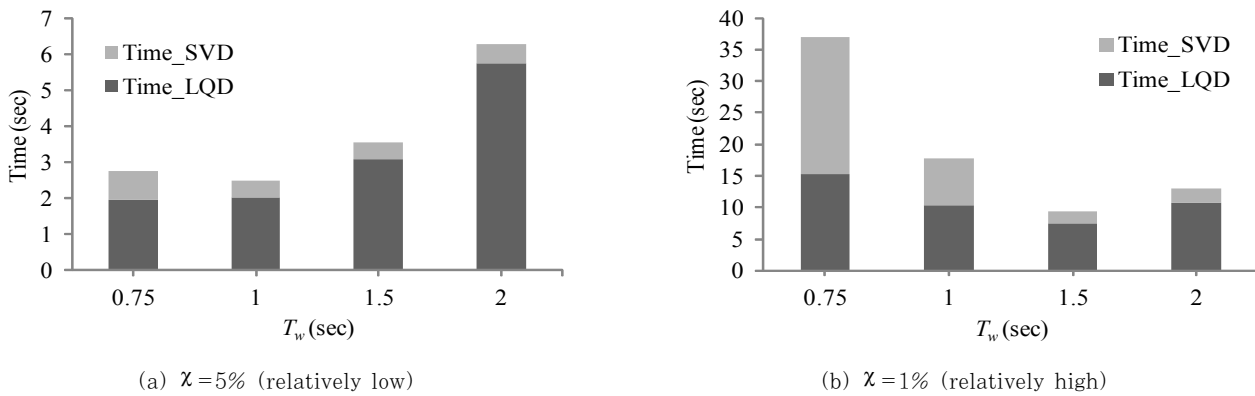


Fig. 10 Computing time for  $(k, T_w)$  pairs yielding an identical target accuracy level ( $\chi$ )

이 존재한다. 그 중에 어떤  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 SI 해석을 수행해도 비슷한 정확도의 강성행렬을 추정할 수 있지만, 계산비용을 고려하여  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 결정하면 해석의 효율성을 높일 수 있다. 또한 자유도의 개수가 작은 경우에는 해석시간이 크게 중요하지 않지만, 토목 구조물 같이 규모가 큰 시스템의 경우 자유도의 개수가 크기 때문에 해석시간을 줄일 수 있는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 결정하여 시스템 확인에 적용하는 것이 좋다.

해석시간은  $k$ 와  $T_w$ 의 크기에 영향을 받는데,  $k$ 의 증가는 식 (12)의 특이치 분해의 시간에 주로 영향을 주고  $T_w$ 의 증가는 식 (10)의 LQ 분해의 시간에 주로 영향을 준다. Fig. 9는  $k$ 와  $T_w$ 에 따른 해석시간의 변화를 나타낸다. 계산에 사용된 프로그램은 MATLAB 2009b 64bit이며, 사용된 함수는 LQ 분해 알고리즘(qr), SVD 분해 알고리즘(svd)을 이용하였다. 계산에 사용된 컴퓨터의 CPU는 Intel Core I5(2.67GHz)이다. Fig. 9(a)는  $T_w$ 가 일정한 경우,  $k$ 의 증가에 따른 해석시간의 변화를 나타낸다.  $k$ 가 증가하면서 특이치 분해와 LQ 분해의 해석시간이 점점 증가한다. 그 중에서 특이치 분해의 해석시간이 더 급격하게 증가하는 것을

알 수 있다. 따라서  $k$ 가 증가할수록 특이치 분해의 해석시간이 지배적이 된다. Fig. 9(b)는  $k$ 가 일정한 경우,  $T_w$ 의 증가에 따른 해석시간의 변화를 나타낸다.  $k$ 가 일정한 경우에는 특이치 분해의 해석시간은 증가하지 않고 LQ 분해의 해석시간만 증가한다. 이것은 식 (14)와 같이 특이치 분해는  $T_w$ 와는 무관하고,  $k$ 의 값에만 영향을 받기 때문이다. 따라서  $T_w$ 가 증가할수록 LQ 분해의 해석시간이 지배적이 된다. 같은 목표 정확도를 갖는 경우에는  $k$ 와  $T_w$ 가 반비례 관계를 갖기 때문에 어떤 값이 지배적인지에 따라 해석시간의 차이가 발생하게 된다.

Fig. 10은 같은 목표 정확도 수준( $\chi$ )을 갖는 경우  $k$ 와  $T_w$ 에 따른 해석시간의 변화를 나타낸다. Fig. 10(a)는  $\chi = 5\%$ 인 경우로서 Fig. 7(b)와 Fig. 8에서 검은색 원을 나타낸다. 이 경우에는  $k$ 가 상대적으로  $T_w$ 에 비해 작기 때문에 LQ 분해의 해석시간이 지배적이다. 따라서, 전체적으로  $T_w$ 의 크기가 작고,  $k$ 가 큰 값을 갖는 쌍을 이용하여 해석하는 것이 효율적이지만,  $T_w$ 가 0.75초인 경우의  $k$ 값이 1.0초일 때의  $k$ 값에 비해 증가하여 특이치 분해의 해석시간이 증가하기 때문에  $(k, T_w)$ 는 (13, 1.0초)를 사용하는 것이 가

장 효율적이다. Fig. 10(b)는  $\chi=1\%$ 인 경우로서 Fig. 7(b)와 Fig. 8에서 회색 원을 나타낸다. 이 경우에는  $k$ 의 값이 상대적으로  $T_w$ 에 비해 크기 때문에 특이치 분해의 해석시간이 길고 지배적이다. 따라서,  $T_w$ 가 상대적으로 큰 값,  $k$ 는 작은 값을 갖는 쌍을 이용하는 것이 해석시간에 있어서 효율적이지만,  $T_w$ 가 1.5초인 경우와  $T_w$ 가 2초인 경우에  $k$ 의 변화가 거의 없기 때문에 ( $k, T_w$ )는 (25, 1.5초)를 사용하는 것이 가장 효율적이다.

### 3.4 목표 정확도 수준( $\chi$ )의 설정을 위한 고려 사항

Fig. 11은 각 시간창( $T_w$ )에서 식 (29)의  $k$  값이 최대값을 갖는 경우( $k_{max} = T_w/2n\Delta t$ )에 추정된 강성행렬의 오차 ( $\bar{\epsilon}$ )를 나타낸다. Fig. 7(a)의 각 곡선은  $T_w$ 가 일정한 경우  $k$ 의 증가에 따른  $\bar{\epsilon}$ 의 변화를 나타내는 반면 Fig. 11은  $k$ 와  $T_w$ 가 동시에 증가하는 경우이다. 이것은 주어진  $T_w$ 에 따라 강성행렬을 가장 정확하게 추정할 수 있는 경우를 나타낸다.

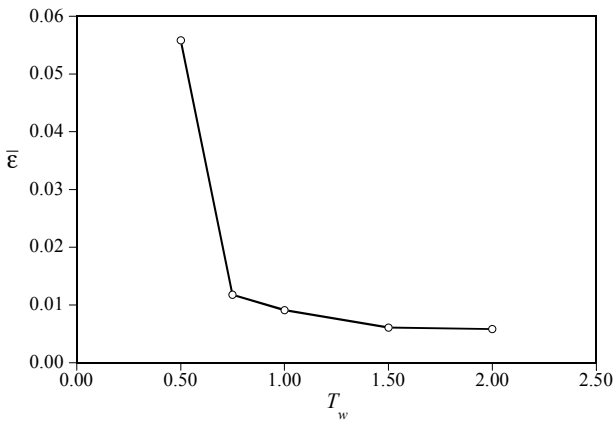


Fig. 11 Converged estimation error of stiffness matrix for varying time window( $T_w$ )

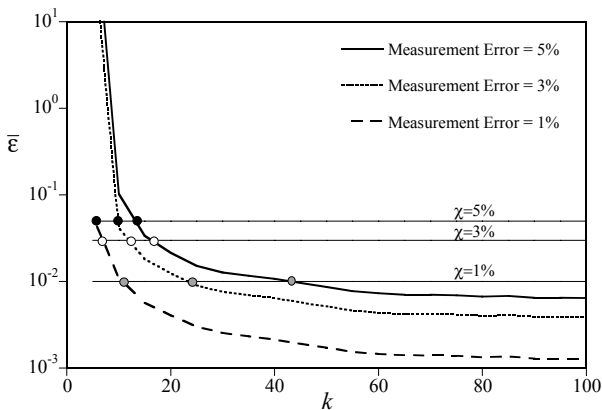


Fig. 12 Estimation error for varying magnitude of measurement noise( $T_w = 1.0\text{sec}$ )

각  $T_w$ 에서  $\bar{\epsilon}$ 를 보면  $T_w$ 가 0.5초에서 0.75초까지는 급격하게 감소하고 0.75초 이상이 되면 완만하게 감소하는 것을 알 수 있다.  $T_w$ 가 증가하면  $k_{max}$ 도 증가하기 때문에 식 (9)의 데이터 행렬의 크기는 행과 열이 모두 증가하고, 추정된 강성행렬의 정확도는 높아진다. 그러나,  $T_w$ 가 충분히 증가하여 시스템에 관련된 정보가 충분해진 이후에는 시간창의 크기가 증가하더라도 추정오차로 인해 추정된 강성행렬의 정확도는 크게 높아지지 않고 일정한 값에 수렴하는 형태를 띤다. 즉,  $T_w$ 가 증가하더라도 추정할 수 있는 강성행렬의 정확도의 한계가 존재한다는 것이다. 따라서,  $T_w$ 가 너무 큰 값을 갖는 것은 정확도 측면에서는 큰 이익이 없고, 해석시간 측면에서는 비 효율적이라는 것을 나타낸다.

Fig. 12는 세 가지의 추정오차(1%, 3%, 5%)를 포함한 측정치에 대해  $k$ 의 변화에 따른  $\bar{\epsilon}$ 의 변화를 나타낸 것이다.  $T_w$ 는 1.0초이다.  $\bar{\epsilon}$  곡선은 측정 오차의 크기에 따라 평행이동한 형태를 나타내고, 측정 오차가 증가할수록  $\bar{\epsilon}$ 는 전체적으로 증가한 형태이다. 이것은 Fig. 7(a)와 Fig. 11에서 수렴된  $\bar{\epsilon}$  값은 측정치에 포함된 측정 오차나 모델링 오차 등에 의해 영향을 받는다는 것을 나타낸다. Fig. 11과 12로부터 목표 정확도 수준( $\chi$ )을 너무 작게 설정하면 해석시간 측면에서 비효율적일 뿐만 아니라, 원하는  $\chi$ 를 만족시키는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍이 존재하지 않을 수도 있다는 것을 알 수 있다. 따라서,  $\chi$ 는 측정 오차나 모델링 오차 등을 고려하여 공학적으로 용인 가능한 수준에서 결정되어야 한다.

### 4. 부재별 강성의 추정

부재의 강성은 3장에서 제안된 방법에 의해 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 추정된 강성행렬( $\mathbf{K}_{st}$ )을 이용하여 계산한다. 전단빌딩의  $i$ 번째 층의 휨강성을  $\xi_i$ 라고 하면  $i$ 번째 부재의 강성행렬( $\mathbf{k}_i^e$ )은 다음과 같다.

$$\mathbf{k}_i^e = \xi_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \xi_i \mathbf{k}_d \quad (33)$$

강성행렬은 각 부재의 강성행렬과 적합조건 행렬(compatibility matrix)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^M \mathbf{C}_i^T \mathbf{k}_i^e \mathbf{C}_i = \sum_{i=1}^M \xi_i \mathbf{C}_i^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_i \quad (34)$$

여기서,  $M$ 은 부재의 개수  $\mathbf{C}_i$ 는  $i$ 번째 적합조건 행렬(compatibility matrix)을 나타낸다. 부재의 강성은 다음의 최적화

문제를 이용하여 추정한다.

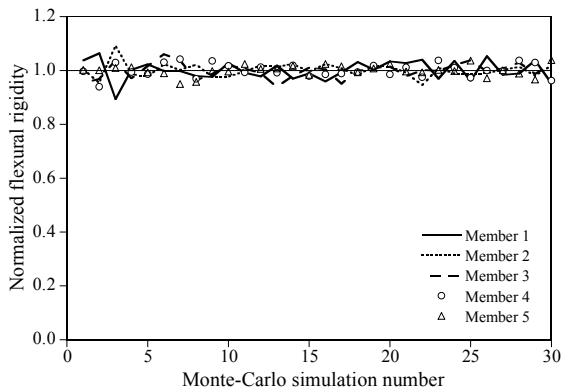
$$\begin{aligned} \text{Min}_{\xi_i} \Pi_x &= \frac{1}{2} \|\mathbf{K}(\xi_i) - \mathbf{K}_{\text{est}}\|_F^2 \\ &= \frac{1}{2} \text{trace}((\mathbf{K}(\xi_i) - \mathbf{K}_{\text{est}})^T (\mathbf{K}(\xi_i) - \mathbf{K}_{\text{est}})) \end{aligned} \quad (35)$$

식 (35)는 목적함수  $\Pi_x$ 를  $\xi_i$ 에 대해 미분하여 계산한다.

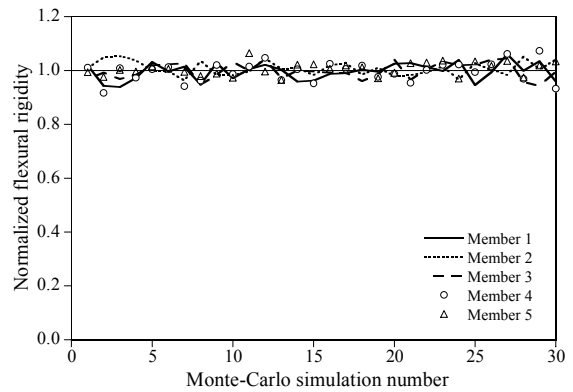
$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_x}{\partial \xi_j} &= \text{trace}\left(\frac{\partial \mathbf{K}^T}{\partial \xi_j} (\mathbf{K}(\xi_i) - \mathbf{K}_{\text{est}})\right) \\ &= \text{trace}(\mathbf{C}_j^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_j (\sum_{i=1}^{nel} \xi_i \mathbf{C}_i^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_i - \mathbf{K}_{\text{est}})) \end{aligned} \quad (36)$$

$j=1,2,\dots,nel$ 을 대입하면 아래와 같은 선형 방정식을 유도할 수 있다.

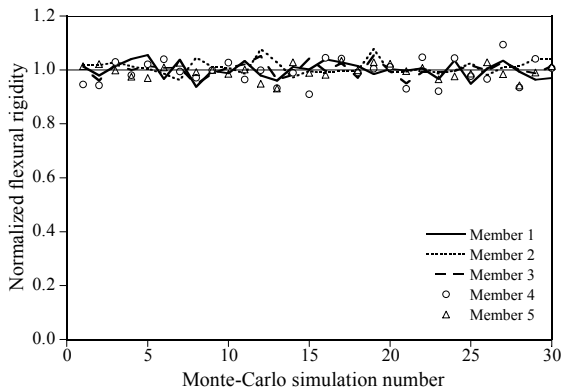
$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1i} & \dots & \pi_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{j1} & \dots & \pi_{ji} & \dots & \pi_{jM} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{M1} & \dots & \pi_{Mi} & \dots & \pi_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{trace}(\mathbf{C}_1^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_1 \mathbf{K}_{\text{est}}) \\ \vdots \\ \text{trace}(\mathbf{C}_j^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_j \mathbf{K}_{\text{est}}) \\ \vdots \\ \text{trace}(\mathbf{C}_M^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_M \mathbf{K}_{\text{est}}) \end{bmatrix} \quad (37)$$



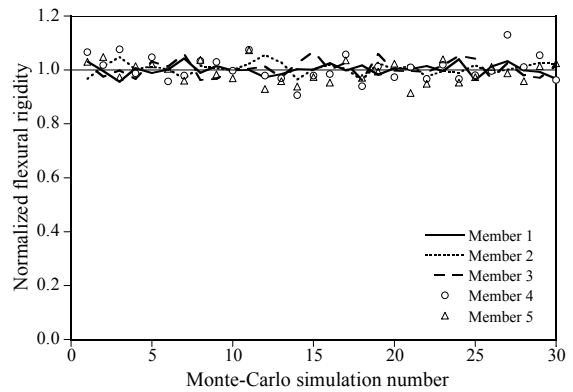
(a)  $T_w=0.75\text{sec}$  ( $k=17$ )



(b)  $T_w=1.0\text{sec}$  ( $k=13$ )



(c)  $T_w=1.5\text{sec}$  ( $k=11$ )



(d)  $T_w=2.0\text{sec}$  ( $k=12$ )

Fig. 13 Estimated flexural rigidities of members for ( $k, T_w$ ) yielding ( $\chi=5\%$ )

여기서,  $\pi_j = \text{trace}(\mathbf{C}_j^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_j \mathbf{C}_i^T \mathbf{k}_d \mathbf{C}_i)$ 이다. 식 (37)을 풀어 각 부재의 강성을 추정한다.

Fig. 13은 목표 정확도 수준( $\chi$ )을 5%로 설정한 경우 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 추정된 강성행렬로부터 5층 전단빌딩(Fig. 5)의 부재의 강성을 추정한 그림이다. Fig. 13의 (a)~(d)는 각각  $T_w$ 의 크기가 0.75, 1.0, 1.5, 2.0초인 경우에 추정된 부재의 강성을 나타낸다. 가로축은 30회의 몬테카를로 모사에서 회수를 나타내고, 세로축은 추정된 각 부재의 강성을 초기값으로 표준화한 값이다. 각기 다른  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용했지만 각 시물레이션마다 기준 값에서 비슷한 수준으로 흔들리고 있는 것으로 보아 추정된 부재들의 강성은 유사한 것을 알 수 있다.

Fig. 14는 30회의 몬테카를로 모사를 통해 추정된 각 부재별 강성의 평균과 표준 편차를 나타낸다. 추정된 평균값은 기준값과 거의 일치하는 결과이고, 표준편차도 0.05이하로 매우 신뢰성 있는 결과라고 판단된다. 이 결과는 Fig. 7으로부터 결정된 어떤  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 선택하여 해석을 수행해도 무관하다는 결과를 나타낸다. 그러나 해석시간까지 고려하면 Fig. 10(b)에서와 같이  $k$ 는 13,  $T_w$ 는 1.0초를 이용하여 해석하는 것이 가장 효율적이다.

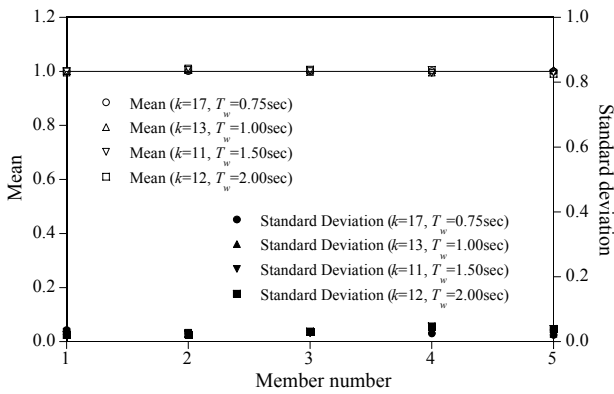
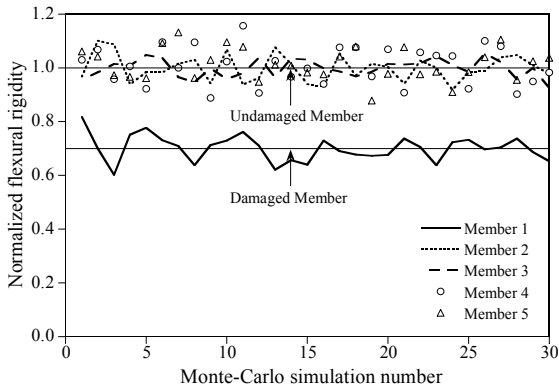


Fig. 14 Mean and standard deviation of the estimated flexural rigidities ( $\lambda=5\%$ )

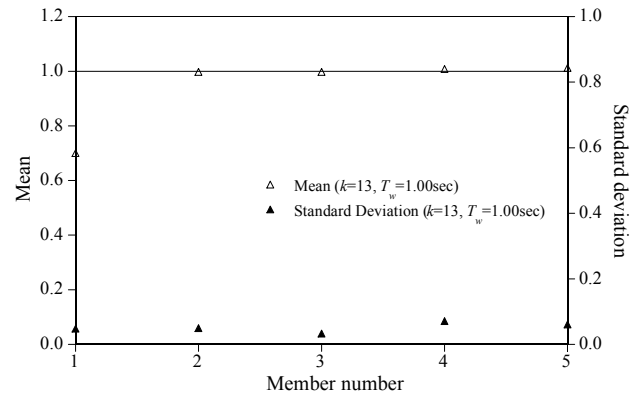
모델링 오차가 발생한 경우를 고려하기 위하여 Fig. 5(a)와 같이 전단빌딩의 1층에 손상이 발생하여 1층의 휨 강성이 30% 감소한 경우, 측정된 응답을 이용하여 부재의 강성을 추정하였다. 목표 정확도 수준( $\lambda$ )은 5%와 1%로 설정하였고, 측정오차는 5%의 비례오차가 포함되었다.  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍은 Fig. 8과 같이 손상이 없는 경우  $\lambda$ 를 5%로 설정하여 결

정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하였다. 해석시간의 효율성을 고려하기 위하여 여러 개의 쌍 중에 Fig. 10(b)에서 해석시간이 가장 짧은 경우( $k=13, T_w=1.0$ 초)를 이용하였다. Fig. 15(a)는 각 모사에서 추정된 부재의 강성을 나타낸다. Fig. 15(a)를 보면 손상이 발생한 부재의 강성이 다른 부재의 강성에 비해 확연하게 감소하기 때문에 손상이 발생한 부재를 쉽게 찾을 수 있다. 손상이 발생하지 않은 부재의 강성은 기준값에서 약간씩 진동하는 것을 알 수 있다. Fig. 15(b)는 30회의 몬테카를로 모사를 통해 추정된 각 부재별 강성의 평균과 표준편차를 나타낸다. 손상이 발생한 첫번째 부재의 강성이 초기값에서 30%정도 감소하였고, 표준편차는 최대 0.1 정도의 작은 값을 갖는 것을 알 수 있다. Fig. 15를 통해 기저 유한요소 모델과 추정하고자 하는 실제 모델에 모델링 오차가 있는 경우, 기저 모델에 의해 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 강성행렬을 추정하더라도 적절한 결과를 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

Fig. 16은 전단빌딩의 1층에 30%의 손상이 발생한 경우, 목표 정확도 수준( $\lambda$ )을 1%로 설정한 경우이다.  $k$ 와  $T_w$ 의

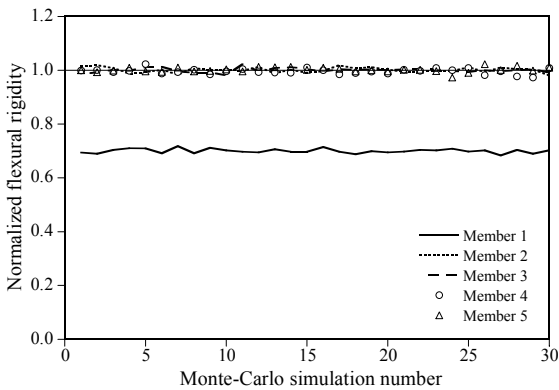


(a) Estimated flexural rigidities at each simulation

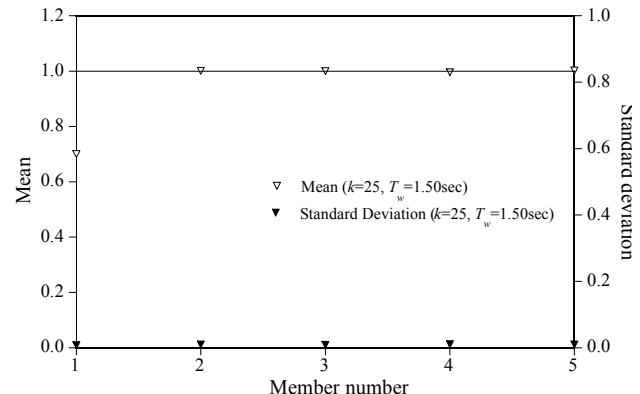


(b) Mean and standard deviation of the flexural rigidities

Fig. 15 Estimated flexural rigidities of members using an ( $k, T_w$ ) pair yielding ( $\lambda=5\%$ ) in the prior FE model



(a) Estimated flexural rigidities at each simulation



(b) Mean and standard deviation of the flexural rigidities

Fig. 16 Estimated flexural rigidities of members using an ( $k, T_w$ ) pair yielding ( $\lambda=1\%$ ) in the prior FE model

쌍은 Fig. 8과 같이 손상이 없는 경우  $\alpha$ 를 1%로 설정하여 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하였다. 여러 개의 쌍 중에서 Fig. 10(a)의 해석시간을 고려하여  $k$ 는 25,  $T_w$ 는 1.5초를 설정하였다. 목표 정확도 수준( $\alpha$ )을 1%로 설정하였기 때문에, Fig. 16(a)를 보면 Fig. 15(a)와 비교하여 부재의 강성을 보다 정확하게 추정하였다. 또한 Fig. 16(b)로부터 부재의 강성의 표준편차도 Fig. 15(b)와 비교하여 감소한 것을 알 수 있다. 따라서 기저 모델과 추정하고자 하는 실제 모델에 모델링 오차가 발생한 경우에도, 기저 모델의  $\alpha$ 를 조절하여 보다 정확한 강성행렬의 추정이 가능하다는 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

구조물의 시스템 행렬을 추정하기 위한 부분공간 시스템 확인기법에 대해 소개하였다. 부분공간 시스템 확인기법은 입력 및 출력 벡터를 이용하여 구성된 행렬행렬을 통해 시스템 행렬을 추정하는 방법이다. 추정된 시스템 행렬로부터 구조물의 강성행렬이나 감쇠행렬을 추정하기 위해서 시스템 행렬을 실제 좌표계로 변환하는 값음변환 과정이 필요하다.

추정된 강성행렬의 정확성은 행렬행렬의 크기를 결정하는 파라미터  $k$ 와  $T_w$ 에 따라 달라진다. 5자유도 전단빌딩을 이용한 수치모사 실험을 통해  $k$ 와  $T_w$ 의 변화에 따른 강성행렬의 추정오차를 살펴보았다.  $T_w$ 가 매우 작은 경우에는 불안정성이 발현되어 물리적으로 의미없는 강성행렬을 추정하였다. 일정한  $T_w$ 를 갖는 경우  $k$ 의 증가에 따라 추정된 강성행렬의 정확도는 향상되는 것을 알 수 있었고, 일정한  $k$ 를 갖는 경우에도  $T_w$ 의 증가에 따라 추정된 강성행렬의 정확도가 향상되는 것을 확인하였다. 그러나,  $k$ 와  $T_w$ 가 증가하더라도 측정오차나 모델링 오차로 인해 강성행렬의 정확도는 일정 수준 이상으로는 향상되지 않았다. 행렬행렬의 크기는 목표 정확도 수준( $\alpha$ )과 강성행렬의 추정 오차 곡선( $\bar{\epsilon}$ )이 만나는 점에서  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍들을 이용하여 결정할 수 있다.

해석시간은 목표 정확도 수준이 높은 경우( $\alpha$ 가 작은 경우)에는  $k$ 의 크기가 증가하기 때문에 특이치 분해의 시간이 지배적이다. 반면, 목표 정확도 수준이 낮은 경우( $\alpha$ 가 큰 경우)에는  $T_w$ 의 크기가 상대적으로 크기 때문에 LQ 분해에 소요되는 시간이 지배적이다. 이러한 특성을 고려해서 동일한 목표 정확도 수준을 갖는  $k$ 와  $T_w$  쌍들 중에서 연산시간이 가장 적게 소요되는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 선택할 수 있다.

같은 목표 정확도 수준을 갖는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍에서 추정된 부재의 강성은 정확도와 수치적 안정성 측면에서 거의 동일

한 결과를 보여주었다. 기저 유한 요소모델에서 결정된  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 이용하여 손상이 있는 구조 모델에 SI를 수행한 결과 만족할만한 결과를 얻을 수 있었다. 특히, 기저 모델에서 높은 목표 정확도 수준을 갖는  $k$ 와  $T_w$ 의 쌍을 손상이 있는 구조 모델에 적용한 경우에도 강성행렬 추정의 정확도가 향상되는 것을 확인하였다. 제안한 방법을 통해 정확하고 효율적으로 5층 전단빌딩의 강성행렬뿐만 아니라 부재 강성을 추정할 수 있었다. 향후 제안된 방법을 이 연구에서 제시된 간단한 전단빌딩 모델에 대한 동적실험 측정 데이터에 적용하여 타당성을 검증해 볼 예정이다.

## 감사의 글

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No.2012R1A1A2039044).

## 참고문헌

- Alvin, K.F., Park, K.C.** (1994) Second-Order Structural Identification Procedure Via State-Space-Based System Identification, *AIAA Journal*, 32(2), pp.397~406.
- Banan, M.R., Hjelmstad, K.D.** (1993) Identification of Structural System from Measured Response, *Structural Research Series*, 579, *UILU-ENG-93-2002*, University of Illinois, Urbana, Illinois.
- Banan, M.R., Banan, M.R., Hjelmstad, K.D.** (1995) Time-domain Parameter Estimation Algorithm for Structures II: Numerical Simulation Studies, *Journal of Engineering Mechanics*, 121(3), pp.435~447.
- Hjelmstad, K.D., Banan, M.R., Banan, M.R.** (1995) Time-domain Parameter Estimation Algorithm for Structures I: Computational Aspects, *Journal of Engineering Mechanics*, 121(3), pp.424~434.
- Hjelmstad, K.D., Shin, S.** (1996) Crack Identification in a Cantilever Beam from Modal Response, *Journal of Sound and Vibration* 198(5), pp.527~545.
- Hoshiya, M., Saito, E.** (1984) Structural Identification by Extended Kalman Filter, *Journal of Engineering Mechanics*, 110, pp.1757~1770.
- Kang, J.S., Park, S.-K., Shin, S., Lee, H.S.** (2005) Structural System Identification in time Domain using Measured Acceleration, *Journal of Sound and Vibration*, 288(1-2), pp.215~234.

- Katayama, T.** (2005) *Subspace Methods for System Identification*, Springer-Verlag London Limited, p. 387.
- Koh, B.H., Nagarajaiah, S., Phan, M.Q.** (2008) Reconstructing Structural Changes in a Dynamic System from Experimentally Identified State-Space Models, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22, pp.103~112.
- Min, K.-W., Joo, S.-J., Lee, S.-H.** (2004) Observer Kalman Filter Identification of a Three-Story Structure Installed with Active Mass Driver, *Journal of Computational Structural Engineering*, 17(2), pp.161~169.
- Overschee, P. Van., Moor, B. De.** (1996) *Subspace Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, USA, p.248.
- Park, S.-K., Park, H.W., Shin, S., Lee, H.S.** (2008) Detection of Abrupt Structural Damage Induced by an Earthquake using a Moving Time-window Technique, *Computers and Structures*, 86(11-12), pp.1253~1265.
- Phan, M.Q., Longman, R.W.** (2004) Extracting Mass, Stiffness and Damping Matrices from Identified State-Space Models, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Rhode Island*, August 16~19.
- Raghavendrachar, M., Aktan, A.E.** (1992) Flexibility by Multireference Impact Testing for Bridge Diagnostics, *Journal of Structural Engineering* 118(8), pp.2186~2203.
- Shi, Z.Y., Law S.S., Zhang, L.M.** (2000) Damage Localization by Directly using Incomplete Mode Shapes, *Journal of Engineering Mechanics*, 126(6), pp.656~660.
- Verhaegen, M., Dewilde, P.** (1992) Subspace Model Identification Part 2. Analysis of the Elementary Output-Error State-Space Model Identification Algorithm, *International Journal of Control*, 56(5), pp.1211~1241.
- Vestroni, F., Capecchi, D.** (2000) Damage Detection in Beam Structures Based on Frequency Measurements, *Journal of Engineering Mechanics*, 126(7), pp.761~768.
- Viberg, M.** (1995) Subspace-Based Methods for the Identification of Linear Time-Invariant Systems, *Automatica*, 31(12), pp.1835~1851.
- Yun, C.-B., Shinozuka, M.** (1980) Identification of Nonlinear Structural Dynamic Systems, *Journal of Structural Mechanics*, 8(2), pp.187~203.

## 요 지

이 논문은 부분공간 시스템 확인기법을 이용하여 전단빌딩의 강성행렬과 부재의 강성을 추정하는 기법을 소개한다. 시스템 행렬은 입력-출력 데이터로 구성된 행켈행렬을 LQ 분해와 특이치 분해를 통해 추정한다. 추정된 시스템 행렬은 닳음 변환을 통해 실제 좌표축으로 변환하고, 변환된 시스템 행렬로부터 강성행렬을 계산한다. 추정된 강성행렬의 정확성과 안정성은 행켈행렬의 크기에 따라 변한다. 전단빌딩의 기저 유한요소 모델을 이용하여 행켈행렬의 크기에 따른 강성행렬의 추정 오차 곡선을 구한다. 오차 곡선을 이용하여 목표 정확도 수준에 부합하는 행켈행렬의 크기들을 결정한다. 이렇게 선택된 행렬의 크기들 중에서 부분공간 시스템 확인의 계산비용을 고려하여 보다 적절한 행렬의 크기를 결정할 수 있다. 결정된 크기의 행켈행렬을 이용하여 강성행렬을 추정하고 추정된 강성행렬로부터 부재의 강성을 추정한다. 제안된 방법을 손상 전후의 5층 전단빌딩 수치 예제에 적용하여 타당성을 검증한다.

**핵심용어** : 부분공간 시스템 확인기법, 행켈행렬, 강성행렬, 추정오차, 기저 유한요소 모델, 행켈행렬의 크기 결정, 목표 정확도 수준