ISSN 1975-8359(Print) / ISSN 2287-4364(Online)
The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers Vol. 62, No. 5, pp. 673～678, 2013
http://dx.doi.org/10.5370/KIEE.2013.62.5.673

전환 시스템 접근법을 이용한 구간 시간지연 선형 시스템의 안정성

Stability of Interval Time-delayed Linear Systems using a Switched System Approach

김 주 경* · 김 진 훈†
(Joo-Kyeong Kim · Jin-Hoon Kim)

Abstract - This paper considers the stability of linear systems having an interval time-varying delay using a switched system approach. The time-delay system is converted to the switched system equivalently, and then a stability criterion in the form of linear matrix inequality(LMI) is derived by using a parameter dependent Lyapunov-Krosovskii function(PD-LKF). In constructing a PD-LKF, the decomposition is employed for delay free intervals, and the reduction of conservatism is shown analytically as the number of decomposition increases. Finally, two well-known numerical examples are given to show the reduction of conservatism compared to the recent results.

Key Words : Stability, Interval time-delay, Switched system, PD-LKF, LMI

1. 서 론

제어 시스템의 궁극적인 목표는 실제 환경에서 시스템이 안정하게 작동하도록 하는데 있다. 제어 시스템은 실제 환경에서 작동할 때 시스템 모델 오차, 노이즈, 외란, 시간지연 등이 발생해도 안정성이 보장되어야 한다. 이러한 안정성 문제를 다루기 위해 이를 보장하는 제어기를 설계하거나 주어진 제어기가 시스템의 안정성을 보장하는지 여부를 판별하는 제어기 해석을 한다. 이 논문에서는 다양한 외부 환경 요인 중에서 시간지연이 있는 시스템에 대한 안정성 해석을 다루었다.

많은 동적 시스템에 존재하는 시간지연은 시스템의 성능 저하와 안정성을 떨어뜨린다. 이러한 시간지연 시스템의 안정성에 관한 연구는 지난 몇 세기 동안 진행되어 왔고, 이의 결과로 많은 개선이 있었다[2][5][8].

시간 영역에서 시간지연 시스템의 안정성을 보장하는 결과를 얻기 위한 접근 방법으로는 Razumikhin 이론과 Lyapunov-Krasovskii 함수(LKF)를 이용하는 방법이 있다. 시간지연 시스템의 해석에 초기에는 Razumikin 이론이 시간지연 독립 판별법으로 이용되었고, 최근에는 LKF가 시간지연 종속 판별법에 이용된다. LKF를 이용하는 것이 Razumikhin 이론을 이용하는 것보다 더 좋은 연구 결과를 이끌어내는 것으로 알려져 있다. 그래서 최근의 결과들은 대부분 Razumikhin보다 LKF를 이용한 결과들이다.

시간지연 시스템의 안정성을 보장하는 시간지연 종속 결과를 얻기 위한 LKF는 기본적으로 3개의 항(적분이 없는 항, 1차 적분항, 2중 적분항)으로 구성된다. 적분이 없는 항과 1차 적분항은 시간에 따른 미분하면 LMI형태로 만드는데 문제가 발생하지 않는다. 그러나 2중 적분항은 시간에 따른 미분을 하면 곧바로 LMI 형태로 만들 수 없는 적분항이 나오게 된다. 그래서 이를 좀 더 덜 보수적인 결과를 얻기 위한 LMI 형태로 만드는 많은 연구가 진행되어 왔다. 예를 들면 Newton-Leibniz 공식 및 descriptor를 이용한 시스템 변환[10], 벡터-행렬에 대한 부등식 관계를 이용한 불필요한 교차항의 제거[11], 자유 가중치 행렬의 적용[3], Jensen의 부등식[2], 구간 분해[6][7] 등의 방법이 연구되었다.

다음의 시간지연 선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h_2, 0], \end{cases} \tag{1}$$

여기서 $x \in R^n$이고, $A, A_d \in R^{n \times n}$는 상수행렬들이며, $\phi(t) \in R^n$는 연속 미분 가능 벡터인 초기상태, 그리고 $d(t)$는 다음을 만족하는 구간 시변 시간지연이다.

$$\begin{cases} 0 < h_1 \le d(t) \le h_2 \\ \dot{d}(t) \le \mu; \mu > 0,\ \forall t \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

이 논문에서는 조건 (2)를 갖는 시스템 (1)의 안정성을 보장하는 결과를 얻기 위하여 전환 시스템(switched system) 안정성 이론을 적용한다. 즉, 시스템 (1)을 시간지연에 따른 동치인 2개의 전환 시스템(switched system)으로 변형시킨 후, 변수종속(parameter dependent) LKF를 이용하여 이의 안정성을 보장하는 결과를 얻는다. 이를 위하여 먼저 $d(t) \in [h_1, h_2]$를 $d(t) \in [h_1, h_0] \cup (h_0, h_2]$으로 나누고, 각 구간에 대하여 새로운 시간지연 변수 $d_1(t), d_2(t)$를 다음으로 정의하자.

* School of Electronics Engineering, Chungbuk National University, Korea.
† Corresponding Author: School of Electronics Engineering, Chungbuk National University, Korea.
E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr
Received : January 22, 2013; Accepted : April 8, 2013

$$d(t)=\begin{cases} d_1(t), \text{if } d(t)\in[h_1,h_0] \\ d_2(t), \text{if } d(t)\in[h_0,h_2] \end{cases}. \quad (3)$$

그러면 시스템 (1)은 다음의 전환 시스템과 동치이고,

$$\dot{x}(t)=\begin{cases} Ax(t)+A_d x(t-d_1(t)),\ d_1(t)\in[h_1,h_0], \\ Ax(t)+A_d x(t-d_2(t)),\ d_2(t)\in[h_0,h_2] \end{cases} \quad (4)$$

또한, 이는 등가적으로 다음으로 기술된다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=(1-\mu)[Ax(t)+A_d x(t-d_1(t))] \\ &\quad+\mu[Ax(t)+A_d x(t-d_2(t))],\end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\mu=\begin{cases} 0, \text{if } d(t)\in[h_1,h_0] \\ 1, \text{if } d(t)\in(h_0,h_2] \end{cases}$. 그리고 정의 (3)과 조건 (2)로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} h_1\le d_1(t)\le h_0,\ h_0\le d_2(t)\le h_2, \\ \dot{d}_1(t)\le\mu,\ \dot{d}_2(t)\le\mu,\ \forall t\ge 0. \end{cases} \quad (6)$$

또한 시스템 (5)는 다음 시스템의

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&\in(1-\lambda)[Ax(t)+A_d x(t-d_1(t))] \\ &\quad+\lambda[Ax(t)+A_d x(t-d_2(t))],\ \forall\lambda\in[0,1]\end{aligned} \quad (7)$$

특수한 경우이므로, 시스템 (7)의 안정성은 시스템 (5)의 안정성을 보장한다. 본 논문에서는 시스템 (7)의 안정성을 보이기 위하여 다음의 PD-LKF를 적용한다.

$$V(x_t)=(1-\lambda)V_1(x_t)+\lambda V_2(x_t),\ \forall\lambda\in[0,1] \quad (8)$$

여기서 $V_1(t), V_2(t)$는 두 시스템 $\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-d_1(t))$, $\dot{x}(t)=Ax(t)+A_d x(t-d_2(t))$에 대한 LKF이다. 그리고 $V_1(x_t)$를 구성할 때에는, 즉 $d(t)\in[t-h_0,t-h_1]$, 구간 $[t-h_1,t]$을 N_1개의 구간 분해를 하였고, $V_2(x_t)$를 구성할 때에는, 즉 $d(t)\in[t-h_2,t-h_0]$, 구간 $[t-h_1,t]$과$[t-h_0,t-h_1]$를 각각 N_1, N_2개의 구간 분해를 하였다. 이러한 방법으로 식 (8)의 PD-LKF를 이용하여 시간지연종속 안정성 결과를 얻고, 이의 결과로 N_1과 N_2의 증가가 보수성을 줄임을 보여주고, 마지막으로 잘 알려진 두 개의 예제를 통해 결과의 유용성을 보인다.

다음의 보조 정리 1은 $t_1\le t_d\le t_2$의 경우에 대한 Jensen 부등식의 확장이다.

보조 정리 1. $Q>0, t_1\le t_d\le t_2$에 대하여

$$-(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}\dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)ds\le-\eta_t^T\begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & Q\end{bmatrix}\eta_t \quad (9)$$

여기서 $\eta_t=\begin{bmatrix} x(t_2)-x(t_d) \\ x(t_d)-x(t_1)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & Q\end{bmatrix}\ge 0.$

증명. 먼저 $t_d=t_1$ 또는 $t_d=t_2$ 일 때, 식 (9)는 Jensen의 부등식[2]와 같기 때문에 만족된다. 다음으로 Shur complement[1]로부터 $\begin{bmatrix} Q & S^T \\ S & Q\end{bmatrix}\ge 0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} \alpha Q & -S^T \\ -S & \frac{1}{\alpha}Q\end{bmatrix}\ge 0,\ \forall\alpha>0$ 이 유도된다. 그리고 적분 구간 $[t_1,t_2]$를 $[t_1,t_d]$과 $[t_d,t_2]$로 분해하고, Jensen의 부등식을 적용하면 $t_1<t_d<t_2$에 대해서 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &l.h.s.\ of\ (9) \\ &\le-\frac{t_2-t_1}{t_d-t_1}[x(t_d)-x(t_1)]^T Q[x(t_d)-x(t_1)] \\ &\quad-\frac{t_2-t_1}{t_2-t_d}[x(t_2)-x(t_d)]^T Q[x(t_2)-x(t_d)] \\ &=-\eta_t^T\begin{bmatrix}(1+\alpha)Q & 0 \\ 0 & (1+\frac{1}{\alpha})Q\end{bmatrix}\eta_t;\alpha=\frac{t_2-t_1}{t_d-t_1}>0 \\ &\le-\eta_t^T\left\{\begin{bmatrix}(1+\alpha)Q & 0 \\ 0 & (1+\frac{1}{\alpha})Q\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha Q & -S^T \\ -S & \frac{1}{\alpha}Q\end{bmatrix}\right\}\eta_t \\ &=r.h.s\ of\ (9). \end{aligned}$$

이것으로 증명을 마친다. □

2. 주요 결과

주요 결과를 보이기 전에 스칼라와 자연수 N_1, N_2를 포함한 벡터들을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} &h_0=\frac{h_1+h_2}{2},\delta_1=\frac{h_1}{N_1},\delta_2=\frac{h_0-h_1}{N_2},\Delta=\frac{h_2-h_1}{2}, \\ &\xi_{t_1}^T=[x^T(t)\ x^T(t-\delta_1)\cdots x^T(t-N_1\delta_1)\ x^T(t-d_1(t)) \\ &\qquad x^T(t-h_0)]:=\xi_{t_1}^T[e_0^T\ e_1^T\cdots e_{N_1}^T\ e_{d_1}^T\ e_{h_0}^T], \\ &\xi_{t_2}^T=[x^T(t)\ x^T(t-\delta_1)\cdots x^T(t-N_1\delta_1) \\ &\qquad x^T(t-h_1-\delta_2)\ x^T(t-h_1-2\delta_2)\cdots x^T(t-h_1-N_2\delta_2) \\ &\qquad x^T(t-d_2(t))\ x^T(t-h_2)] \\ &\quad:=\xi_{t_2}^T[\hat{e}_0^T\ \hat{e}_1^T\cdots\hat{e}_{N_1+N_2}^T\ \hat{e}_{d_2}^T\ \hat{e}_{h_2}^T] \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $[e_0^T\ e_1^T\cdots e_{N_1}^T\ e_{d_1}^T\ e_{h_0}^T]$ 와 $[\hat{e}_0^T\ \hat{e}_1^T\cdots\hat{e}_{N_1+N_2}^T\ \hat{e}_{d_2}^T\ \hat{e}_{h_2}^T]$ 는 적당한 크기의 항등행렬(identity matrix)이며, 이들을 이용한 몇 개의 예를 들면 $x(t)=\xi_{t_1}^T e_0^T=\xi_{t_2}^T\hat{e}_0^T$, $x(t-d_1(t))=\xi_{t_1}^T e_{d_1}^T$, $x(t-d_2(t))=\xi_{t_2}^T\hat{e}_{d_2}^T$이다.

다음 정리 1은 조건 (6)을 가진 시스템 (7)의 안정성을 보장하는 결과를 유도함으로써, 조건 (2)를 가진 시스템(1)의 안정성을 보이는 결과이다.

정리 1. 다음 식을 만족하는 대칭 양확정행렬 $P,Q_1,Q_2,R_1,R_2,Z_1,Z_2,T_1,T_2,W_1,W_2>0$, 준양확정 행렬$Z_2-Z_1\ge 0$, 그리고 두 개의 정방 행렬 S_1,S_2가 존재하면

$$\begin{aligned} &\Psi_1=e_0^T PA_1+A_1^T Pe_0+A_1^T Y_2 A_1+\Phi_1<0, \\ &\Psi_2=\hat{e}_0^T PA_2+A_2^T P\hat{e}_0+A_2^T Y_2 A_2+\Phi_2<0, \end{aligned} \quad (11)$$

조건 (6)을 가진 시스템 (7)은 점근적으로 안정하고, 또한 (5)는 (7)의 특수한 경우이고, (5)는 (1)과 동치이므로, 제약 조건 (2)를 갖는 구간 시간지연 (1)은 점근적으로 안정하다. 여기서 $e_{(\cdot)}, \hat{e}_{(\cdot)}, h_0, \delta_1, \delta_2, \Delta$는 (10)에 정의 되었으며, 행렬 $\Phi_1, \Phi_2, A_1, Y_2, \Xi_k, k=1,2$는 다음으로 정의된 값들이다.

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= [e_0^T\, e_1^T \cdots e_{N_1-1}^T]\, W_1 [e_0^T\, e_1^T \cdots e_{N_1-1}^T]^T \\
&\quad - [e_1^T\, e_2^T \cdots e_{N_1}^T]\, W_1 [e_1^T\, e_2^T \cdots e_{N_1}^T]^T \\
&\quad - [e_0 - e_1]^T R_1 [e_0 - e_1] + e_{N_1}^T (Q_1 + T_1) e_{N_1} \\
&\quad - e_{h_0}^T Q_1 e_{h_0} - (1-\mu) e_{d_1}^T T_1 e_{d_1} \\
&\quad - \begin{bmatrix} e_{N_1} - e_{d_1} \\ e_{d_1} - e_{h_0} \end{bmatrix}^T \Xi_1 \begin{bmatrix} e_{N_1} - e_{d_1} \\ e_{d_1} - e_{h_0} \end{bmatrix}, \\
\Phi_2 &= [\hat{e}_0^T\, \hat{e}_1^T \cdots \hat{e}_{N_1-1}^T]\, W_1 [\hat{e}_0^T\, \hat{e}_1^T \cdots \hat{e}_{N_1-1}^T]^T \\
&\quad - [\hat{e}_1^T\, \hat{e}_2^T \cdots \hat{e}_{N_1}^T]\, W_1 [\hat{e}_1^T\, \hat{e}_2^T \cdots \hat{e}_{N_1}^T]^T \\
&\quad + [\hat{e}_{N_1}^T \cdots \hat{e}_{N_1+N_2-1}^T]\, W_2 [\hat{e}_{N_1}^T \cdots \hat{e}_{N_1+N_2-1}^T]^T \\
&\quad - [\hat{e}_{N_1+1}^T \cdots \hat{e}_{N_1+N_2}^T]\, W_2 [\hat{e}_{N_1+1}^T \cdots \hat{e}_{N_1+N_2}^T]^T \\
&\quad - [\hat{e}_0 - \hat{e}_1]^T R_1 [\hat{e}_0 - \hat{e}_1] \\
&\quad - [\hat{e}_{N_1} - \hat{e}_{N_1+1}]^T R_2 [\hat{e}_{N_1} - \hat{e}_{N_1+1}] + \hat{e}_{N_1+N_2}^T T_2 \hat{e}_{N_1+N_2}^T \\
&\quad - (1-\mu) \hat{e}_{d_2}^T T_2 \hat{e}_{d_2} + [\hat{e}_{N_1}^T\ \hat{e}_{N_1+N_2}^T]\, Q_2 [\hat{e}_{N_1}^T\ \hat{e}_{N_1+N_2}^T]^T \\
&\quad - [\hat{e}_{N_1+N_2}^T\ \hat{e}_{h_2}^T]\, Q_2 [\hat{e}_{N_1+N_2}^T\ \hat{e}_{h_2}^T]^T \\
&\quad - \begin{bmatrix} \hat{e}_{N_1+N_2} - \hat{e}_{d_2} \\ \hat{e}_{d_2}^T - \hat{e}_{h_2}^T \end{bmatrix}^T \Xi_2 \begin{bmatrix} \hat{e}_{N_1+N_2} - \hat{e}_{d_2} \\ \hat{e}_{d_2}^T - \hat{e}_{h_2}^T \end{bmatrix}, \\
A_1 &= A e_0 + A_d e_{d_1},\ A_2 = A \hat{e}_0 + A_d \hat{e}_{d_2}, \\
Y_2 &= \delta_1^2 R_1 + \delta_2^2 R_2 + \Delta^2 Z_2, \\
\Xi_k &= \begin{bmatrix} Z_k & S_k^T \\ S_k & Z_k \end{bmatrix} \ge 0,\ k = 1,2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

증명. 앞에서 보인 바와 같이 시스템 (5)는 시스템 (1)과 동치이고, 시스템 (5)는 시스템 (7)의 특수한 경우이므로, 시스템 (7)의 안정성은 시스템 (1)의 안정성을 보장한다. 따라서 우리는 시스템 (7)의 안정성을 보이는 것으로 충분하다. 먼저 (8)과 같은 PD-LKF를 다음처럼 선택한다.

$$
\begin{cases} V_1(x_t) = v_0(x_t) + v_1(x_t), \\ V_2(x_t) = v_0(x_t) + v_2(x_t), \end{cases} \tag{13}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
v_0(x_t) &= x^T(t) P x(t) + \delta_1 \int_{-\delta_1}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s)\, ds\, d\theta \\
&\quad + \int_{t-\delta_1}^{t} \psi_1^T(s) W_1 \psi_1(s)\, ds \\
v_1(x_t) &= \int_{t-h_0}^{t-h_1} x^T(s) Q_1 x(s)\, ds \\
&\quad + \int_{t-d_1(t)}^{t-h_1} x^T(s) T_1 x(s)\, ds + \Delta \int_{-h_0}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s)\, ds\, d\theta, \\
v_2(x_t) &= \int_{t-h_1-\delta_2}^{t-h_1} \psi_2^T(s) W_2 \psi_2(s)\, ds \\
&\quad + \delta_2 \int_{-h_1-\delta_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s)\, ds\, d\theta \\
&\quad + \int_{t-h_1-\Delta}^{t-h_1} \psi_3^T(s) Q_2 \psi_3(s)\, ds + \int_{t-d_2(t)}^{t-h_0} x^T(s) T_2 x(s)\, ds \\
&\quad + \Delta \int_{-h_2}^{-h_0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s)\, ds\, d\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_1^T(s) &= [x^T(s)\ x^T(s-\delta_1) \cdots x^T(s-(N_1-1)\delta_1)], \\
\psi_2^T(s) &= [x^T(s)\ x^T(s-\delta_2) \cdots x^T(s-(N_2-1)\delta_2)], \\
\psi_3^T(s) &= [x^T(s)\ x^T(s-\Delta)]
\end{aligned}
$$

또한, $v_0(x_t), v_1(x_t), v_2(x_t)$는 각각 구간 $[t-h_1, t], [t-h_0, t-h_1], [t-h_2, t-h_1]$에 대한 LKF이며, 시간 지연 $d(t)$가 포함되지 않은 구간은 구간 분해를 하였다. $d(t) \in [t-h_0, t-h_1]$인 경우에는 시간지연 $d(t)$가 구간 $[t-h_1, t]$에 포함되지 않고, 또한 $d(t) \in [t-h_2, t-h_0]$인 경우에는 구간 $[t-h_1, t]$과 $[t-h_0, t-h_1]$에 시간지연 $d(t)$가 포함되지 않는다. 그러므로 $V_1(x_t)$를 구성할 때에는 구간 $[t-h_1, t]$을 N_1구간 분해를 하였고, $V_2(x_t)$를 구성할 때에는 구간 $[t-h_1, t]$과$[t-h_0, t-h_1]$를 각각 N_1, N_2개의 등가 구간 분해를 하였다.

이제 $v_0(x_t), v_1(x_t), v_2(x_t)$를 각각 시간에 따른 미분을 하면 다음을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_0(x_t) &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) + \delta_1^2 \dot{x}^T(t) R_1 \dot{x}(t) + w_1(x_t) \\
&\quad + \psi_1^T(t) W_1 \psi_1(t) - \psi_1^T(t-\delta_1) W_1 \psi_1(t-\delta_1) \\
\dot{v}_1(x_t) &= \Delta^2 \dot{x}^T(t) Z_1 \dot{x}(t) + x^T(t-h_1)(Q_1 + T_1) x(t-h_1) \\
&\quad - x^T(t-h_0) Q_1 x(t-h_0) \\
&\quad - (1-\dot{d}_1(t)) x^T(t-d_1(t)) T_1 x(t-d_1(t)) + w_2(x_t), \\
\dot{v}_2(x_t) &= \dot{x}^T(t)(\delta_2^2 R_2 + \Delta^2 Z_2) \dot{x}(t) + \psi_2^T(t-h_1) W_2 \psi_2(t-h_1) \\
&\quad - \psi_2^T(t-h_1-\delta_2) W_2 \psi_2(t-h_1-\delta_2) \\
&\quad + \psi_3^T(t-h_1) Q_2 \psi_3(t-h_1) + x^T(t-h_0) T_2 x(t-h_0) \\
&\quad - \psi_3^T(t-h_1-\Delta) Q_2 \psi_3(t-h_1-\Delta) \\
&\quad - (1-\dot{d}_2(t)) x^T(t-d_2(t)) T_2 x(t-d_2(t)) \\
&\quad + w_3(x_t) + w_4(x_t),
\end{aligned}
$$

여기서 $w_k(x_k),\ k=1,2,3,4$는 적분 항들이다. $w_1(x_t)$과 $w_3(x_t)$는 Jensen의 부등식을 이용하고 $w_2(x_t)$와 $w_4(x_t)$는 보조정리 1을 이용하면 LMI형태로 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
w_1(x_t) &= -\delta_1 \int_{t-\delta_1}^{t} \dot{x}^T(s) R_1 \dot{x}(s)\, ds \\
&\le -\xi_{t_1}^T (e_0 - e_1)^T R_1 (e_0 - e_1) \xi_{t_1}, \\
w_2(x_t) &= -\Delta \int_{t-h_0}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s)\, ds \\
&\le -\xi_{t_1}^T \begin{bmatrix} e_{N_1} - e_{d_1} \\ e_{d_1} - e_{h_0} \end{bmatrix}^T \Xi_1 \begin{bmatrix} e_{N_1} - e_{d_1} \\ e_{d_1} - e_{h_0} \end{bmatrix} \xi_{t_1}, \\
w_3(x_t) &= -\delta_2 \int_{t-h_1-\delta_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s) R_2 \dot{x}(s)\, ds \\
&\le -\xi_{t_2}^T (\hat{e}_{N_1} - \hat{e}_{N_1+1})^T R_2 (\hat{e}_{N_1} - \hat{e}_{N_1+1}) \xi_{t_2}, \\
w_4(x_t) &= -\Delta \int_{t-h_2}^{t-h_0} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s)\, ds \\
&\le -\xi_{t_2}^T \begin{bmatrix} \hat{e}_{N_1+N_2} - \hat{e}_{d_2} \\ \hat{e}_{d_2} - \hat{e}_{h_2} \end{bmatrix}^T \Xi_2 \begin{bmatrix} \hat{e}_{N_1+N_2} - \hat{e}_{d_2} \\ \hat{e}_{d_2} - \hat{e}_{h_2} \end{bmatrix} \xi_{t_2}.
\end{aligned}
$$

(13)식에 위의 식들을 대입해서 다시 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x_t) &= \dot{v}_0(x_t)+\dot{v}_1(x_t)\\ &\le 2x^T(t)P\dot{x}(t)+\dot{x}^T(t)Y_1\dot{x}(t)+\xi_{t_1}^T\Phi_1\xi_{t_1},\\ \dot{V}_2(x_t) &= \dot{v}_0(x_t)+\dot{v}_2(x_t)\\ &\le 2x^T(t)P\dot{x}(t)+\dot{x}^T(t)Y_2\dot{x}(t)+\xi_{t_2}^T\Phi_2\xi_{t_2},\end{aligned}$$

여기서 $Y_1=\delta_1^2R_1+\Delta^2Z_1>0$이고, Φ_1, Φ_2, Y_2는 (12)에 정의되어 있다. 다시 $\dot{x}(t)=A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t$ (여기서 $\hat{\xi}_t=A_2\xi_{t_2}-A_1\xi_{t_1}$)을 대입해서 $\dot{V}(x_t)$를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= (1-\lambda)\dot{V}_1(x_t)+\lambda\dot{V}_2(x_t)\\ &\le 2x^T(t)P\dot{x}(t)+\dot{x}^T(t)(Y_1+\lambda(Y_2-Y_1))\dot{x}(t)\\ &\quad +(1-\lambda)\xi_{t_1}^T\Phi_1\xi_{t_1}+\lambda\xi_{t_2}^T\Phi_2\xi_{t_2}\\ &= 2x^T(t)P(A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t)+(1-\lambda)\xi_{t_1}^T\Phi_1\xi_{t_1}+\lambda\xi_{t_2}^T\Phi_2\xi_{t_2}\\ &\quad +(A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t)^T(Y_1+\lambda(Y_2-Y_1))(A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t)\\ &\le 2x^T(t)P(A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t)+(1-\lambda)\xi_{t_1}^T\Phi_1\xi_{t_1}+\lambda\xi_{t_2}^T\Phi_2\xi_{t_2}\\ &\quad +(A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t)^T(Y_1+\lambda(Y_2-Y_1))(A_1\xi_{t_1}+\lambda\hat{\xi}_t)\\ &\quad +(1-\lambda)^2\xi_{t_1}^TA_1(Y_2-Y_1)A_1\xi_{t_1}\\ &\quad +\lambda^2(1-\lambda)\hat{\xi}_t^T(Y_2-Y_1)\hat{\xi}_t\\ &:= f(\lambda)\end{aligned} \tag{14}$$

여기서 $Y_2-Y_1=\delta_2^2R_2+\Delta^2(Z_2-Z_1)>0$이고, 마지막 두 개의 항 $(1-\lambda)^2\xi_{t_1}^TA_1(Y_2-Y_1)A_1\xi_{t_1}\ge 0$, $\lambda^2(1-\lambda)\hat{\xi}_t^T(Y_2-Y_1)\hat{\xi}_t\ge 0$, $\forall\lambda\in[0,1]$은 $f(\lambda)$를 convex 함수로 만들기 위해 추가되었다.

이제 안정성 조건을 유도하기 위해 $f(\lambda)<0,\forall\lambda\in[0,1]$이 항상 성립하도록 한다. 이는 조건 $f''(\lambda)\ge 0, f(0)<0, f(1)<0$을 만족시키는 것으로 증명될 수 있다. 먼저 $f''(\lambda)\ge 0$을 보인다.

$$f''(\lambda)=2\begin{bmatrix}A_1\xi_{t_1}\\ \hat{\xi}_t\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Y_2-Y_1 & Y_2-Y_1\\ * & Y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\xi_{t_1}\\ \hat{\xi}_t\end{bmatrix}$$

이고, $Y_2-Y_1>0$과 $Y_2-(Y_2-Y_1)(Y_2-Y_1)^{-1}(Y_2-Y_1)=Y_1>0$로부터 $f''(\lambda)\ge 0$이다. 다음으로 $f(0)<0, f(1)<0$을 보인다.

$$\begin{aligned}f(0) &= 2\xi_{t_1}^Te_0^TPA_1\xi_{t_1}+\xi_{t_1}^T\Phi_1\xi_{t_1}+\xi_{t_1}^TA_1^TY_1A_1\xi_{t_1}\\ &\quad +\xi_{t_1}^TA_1(Y_2-Y_1)A_1\xi_{t_1}=\xi_{t_1}^T\Psi_1\xi_{t_1}<0,\ \forall\xi_{t_1}\ne 0,\\ f(1) &= 2\xi_{t_2}^T\hat{e}_0^TPA_2\xi_{t_2}+\xi_{t_2}^T\Phi_2\xi_{t_2}+\xi_{t_2}^TA_2^TY_2A_2\xi_{t_2}\\ &= \xi_{t_2}^T\Psi_2\xi_{t_2}<0,\ \forall\xi_{t_2}\ne 0,\end{aligned}$$

여기서 $x^T(t)=\xi_{t_1}^Te_0^T=\xi_{t_2}^T\hat{e}_0^T$가 적용되었다. 이것으로 위의 두 가지 조건이 모두 만족되면 $\dot{V}(x_t)\le f(\lambda)<0,\forall\xi_{t_1},\xi_{t_2}\ne 0$, $\forall\lambda\in[0,1]$이 항상 성립한다. 이것으로 증명을 마친다.□

다음 정리 2는 분해 개수(N_1,N_2)가 증가할수록 보수성을 줄인다는 것을 해석적으로 보인다.

정리 2. 분해 개수 N_1,N_2와 n_1,n_2를 갖는 정리 1에 속한 h_2의 최대 지연 크기를 $\overline{h}_2(N_1,N_2)$와 $\hat{h}_2(n_1,n_2)$라고 하자. 그러면

$$\overline{h}_2(N_1,N_2)<\hat{h}_2(n_1,n_2). \tag{15}$$

여기서 $n_1=N_1,n_2=N_2$을 제외한 $N_1\le n_1,N_2\le n_2$

증명. $(\cdot)$와 $(\hat{\cdot})$을 각각 $\overline{h}_2(N_1,N_2)$(즉, $\Psi_1<0,\Psi_2<0$)와 $\hat{h}_2(n_1,n_2)$(즉, $\hat{\Psi}_1<0,\hat{\Psi}_2<0$)을 찾기 위한 스칼라와 행렬이라고 하자. $\hat{P}=P$, $\hat{Q}_k=Q_k,\hat{R}_k=R_k$, $\hat{Z}_k=Z_k,\hat{S}_k=S_k$, $k=1,2$이고, $\hat{W}_1=diag\{W_1,\varnothing\}$, $\hat{W}_2=diag\{W_2,\varnothing\}$, $\hat{\Phi}_1=\Phi_1$, $\hat{\Phi}_2=\Phi_2$라고 하자. 그래서 $\Psi_1<0,\Psi_2<0$을 이용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\hat{\Psi}_1<A_1^T(\hat{Y}_2-Y_2)A_1,\quad \hat{\Psi}_2<A_2^T(\hat{Y}_2-Y_2)A_2,$$

그리고 위의 부등식 (15)에서 $\hat{h}_2(n_1,n_2)=\overline{h_2}(N_1,N_2)+\varepsilon$, $\varepsilon>0$라 할 때 $\hat{\Psi}_1<0$, $\hat{\Psi}_2<0$이 성립함을 보여야 한다. 이를 위해 다음 식들을 이용하자.

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_1^2-\delta_1^2 &= \left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{N_1^2}\right)h_1^2:=\sigma_1,\\ \hat{\delta}_2^2-\delta_2^2 &= \left(\frac{\hat{h}_2-h_1}{2n_2}\right)^2-\left(\frac{\overline{h}_2-h_1}{2N_2}\right)^2\\ &= \left(N_2\varepsilon-(n_2-N_2)(\overline{h}_2-h_1)\right)\cdot\\ &\quad \left(N_2\varepsilon+(n_2+N_2)(\overline{h}_2-h_1)\right)/(4n_2^2N_2^2):=\sigma_2(\varepsilon),\\ \hat{\Delta}^2-\Delta^2 &= \left(\frac{\hat{h}_2-h_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\overline{h}_2-h_1}{2}\right)^2\\ &= \varepsilon\left(\varepsilon+2(\overline{h}_2-h_1)\right)/4:=\sigma_3(\varepsilon)>0,\end{aligned}$$

위 식은 $n_1>N_1$일 때 $\sigma_1<0$, $n_2>N_2$일 때 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sigma_2(\varepsilon)\to -(n_2^2-N_2^2)(\overline{h}_2-h_1)/(4n_2^2N_2^2)<0$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sigma_3(\varepsilon)\to 0^+$을 보인다. 이것은 $\varepsilon\to 0^+$일 때, σ_1과 $\sigma_2(\varepsilon)$ 중 하나는 음의 상수임을 의미한다. 그래서 다음을 조건으로 하는 작은 크기의 $\varepsilon>0$이 존재한다.

$$\begin{aligned}\hat{Y}_2-Y_2 &= (\hat{\delta}_1^2-\delta_1^2)R_1+(\hat{\delta}_2^2-\delta_2^2)R_2+(\hat{\Delta}^2-\Delta^2)Z_2\\ &= \sigma_1R_1+\sigma_2(\varepsilon)R_2+\sigma_3(\varepsilon)Z_2\le 0,\end{aligned}$$

이것은 $\hat{\Psi}_1<0$, $\hat{\Psi}_2<0$을 의미한다. 이것으로 증명을 마친다.□

3. 예 제

다음으로 예제를 통하여 유도된 결과의 유용성을 보인다. 다음 예제들은 정리 1을 이용한 결과를 얻기 위한 시뮬레이션이다. 편의상 구간 $[t-h_1,t]$과 $[t-h_0,t-h_1]$의 구간 분해

개수는 모두 $N_1 = N_2 = 3$를 사용하였고, 위의 정리 2에서 해석적으로 보였듯이 이의 구간 분해 개수(N_1, N_2)가 증가하면 우리는 좀 더 좋은 결과를 얻을 수 있다.

예제 1. 다음의 행렬들을 갖는 선형지연 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

다음의 표 1은 다양한 μ에 따라 h_1의 크기가 변할 때 허용 가능한 최대 h_2의 값을 최신의 여러 결과와 새로이 제시된 위의 정리 1의 결과를 비교하여 정리한 표이다. 표 1에서 보듯이 고정된 h_1에 대하여 다양한 μ의 결과 뿐만 아니라, 고정된 μ에 대하여 다양한 h_1에 대하여도 기존의 여러 결과들보다 새로이 제시된 정리 1의 결과가 우수함을 알 수 있다.

표 1 여러 h_1, μ에 따른 최대 허용 h_2값

Table 1 Maximal h_2 for various h_1, μ

h_1	methods	$\mu=0.3$	$\mu=0.5$	$\mu=0.9$
2.0	Shao[6]	2.69	2.50	2.50
	Sun el al[7]	3.01	2.56	2.56
	Parlakci[9]	3.19	2.54	2.54
	Theorem 1	**3.25**	**3.20**	**3.20**
3.0	Shao[6]	3.25	3.25	3.25
	Sun el al[7]	3.24	3.24	3.24
	Parlakci[9]	3.35	3.35	3.35
	Theorem 1	**3.80**	**3.80**	**3.80**
5.0	Shao[6]	-	-	-
	Sun el al[7]	5.02	5.02	5.02
	Parlakci[9]	5.10	5.10	5.10
	Theorem 1	**5.22**	**5.22**	**5.22**

또한 다음의 표 2는 모든 시간지연의 변화율에 대한(즉, $\mu \to \infty$일 때) 기존의 결과와 새로이 제시된 정리 1의 결과를 비교하여 정리 한 표이다. 표 2에서 보듯이 새로이 제시된 정리 1의 결과는 기존의 결과에 비하여 h_1의 크기에 무관하게 안정성이 보장되는 최대 허용 h_2의 값이 큼을 알 수 있다.

표 2 여러 h_1에 따른 최대 허용 h_2값$(\mu \to \infty)$

Table 2 Maximal h_2 for various h_1 when $\mu \to \infty$

h_1	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
Shao[6]	1.87	2.50	3.25	4.07	-
Park el al.[8]	2.06	2.61	3.31	4.09	-
Theorem 1	**2.74**	**3.20**	**3.80**	**4.48**	**5.22**

이상을 정리하면, 표 1과 표 2에서 보듯이 μ의 크기에 관계없이 주어진 h_1에 대하여 안정성을 보장하는 최대 허용 시간지연 크기(h_2)가 증가함을 알 수 있다.

예제 2. 다음의 행렬을 갖는 시간 지연 시스템 (1)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

다음의 표 3은 $\mu \to \infty$일 때 h_1에 따른 안정성을 보장하는 최대 h_2값을 기존의 결과와 위의 정리 1의 결과를 비교하여 나타낸 표이다. 이 표 3에서 보듯이 새로이 제시된 정리 1의 결과가 최근의 결과와 비교해서 좀 더 나은 결과를 보여 준다.

표 3 여러 h_1에 따른 최대 허용 h_2값$(\mu \to \infty)$

Table 3 Maximal h_2 for various h_1 when $\mu \to \infty$

h_1	0.3	0.5	0.8	1.0	2.0
He et al.[3]	0.94	1.09	2.34	1.50	2.40
Shao[6]	1.07	1.21	1.45	1.61	2.47
Park el al.[8]	1.24	1.38	1.60	1.75	2.58
Theorem 1	**1.91**	**2.04**	**2.23**	**2.37**	**3.13**

4. 결 론

본 논문에서는 구간 시간지연 선형 시스템의 안정성 해석 문제를 다루었다. 이를 위하여 시간 지연 $d(t)$가 속하는 구간 $[t-h_2, t-h_1]$을 두 개의 부구간 $[t-h_1, t-h_0], [t-h_0, t-h_2]$으로 나누고, 주어진 시간시스템을, 시간 지연의 크기에 따라, 두 개의 부 시스템이 서로 전환하는 전환시스템(switching system)으로 등가 변환을 하였다. 그리고 각각의 부전환(sub-switching system) 시스템에 대하여 LKF를 구성한 후, 이를 이용하여 전체 시간지연시스템의 안정성을 보장하기 위한 PD-LKF를 구성하였다. PD-LKF를 구성함에 있어 시간 지연 $d(t)$가 속하지 않는 구간은 구간 분해를 적용함으로써 좀 더 나은 결과를 얻도록 하였다. 또한 해석적으로 각 부구간의 분해 개수(N_1, N_2)의 증가는 보수성을 줄임을 보였다. 마지막으로 수치 예제를 통하여, 새로이 제시된 결과는 동일한 시간 지연 변화율(μ) 및 최소 시간지연(h_1)에 따른 기존의 결과보다 안정성을 보장하는 좀 더 큰 최대 허용 시간지연(h_2)을 얻음을 보였다.

감사의 글

이 논문은 2012년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.

References

[1] S. Boyd, L. E. Ghaoiu, E. Feron and V. Balakrish Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.

[2] K. Gu, V. L. Kharitonov and J. Chen, Stability of time-delay systems, Birkhauser, 2003.

[3] Y. He, Q. G. Wang, C. Lin and M. Wu, "Delay range dependent stablility for systems with time-varying delay", Automatica, vol. 43(2), pp. 371-376, 2007.

[4] P. Park and J. W. Ko, "Stability and robust stability for sytems with a time-varying delay", Automatica, vol. 43, pp. 1855-1858. 2007.
[5] Q. L. Han, "A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems", Automatica, vol. 45, pp. 517-524, 2009.
[6] H. Shao, "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay", Automatica, vol. 45, pp. 744-749, 2009.
[7] J. Sun, G. P. Liu, J. Chen and D. Rees, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with time-varying delays", Automatica, vol. 46, pp. 466-470, 2010.
[8] P. Park, J. W. Ko and C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays", Automatica, vol. 47, pp. 235-238, 2011.
[9] M. N. A. Parlakci, "Delay-dependent stability criteria for interval time-varying delay systems with nonuiform delay partitioning approach", Turk J. Elec. Eng, & Comp. Sci., vol. 19, pp. 763-773, 2011.
[10] S. I. Niculescu, A. T. Neto, J. M. Dion and L. Dugard, "Delay-dependent stability of linear systems with delayed state:An LMI Approach", Proc. 34th IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 1495-1497, 1995.
[11] Y. S. Moon, P. Park and W. H. Kwon, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-elayed systems", International Journal of Control, vol. 74, pp. 1447-1455, 2001.

저 자 소 개

김 주 경 (金 柱 景)

1982년 3월 1일 생. 2009년 충북 대학교 정보통신공학부 졸업. 2011년 동 대학원 제어로봇공학과 졸업(석사). 2012년 – 현재 동 대학원 제어로봇공학과 박사 과정.

E-mail : ruluroa@hanmail.net

김 진 훈 (金 鎭 勳)

1961년 10월 18일생. 1985년 서울대 전기공학과 졸업. 1985년-1986년 신영전기(주) 연구원. 1989년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과졸업(석사). 1993년 동 전기 및 전자공학과 졸업(공박). 1993년-1994년 경상대 제어계측공학과 전임강사. 1998년 미국 UCI 방문교수. 2008년 미국 UTA 방문교수. 1995년 – 현재 충북대학교 전자정보대학 전자공학부 교수.

Tel : 043-261-2387

Fax : 043-268-2386.

E-mail : jinhkim@chungbuk.ac.kr