

## 2차원 열전도 문제에 대한 Fast Multipole 경계요소법의 이론과 실행 알고리즘의 분석

최 창 용\*†

\* 전주대학교 기계자동차공학과

### Algorithm and Implementation of Fast Multipole Boundary Element Method with Theoretical Analysis for Two-Dimensional Heat Conduction Problems

Chang-Yong Choi\*†

\* Dept. of Mechanical & Automotive Engineering, Jeonju Univ.

(Received July 9, 2012 ; Revised February 4, 2013 ; Accepted February 5, 2013)

**Key Words:** FM-BEM(Fast Multipole 경계요소법), Boundary Element(경계요소), Multipole Moment(Multipole 모멘트), M2M Translation(Moment to Moment 이동), Multi-Level(멀티레벨), Leaf Cell(Leaf 셀)

**초록:** 본 논문에서는 조밀한 계수행렬로 인해 경계요소 개수의 증가에 따른 계산 시간의 급격한 증가 때문에 대규모 문제를 쉽게 다룰 수 없는 기존 BEM 문제를 획기적으로 개선하는 새로운 BEM 해법인 FM-BEM을 소개한다. 단순한 2차원 정상상태 열전도문제를 통해서 FM-BEM과 기존 BEM의 계산시간과 정확도에 대한 해석 결과를 제시하였으며, 이로부터 FM-BEM 해법이 기존 BEM과 유사한 정확도를 유지하면서도 계산 속도를 획기적으로 높인다는 결과를 확인하였다. 결과적으로 본 연구에서는 FM-BEM의 적용 이론 및 관련 실행 알고리즘들을 고찰하고 이를 통해서 FM-BEM의 효용성을 검증하였으며, 향후 다양한 공학적 문제로의 적용 범위를 확대하고자 한다.

**Abstract:** This paper presents the fast multipole boundary element method (FM-BEM) as a new BEM solution methodology that overcomes many disadvantages of conventional BEM. In conventional BEM, large-scale problems cannot be treated easily because the computation time increases rapidly with an increase in the number of boundary elements owing to the dense coefficient matrix. Analysis results are obtained to compare FM-BEM with conventional BEM in terms of computation time and accuracy for a simple two-dimensional steady-state heat conduction problem. It is confirmed that the FM-BEM solution methodology greatly enhances the computation speed while maintaining solution accuracy similar to that of conventional BEM. As a result, the theory and implementation algorithm of FM-BEM are discussed in this study.

- 기호설명 -

- $c$  : 상수 또는 고려되는 셀
- $G$  :  $T^*$ 와 관련된 계수행렬
- $H$  :  $q^*$ 와 관련된 계수행렬
- $I$  : 보조함수
- $L$  : 로컬전개 계수
- $l$  : 레벨 또는 전개항 번호
- $M$  : multipole 모멘트
- $N$  : 미지수 개수 또는 경계요소 개수
- $O$  : 크기의 정도 또는 보조함수

- $n$  : 단위수직벡터
- $q$  :  $T$ 의 수직도함수
- $q^*$  :  $T^*$ 의 수직도함수
- $T$  : 온도
- $T^*$  : 기본해
- $z$  : 복소평면에서의 위치점 ( $z = x + iy$ )

그리스문자

- $\Gamma$  : 경계
- $\delta$  : Dirac delta 함수
- $\Omega$  : 2차원 영역
- $\eta$  : field 위치점

† Corresponding Author, cychoi@jj.ac.kr

$\xi$  : source 위치점

하첨자

$i$  : 위치번호

$j$  : 경계요소번호

$k$  : 전개항 번호

$o$  : source 점

$c$  : multipole 전개점

$L$  : 로컬 전개점

$c'$  : M2M 이동점

$L'$  : L2L 이동점

## 1. 서 론

경계요소법(Boundary Element Method)은 선형 또는 비선형의 편미분방정식으로 주어지는 다양한 공학적 문제들의 지배방정식을 경계적분방정식으로 변환하여 경계만을 이산화하고 이를 통해서 해를 구하는 수치적 해법이다. 이 해법은 유한요소법(FEM) 또는 유한차분법(FDM) 등에 비하여 차원이 한 단계 감소되어 mesh 생성이 수월하고, 안정적인 수치적분을 통해 해의 정확도가 높다는 장점 때문에 초기 연구<sup>(1)</sup> 이후로 광범위한 공학적 응용에 대한 연구 노력이 이루어져 왔다.<sup>(2-5)</sup> 그러나 BEM은 경계의 이산화 결과로서 경계에서의 요소 개수에 비례하는 선형대수방정식 시스템을 생성하고 이때 만들어지는 계수행렬이 매우 조밀하고 비대칭이기 때문에 미지수 개수  $N$ 에 대해 계수계산에는  $O(N^2)$  만큼, 대수방정식 시스템에 대한 행렬식을 풀고자 할 때는 직접 해법은  $O(N^3)$ , 반복해법은  $O(N^2)$  만큼의 계산횟수를 필요로 하게 된다. 특히 이러한 BEM 계수행렬의 특성은 강력한 컴퓨터의 이용가능에 따른 대규모 문제의 BEM 적용에 대한 심각한 장애로 인식되어 왔다. 반면에 FEM, FDM과 같은 영역 해법에서의 계수행렬은 밴드 형태이고 행렬생성과 메모리 요구 모두  $O(N^2)$  이기 때문에 대규모 문제를 쉽게 다룰 수 있는 것이다.

최근에는 이러한 BEM의 문제점을 해결하기 위해 행렬구성이 필요 없고 그룹화 개념을 도입하여 메모리와 계산요구를  $O(N)$  만큼 획기적으로 줄일 수 있는 GMRES(Generalized Minimal Residual Method)와 결합된 FMM(Fast Multipole Method)이 새로운 BEM 계산 알고리즘으로 도입되어 다양한 공학문제들에 적용되고 있다. FMM은 Rokhlin과 Greengard에

의해 처음으로 2차원 포텐셜 문제를 다루기 위하여 도입되었다.<sup>(6,7)</sup> 이후, 계산효율의 극적인 개선효과를 통한 대규모 문제에 대한 Fast Multipole 경계요소법(FM-BEM) 장점 때문에 BEM에 대한 FMM의 적용이 많은 연구자들에 의해서 활발히 연구되고 있다.<sup>(8-11)</sup> 가장 최근에는 점성유동에 대한 Lagrangian particle tracking solver 모델, MEMS의 정전기 해석을 포함하는 3차원 포텐셜 및 음향파 문제, 2차원 점탄성 문제 등이 적절한 전산자원으로 몇 시간 내에서 FM-BEM을 사용하여 성공적으로 해석되었다.<sup>(12-14)</sup> FM-BEM에 대한 전체적인 소개와 리뷰는 여러 참고문헌을 통해서 찾을 수 있다.<sup>(15,16)</sup> 그러나 아직도 FM-BEM 해법은 개발 초기단계에 있고 FMM 적용이 BEM의 실행 복잡성을 상당히 증가시키고 있으며, 또한 적용 분야에 있어서 제한적이기 때문에 실질적인 공학문제의 해를 구하는 해법으로서의 효율과 응용성을 확대하고 개선하기 위해서는 기존 알고리즘의 이해 및 최적화를 수행하고 새로운 알고리즘을 개발하는 연구가 많이 필요한 실정이다.

본 연구에서는 2차원 열전도 모델을 통해서 FM-BEM의 이론 및 실행 알고리즘을 분석하고 고찰하며, 이론식의 유도과 수치 알고리즘의 실행 방법을 제시하여 FM-BEM의 응용성을 확대하고자 한다. 또한 기존 BEM과의 비교를 통한 새로운 해법의 정확도 및 계산 속도에 대한 효과를 검증한다.

## 2. 경계요소식의 구성

2차원 영역  $\Omega$ 에 대한 정상상태 열전도 문제의 지배방정식은 온도  $T$ 에 대한 Laplace 방정식으로 주어지며 문제의 해는 경계조건  $T$ 와 이의 수직도함수  $q(\partial T/\partial n)$ 와 함께 경계요소법의 일반적인 유도과정<sup>(1,2)</sup>을 통해서 아래와 같이 경계  $\Gamma$ 를  $N$ 개의 요소로 분할하는 경계요소식으로 유도된다.

$$c(\xi)T(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q(\eta)T^*(\xi, \eta)d\Gamma(\eta) - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} T(\eta)q^*(\xi, \eta)d\Gamma(\eta) \quad (1)$$

여기서  $c$ 는 경계  $\Gamma$ 의 형상으로부터 결정되는 상수 값,  $\xi(x, y)$ 는 source 위치 즉 병치되는 위치의 좌표(source or collocation point)를,  $\eta(x, y)$ 는 field 위치 또는 적분되는 위치의 좌표(integration pint)를,

$T^*$ 는 Laplace 방정식의 기본해(fundamental solution)를,  $q^*$ 는  $T^*$ 의 수직도함수  $\partial T^*/\partial n$ 을 각각 의미하며, 결과적인 경계요소식은 대수방정식의 형태로 정리된다.

### 3. FMM 식의 구성

편의상 source 점  $\xi$ 와 field 점  $\eta$ 를 복소평면 (complex plane)에서의 각각 위치 점  $z_o = x_o + iy_o$ 와  $z = x + iy$ 로 바꾸어서 표시하면 식 (1)은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$c(z_o)T(z_o) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q(z)T^*(z_o, z)d\Gamma(z) - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} T(z)q^*(z_o, z)d\Gamma(z) \quad (2)$$

FMM을 통한 BEM 계산효율의 획기적인 개선은 위 식에서 Green 함수로 주어지는 기본해 즉 커널  $T^*(z_o, z)$ 와  $q^*(z_o, z)$ 들이 아래 식과 같이 Taylor 급수형태로 전개될 수 있다는 사실로부터 출발한다. 핵심은 source 점  $z_o$ 와 field 점  $z$ 를  $z_c$ 에 근접한 전개점  $z_c$ 를 도입하여 ( $|(z-z_c)/(z_o-z_c)| \ll 1$ ) 분리하는 것이다(Fig. 1 참조).<sup>(16)</sup>

$$T^*(z_o, z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c)I_k(z - z_c) \quad (3)$$

$$q^*(z_o, z) = n(z) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} O_k(z_o - z_c)I_{k-1}(z - z_c) \quad (4)$$

이때 보조함수  $I_k(z) = z^k/k!$  및  $O_k(z) = (k-1)!/z^k$  ( $k=0$ 일 때  $O_0 = -\log(z)$ )이며,  $n(z)$ 은 복소 단위 수직벡터를 나타낸다.

#### 3.1 M2M을 이용한 경계요소 포텐셜의 군집화 식 (2)에서의 경계적분 항들은 각각 전개점 $z_c$

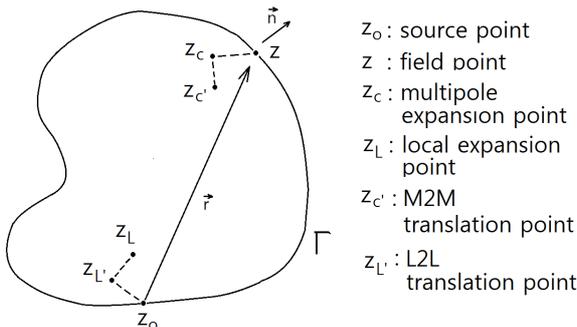


Fig. 1 Schematic of the domain and points for FM-BEM analysis

중심의 커널 급수전개 식 (3)과 식(4)를 대입하여 정리될 수 있으며, 따라서 커널  $T^*$ 에 대해서는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\int_{\Gamma_j} q(z)T^*(z_o, z)d\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c)M_k(z_c) \quad (5)$$

여기서  $M_k(z_c)$ 는 multipole 모멘트로서 다음 식으로 정의된다.

$$M_k(z_c) = \int_{\Gamma_j} I_k(z - z_c)q(z)d\Gamma(z) \quad (6)$$

이때 임의의 계산영역  $\Omega$ 는 Fig. 2에 나타낸 바와 같이 parent 셀, child 셀, 그리고 경계요소의 노드만을 포함하는 셀(leaf cell) 크기로까지 나누는 멀티레벨(multi-level) 셀로서 나타낼 수 있다. 따라서 위 식에서 전개점  $z_c$ 는 경계요소  $\Gamma_j$ 를 포함하는 leaf 셀의 중심점으로 선택될 수 있다.

한편 이들 경계적분은 Fig. 3과 같이 leaf 셀의 전개점  $z_c$ 에서 새로운 위치 즉 parent 셀의 중심점  $z_c'$ 으로 이동시켜서 전개함으로서 경계요소들의 포텐셜을 군집화 할 수 있다.

$$\int_{\Gamma_j} q(z)T^*(z_o, z)d\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_o - z_c')M_k(z_c') \quad (7)$$

이때  $M_k(z_c')$ 는 아래와 같이 주어지는 child 셀의 중심  $z_c$ 에서 parent 셀의 중심  $z_c'$ 으로의 M2M 이동(Moment to Moment translation)으로부터 계산될 수 있다.

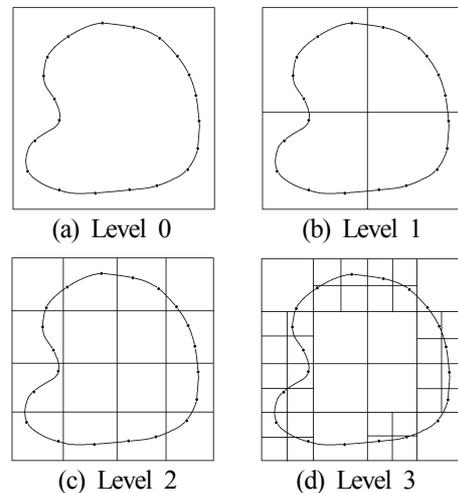


Fig. 2 Construction of cell structure from the level 0 to the level of leaf cell

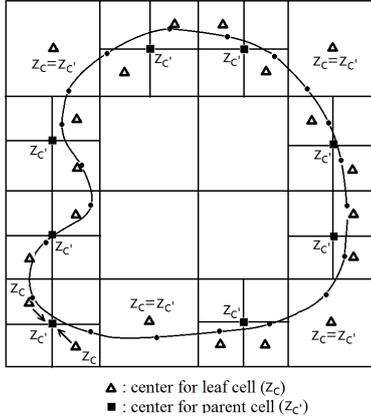


Fig. 3 M2M translation from  $z_c$  to  $z_c'$  at level 2

$$M_k(z_c') = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_c - z_c') M_l(z_c) \quad (8)$$

3.2 M2L과 L2L을 통한 군집 셀 상호작용 계산  
 한편 위 경계적분 식에서 커널  $T^*$  및  $q^*$ 에 대한 Taylor 급수 전개를 source 점  $z_o$  근처의 로컬 위치점  $z_L$ 을 중심으로 수행하여 Fig. 4와 같이 군집 셀들 사이의 상호작용을 계산한다.

따라서  $z_L$ 을 기준으로 하는 로컬전개  $L_l(z_L)$ 와  $\tilde{L}_l(z_L)$ 를 도입하여 정리하면 경계적분 항은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{\Gamma_j} q(z) T^*(z_o, z) d\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_o - z_L) \quad (9)$$

여기서  $z_c'$ 에서  $z_L$ 로의 M2L 이동(Moment to Local translation)은 다음으로 주어진다.

$$L_l(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_c') M_k(z_c') \quad (10)$$

마지막으로 로컬 전개점을  $z_L$ 에서 source 점을 포함하는 leaf 셀의 중심점  $z_L'$ 으로 이동시켜서  $p$ 개의 항으로 전개하면 경계적분식의 로컬전개는 아래와 같이 정리될 수 있다(Fig. 5 참조).

$$\int_{\Gamma_j} q(z) T^*(z_o, z) d\Gamma(z) \cong \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^p L_l(z_L') I_l(z_o - z_L') \quad (11)$$

여기서 계수  $L_l(z_L')$ 은 다음과 같은 L2L 이동(Local to Local translation)으로부터 계산된다.

$$L_l(z_L') = \sum_{m=0}^{p-l} L_m(z_L' - z_L) L_{l+m}(z_L) \quad (12)$$

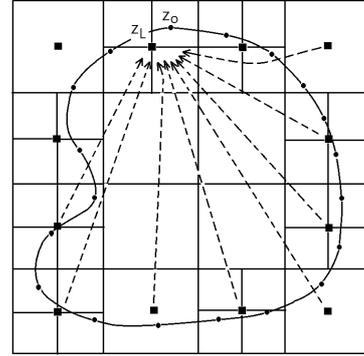


Fig. 4 M2L translation from  $z_c'$  to  $z_L$  at level 2

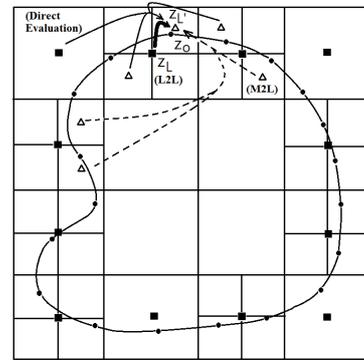
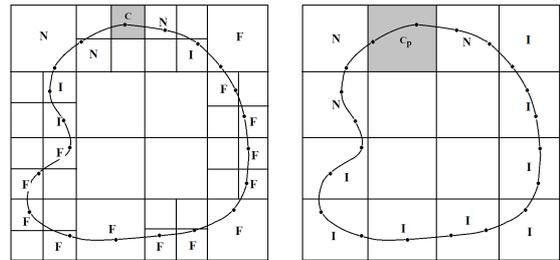


Fig. 5 Direct integration, M2L, and L2L translations at level 3



(a) Cell c at level 3 (b) Parent cell cp at level 2

Fig. 6 Neighbor cell (N), interaction cell (I), and far cell (F)

또한 커널  $q^*$ 에 대한 Multipole 모멘트, M2M, M2L 및 L2L 이동 관련 식들 역시 마찬가지로 유사하게 주어질 수 있다.

#### 4. FMM을 적용한 경계적분식의 산정

FM-BEM 해법의 핵심은 행렬과 벡터의 곱( $Ax=b$ 의 형태)을 기존 BEM에서와 같이 경계요소들의 상호작용에 의하여 계산하는 것이 아니고, 각 경계요

소들의 포텐셜을 해당 셀들의 대표 위치점에서 multipole 계수들을 통해 군집화(clustering) 시킨 셀들 사이의 상호작용을 계산하여 산정하는 것이다.

BEM 해법으로서 FMM을 실행하기 위해서는 먼저 계산영역을 완전히 감싸는 정사각형 형태의 레벨 0의 셀을 정의하고, Fig. 2와 같이 이로부터 멀티레벨 셀들로 영역분할이 수행한다. 이때 각 레벨 별로 생성된 셀에서 임의의 셀  $c$ 를 기준으로 neighbor 셀, interaction 셀, far 셀을 정의한다(Fig. 6 참조).

주어진 경계적분식은 소스점  $z_o$ 를 기준으로 다음과 같이 셀  $c$ 와 neighbor 셀에 해당하는 경계적분  $\Gamma_N$ 에 대해서는 기존 BEM에서와 같이 직접적분을 수행하고, interaction 셀과 far 셀에 해당하는 경계의  $\Gamma_I$ 와  $\Gamma_F$ 에 대한 적분은 FMM을 통해 평가한다. 즉, 커널  $T^*$ 에 대해서

$$\int_{\Gamma} q(z)T^*(z_o, z)d\Gamma(z) = \int_{\Gamma_N} qT^*d\Gamma + \int_{\Gamma_I} qT^*d\Gamma + \int_{\Gamma_F} qT^*d\Gamma \quad (13)$$

여기서 interaction 셀의 경계  $\Gamma_I$ 에 대한 적분 항은 leaf 셀 레벨(셀  $c$  레벨)의  $z_c$ 에서  $z_L$ 으로의 M2L이동에 의한 로컬전개(식 (9))로서 계산된다. 또한 far 셀의 경계  $\Gamma_F$ 에 대한 적분 항은  $z_c$ 에서  $z_c$ 으로의 M2M 이동,  $z_c$ 에서  $z_L$ 로의 M2L 이동, 최종적으로는  $z_L$ 에서  $z_L$ 으로의 L2L 이동을 통해서 계산될 수 있다. 또한 커널  $q^*$ 에 대한 적분식도 마찬가지로 방법으로 계산한다.

### 5. FM-BEM 계산 알고리즘

FM-BEM의 계산과정에 대한 알고리즘은 멀티레벨 알고리즘으로서 다음과 같이 정리되어 제시될 수 있다(Fig. 7 참조).

#### 1) 경계요소로의 이산화 (discretization)

본 논문에서는 이산화 경계요소로서 constant element가 사용되었다.

#### 2) Tree 구조 생성을 위한 셀 영역분할

멀티레벨의 셀 영역분할을 통한 트리구조를 생성 과정을 통해서 모든 경계요소를 포함하는 quad-tree 구조가 만들어질 수 있다.<sup>(17)</sup>

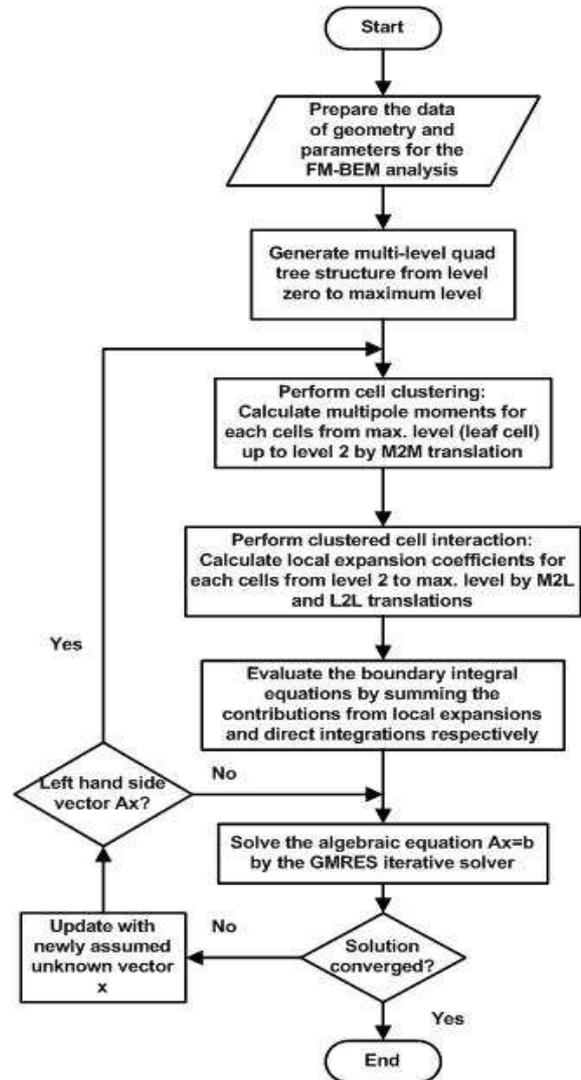


Fig. 7 Flow chart for FM-BEM solution algorithm

#### 3) 셀 군집화

Multipole 모멘트의 계산과 상위 레벨로의 이동을 통해서 각 경계요소들의 포텐셜을 군집된(clustered) 셀로 이동시키는 셀 군집화를 수행한다. 즉 영역분할이 완료된 후에는 레벨  $l \geq 2$ 인 모든 레벨에 대하여  $p$ 개의 급수 항으로서 모든 셀에 대한 multipole 모멘트를 leaf 셀의 최대 하위 레벨에서 상위 레벨 방향으로 레벨 2까지 M2M 이동을 적용하여 계산한다.

#### 4) 군집 셀 상호작용 계산

이제 source 점  $z_o$ 를 기준으로 leaf 셀에 해당하는 셀  $c$ 와 관련된 로컬전개 계수의 계산과 하위 레벨로의 이동을 통해서 군집화된 셀들 사이 상

호작용을 계산한다.

즉 레벨 2에서 시작하여 트리 구조를 따라 하위 레벨의 모든 leaf 셀까지로 모든 셀에 대한 로컬전개 계수를 계산한다. 레벨 1에서의 셀 c와 관련된 로컬전개 계수는 셀 c(레벨 1)의 interaction 셀에서의 경계요소들로 인한 기여와, 셀 c(레벨 1) parent 셀과 인접하지 않은 셀 즉 셀 c의 far 셀에서의 경계요소들로 인한 기여를 합한 것이다. 레벨 1에서의 interaction 셀에 대한 로컬전개 계수는 식 (10)의 M2L 이동으로 계산되며, far 셀에 대한 로컬전개 계수는 child 셀로의 (레벨  $l-1$ ) L2L 이동을 통해서 주어진다. 한편 레벨 2에서는 interaction 셀만 존재하기 때문에 레벨 2에서의 로컬전개 계수는 M2L 이동만을 사용하여 계산한다(레벨 1에서는 interaction 셀이 없다).

#### 5) 경계적분식의 계산

최종적으로 경계적분식 식(2)는 leaf 셀 레벨에서 source 점이 위치한 셀 c 자신과 인접 셀에 포함된 경계요소들의 기여를 기존의 BEM에서와 같이 직접 적분으로 계산하고, interaction 셀 및 far 셀에 대한 경계요소들의 기여를 로컬전개를 통해서 계산하여 이를 모두 합산함으로써 산정된다.

#### 6) 경계요소 해의 반복계산

결과적으로 위의 FM-BEM 계산과정을 통해 형성되는 대수방정식 시스템  $Ax=b$ 의 해법으로서 초기해  $x$ 를 가정하는 GMRES 반복해법을 적용한다. 따라서 미지해 벡터  $x$ 를 업데이트한 후 단계 3)으로 돌아가서 다시 계산하며, 허용치 이내의 해가 얻어질 때까지 이를 반복한다.

한편 본 연구에서는 범용의 2차원 포텐셜 문제의 해를 구하기 위한 FM-BEM 코드의 프로그래

밍이 실행되었으며 flow chart는 Fig. 7로 주어진다.

## 6. 결과 및 고찰

본 논문의 FM-BEM 프로그램 검증을 위해서 단순한 2차원 정상상태 열전도문제가 포텐셜 문제의 수치해 예제로서 제시되었다. 주어진 사각형 영역에서 Fig. 8에 나타난 바와 같이 윗면과 아래 면은 단열되고 좌측면은  $300^{\circ}\text{C}$ , 우측면은  $0^{\circ}\text{C}$ 의 일정 온도조건이 가해지는 경계조건들이 선정되었다. 이때 지배방정식은 식 (1)로서 주어지며, 해석적 해는  $T=300-50x$ 이므로 본 해법의 수치해 정확도를 비교할 수 있다.

본 예제에서는 영역의 경계가 균일 크기의 일정요소로서 각각 총 200개, 2,000개, 4,000개, 10,000개, 14,000개, 16,000개, 18,000개, 20,000개의 요소들로 이산화되는 8가지 경우에 대해서 수치해석이 실행되었으며, 또한 수치해의 정확도 비교를 위해서 영역 내부위치 점  $(x,y)=(0.5,0.5)$ 에서의 온도가 계산되었다. 본 연구에서는 먼저 경계요소 개수 증가에 따른 기존 BEM에 대한 FM-BEM 이론과 알고리즘의 효율성 검증을 위해서 해를 얻는데 소요되는 컴퓨터 CPU 시간을 비교하였다. 컴퓨터는 인텔 코어 i5, 3.20 GHz CPU, 8 Giga RAM을 갖는 Desktop PC가 사용되었으며, 해석 결과는 Fig. 9에 예시된 것처럼 경계요소 개수의 증가에 따른 기존 BEM에 대한 CPU 시간 증가에 비하여 FM-BEM의 경우에서 획기적으로 계산시간이 감소되는 것을 확인할 수 있다. 특히 최대 20,000개의 경계요소 경우일 때를 보면, 기존 BEM 계산에서 약 2800초 정도 소요되는 해석이 FM-BEM에서는 약 180초 정도로 달성되는 것

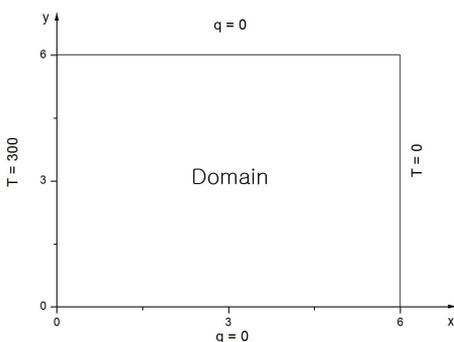


Fig. 8 2-D heat conduction problem in a rectangular domain

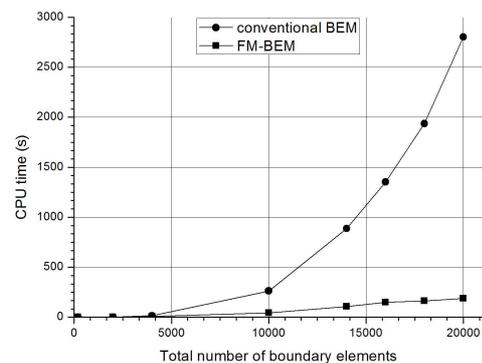


Fig. 9 Comparison of CPU times with conventional BEM and FM-BEM

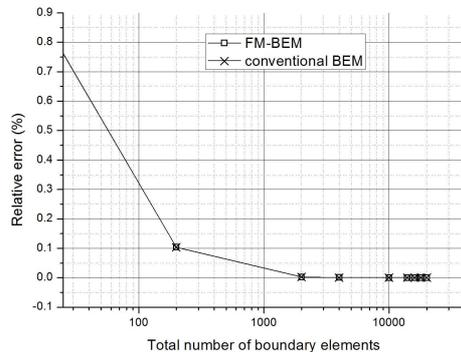


Fig. 10 Comparison of relative errors with conventional BEM and FM-BEM

을 알 수 있다. 따라서 Fig. 9의 결과는 컴퓨터 자원의 한계로 인해 기존 BEM에서는 불가능하거나 오랜 시간이 소요되었던 대규모의 실제적인 해석문제가 FM-BEM을 통해서는 합리적인 범위에서 수행될 수 있다는 것을 나타낸다.

또한 동일한 8가지 테스트 경우에 대해서 기존 BEM과 FM-BEM의 계산 정확도를 비교한 결과는 Fig. 10으로 제시되었다. 그림에서 보는 것처럼 해석적 해에 대한 FM-BEM의 계산 상대오차는 경계요소 개수의 증가에 따라 감소되어 거의 해석적 해와 동일한 값으로 근접하며, 기존 BEM의 경우와 비교해서도 차이가 거의 없는 것을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 제시된 FM-BEM 해법은 기존 BEM 해법과 비교할 때 거의 동일한 정확도를 가지는 반면에 계산속도는 획기적으로 빨라지는 매우 효과적인 경계요소법 (BEM) 이라는 것을 명확히 보여주고 있다.

## 7. 결론

기존의 BEM에서는 조밀한 계수행렬 때문에 경계요소 개수 즉 미지수 개수의 증가에 따라서 계산 시간이 급격히 증가하는 문제로 인해 대규모 문제를 쉽게 다룰 수 없는 것이 최대의 단점으로 인식되어 왔다. 한편 본 논문에서는 이를 획기적으로 개선하는 새로운 BEM 해법인 FM-BEM을 소개하고 매우 간단한 2차원 정상상태 열전도 문제를 통해서 Fast Multipole 이론을 적용한 FM-BEM 프로그램 알고리즘의 검증을 수행하였으며, FM-BEM 해법이 기존 BEM과 유사한 정확도를 유지하면서도 계산속도를 획기적으로 높인

다는 결과를 확인하였다.

결과적으로 본 연구에서는 FM-BEM의 적용 이론 및 관련 수식들을 고찰하고 기존 BEM과의 비교를 통한 해법의 정확도 및 계산 속도에 대한 효과를 검증하였다. 또한 이전 연구들에 비하여 셀 군집화 및 군집 셀 상호작용 계산 알고리즘 개념을 새로이 도입하여 FM-BEM 알고리즘 실행 방법을 명확히 제시하였으며, flow chart를 통한 멀티 레벨 알고리즘의 실행 내용을 간결하게 설명하였다. 한편 본 논문에서 제시된 계산 방법은 추가적인 어려움 없이 3차원 문제로 확대 적용이 가능하며, 향후에는 대류 및 복사 열전달 해석을 포함하는 다양한 공학적 문제에 대한 적용으로 그 범위를 확대하고자 한다.

## 참고문헌

- (1) Brebbia, C. A., Telles, J. E. and Wrobel, L. C., 1984, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, New York, NY.
- (2) Banerjee, P. K., 1994, *The Boundary Element Methods in Engineering*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, UK.
- (3) Choi, C. Y. and Cho, J. C., 2003, "BEM Solution with Minimal Energy Technique for the Geometrical Inverse Heat Conduction Problem in a Doubly Connected Domain," *ASME J. of Pressure Vessel Technology*, Vol. 125, pp. 109-117.
- (4) Choi C. Y., 2006, "A Boundary Element Solution Approach for the Conjugate Heat Transfer Problem in Thermally Developing Region of a Thick Walled Pipe," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 20, pp. 2230-2241.
- (5) Choi, C. Y. and Balaras, E., 2009, "A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation Using the Fractional Step Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, pp. 741-749.
- (6) Rokhlin, V., 1985, "Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory," *J. of Computational Physics*, Vol. 60, 187-207.
- (7) Greengard, L. and Rokhlin, V., 1987, "A Fast Algorithm for Particle Simulations," *J. of Computational Physics*, Vol. 73, pp. 325-348.
- (8) Gomez, J. E. and Power, H., 1997, "A Multipole Direct and Indirect BEM for 2D Cavity Flow at Low

- Reynolds Number,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 19, pp. 17~31.
- (9) Yoshida, K., 2001, Applications of Fast Multipole Boundary Integral Equation Method, Ph.D Thesis, Dept. of Global Environmental Eng., Kyoto University, Japan.
- (10) Koo, B.-H. and Choi, K.-I., 2006, “Mold Cooling Analysis for Injection Molding Using Fast Multipole Method,” *Proceedings of KSME Fall Annual Meeting*, Vol. 2006, No. 11, pp. 1~6.
- (11) Liu, Y. J., 2008, “A New Fast Multipole Boundary Element Method for Solving 2-D Stokes Flow Problems Based on a Dual BIE Formulation,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, pp. 139~151.
- (12) Ravnik, J., Hribersek, M. and Skerget, L., 2010, “Fast Multipole Boundary Element Method with Lagrangian Particle Tracking for Viscous Flows,” *V European Conference on Computation Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2010*, J.C.F. Pereira and A. Sequeira (Eds), Lisbon, Portugal, 14-17 June 2010.
- (13) Bapat, M. S. and Liu, Y. J., 2010, “A New Adaptive Algorithm for the Fast Multipole Boundary Element Method,” *CMES*, Vol. 58, No.2, PP. 161~183.
- (14) Zhu, X. Y., Chen, W. Q., Huang, Z. Y., Liu, Y. J., 2011, “A Fast Multipole Boundary Element Method for 2D Viscoelastic Problems,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 35, pp. 170~178.
- (15) Liu, Y. J. and Nishimura, N., 2006, “The Fast Multipole Boundary Element Method for Potential Problems: A Tutorial,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 30, pp. 371~391.
- (16) Liu, Y. J., 2009, *Fast Multipole Boundary Element Method - Theory and Applications in Engineering*, Cambridge, Cambridge University Press.
- (17) Choi, C.-Y., 2012, “Quad Tree Generation Algorithm for the Fast Multipole Boundary Element Method Analysis,” *Jeonju University J. of the Institute for Engineering and Technology*, Vol. 17, No. 1, pp. 33~40.