

강성재단 된 등방성 박스보의 동적 특성에 관한 실험적 연구[§]

김 경 덕* · 김 준 식*†

* 금오공과대학교 지능기계공학과

Experimental Study on Dynamic Characteristics of Structurally Tailored Isotropic Box Beams

Kyoung-duck Kim*, Jun-Sik Kim*†

* Dept. of Intelligent Mechanical Engineering, Kumoh Nat'l Inst. of Tech.

(Received December 28, 2012 ; Revised February 13, 2013 ; Accepted February 13, 2013)

Key Words: Isotropic Box Beam(등방성 박스보), Stiffness Tailoring(강성재단), Dynamic Characteristics(동특성), Bending-Shear Coupling(굽힘-전단 연계)

초록: 보 구조물들은 보다 우수한 성능을 위하여 다양한 형태의 보강재 또는 단면 형상을 가지게 된다. 강성재단을 설계에 적용하기 위해서는 강성재단에 의해서 발생하는 연계 거동을 정확하게 예측하는 것이 필요하다. 본 연구에서는 문헌에서 보고된 복합재료 보의 특이한 연계거동(면외 굽힘-전단 연계)을 실험적으로 확인하기 위하여, 등가의 동적 연계거동을 나타내는 강성재단 된 등방성 박스보를 제작하였다. 제작된 시편의 주파수 및 모드 형상 등의 동적 특성을 3 차원 유한요소해석과 비교 검토하여, 문헌에 보고된 특이한 전단 연계 거동이 발생함을 확인하였다. 이러한 거동은 보강재의 적절한 배치를 통해 원하는 방향으로 강성재단 될 수 있고, 얻어진 연계 거동은 다양한 분야에 응용될 수 있다.

Abstract: A beam is a major load-carrying member in many engineering structures. Beams with properly designed cross sections and stiffeners are required to enhance the structural properties. Such a design may cause various coupling behaviors, and therefore, an accurate analysis is essential for the proper design of beams. In this research, we manufactured box-beams with stiffeners, which mimic the out-of-plane composite bending-shear coupling behavior reported in literature. A modal test is carried out to obtain the dynamic characteristics, such as natural frequencies and mode shapes, of the box-beam. The obtained results are compared with those of 3D FEM, which confirm that the out-of-plane bending-shear coupling behavior reported in literature is possible. The coupling behavior can be controlled by the proper design of the stiffeners.

1. 서 론

보는 우리가 흔하게 볼 수 있는 하중을 지지하는 주요 구조물이다. 산업혁명 이후에 수많은 구조물들이 금속을 주재료로 제작되었으며, 이후 복합재료(composite materials)의 출현은 보 또는 유사 구조물들의 기본 성격을 변하게 까지 하였다. 등방성(isotropic) 재료인 철, 알루미늄 등과는 다르게 복합재료는 가볍고 강도와 강성이 강하며 높은 피

로수명을 가지고 있다. 특히 단면형상 변화를 통한 설계 이외에 체적의 변화 없이 수행할 수 있는 강성재단(stiffness tailoring)은 구조물 최적화에 장점이 있기 때문에 기계, 건축, 토목, 항공우주 산업 등 광범위하게 응용되고 있다. 이러한 강성재단이 적용된 보 구조물은 인공 위성, 항공기 날개, 그리고 헬리콥터 회전익 날개 등에 적용되고 있지만, 강성재단에 의한 연계거동(coupling behavior)의 예측이 쉽지 않기 때문에 복합재료의 잠재성을 극대화 하지는 못하고 있다.

강성재단은 복합재료 판에서 각층(lamina)의 적층각에 따라 강성이 달라지는 복합재료의 이방성을 이용하는 것으로 이를 적절히 조절하여 정적/

§ 이 논문은 대한기계학회 2012년도 추계학술대회(2012.

11. 7.-9., CECO) 발표논문임

† Corresponding Author, junsik.kim@kumoh.ac.kr

© 2013 The Korean Society of Mechanical Engineers

동적 특성을 향상시킨다. 이를 통해 구조물의 경량화는 물론 성능을 향상시킴으로 인해 기존의 금속재료로는 적용하기 힘든 분야에 설계도 가능하게 되었다. 문헌에서 많은 다양한 종류의 강성재단을 이용한 연구를 찾아 볼 수 있다.⁽¹⁾ 한가지 예로써 헬리콥터 블레이드(blade)의 복합재료 강성재단에 의한 탄성 연계 효과를 사용하면 무게증가에 대한 우려 없이 그 성능을 향상 시킬 수 있다. 대표적인 연구로 Smith 등⁽²⁾은 로터 블레이드에 복합재료 적층구조(강성재단)에 따른 허브하중 및 안정성 해석을 수행하였다. 그 결과로 강성재단이 블레이드의 변형 및 허브하중 그리고 안정성에 영향을 줄 수 있음을 보였다.

강성재단을 통한 보 구조물 최적화 등의 설계를 수행하기 위해서는 먼저 강성재단에 의해 발생할 수 있는 연계거동을 정확하게 예측하는 것이 필요하다. 복합재료 보에 대한 해석 모델들은 여러 가지 대상들 중에서도 헬리콥터의 로터 블레이드에 대하여 많이 개발되었다. 일차전단변형이론에 기초한 많은 복합재료 보 이론들이 1990 년대에 개발 되었고, 개발된 이론들에 대한 비교 평가가 수행되었다.^(3,4) 이시기에 개발된 이론들은 크게 공학적 가정에 기초한 이론들⁽³⁻⁵⁾과 변분적 점근해석기법에 기초한 이론들^(4,12)로 구분할 수 있다. 이후에 김준식 등⁽⁶⁾은 기존에 개발된 모델들이 정적면의 굽힘-전단 연계거동(out-of-plane bending-shear coupling behavior)을 정확하게 모사 할 수 없음을 보였다. 한편 이들은 전산점근해석기법을 통해 언급한 굽힘-전단 연계거동을 정성적으로 모사할 수 있음을 보였고,⁽⁸⁾ 이 기법은 동적 모델로 확장되어 고유주파수와 모드형상 등에 대한 연계 거동을 예측할 수 있음을 보였다.⁽⁷⁾ 한편 보고된 면외 굽힘-전단 연계거동이 기존의 보 이론들로 예측이 되지 않기 때문에 이 특별한 연계거동에 대한 의문이 제기되어 왔다. 특히 복합재료 박판이 15°로 강성재단 된 박스 보에 대한 예제는 많은 이론들이 보 강성행렬을 제공하였기에 비교분석에 많이 인용되고 있다.

본 연구에서는 그러한 특이한 연계거동이 강성재단된 복합재료 박스 보에서뿐만 아니라 강성재단된 등방성 박스 보에서도 있을 것에 착안하여 알루미늄 박스 보의 박판을 빗살무늬 형태로 가공하여 전단 연계거동을 보이는 박스 보를 제작하였다. 이렇게 제작된 등방성 박스 보는 복합재료 박스 보와 유사한 정적/동적 특성을 갖는다. 제작된 시험편에 대해 3 차원 유한요소 해석 프로그램을 사

용하여 주파수, 모드형상 및 주파수 응답함수 등을 계산하였다. 계산된 결과로부터 굽힘-전단 연계변형이 발생함을 확인하였고, 이를 검증하기 위해 진동실험을 수행하였다.

2. 박스 보 설계 및 유한요소해석

이 장에서는 강성재단된 박스 보 설계와 제작 그리고 3 차원 유한요소해석을 이용한 동적 응답 특성에 대하여 기술한다.

2.1 박스 보 설계 및 제작

실험 및 유한요소 해석을 위하여 연계특성이 잘 나타나고 설계와 제작이 용의한 박스 보를 구상하였다. CAD 프로그램인 CATIA 를 사용하여 굽힘-전단 연계거동을 가지도록 사면의 박판에 45° 와 0° 의 빗살무늬를 Fig. 1 과 같이 설계하였다.

설계된 박스 보의 제작을 위해 기존의 등방성 재료인 알루미늄 6063 T5 의 박스 보를 사용하여 금오공과대학교 부속공장에 있는 CNC 머시닝 센터에서 45° 와 0° 방향으로 빗살무늬를 갖도록 홈을 가공하였다. 박스 보의 제원은 Fig. 1 에 표기한 것처럼 총 길이 $L=250\text{mm}$, 높이 $h_2=40\text{mm}$, 두께 $h_3=20\text{mm}$ 이고, 강성재단을 위한 홈의 깊이는 $p=1.5\text{mm}$, 그리고 폭은 2.2mm 이다.

2.2 인장실험

유한요소 해석을 수행하기에 앞서 진동실험에 사용될 시험편의 탄성계수를 인장실험을 통해 구하였다. 알루미늄 6063 T5 의 박스 보의 한 면을 가공하여 KS 인장시험편 A13 규격에 맞게 시험편을 제작하고 4 번의 인장실험을 수행하였다. 그 결과로 탄성계수(Young's modulus)의 최소값은 46.6GPa, 최대값은 59.6GPa 이며, 평균은 52GPa 임을 확인하였다. 탄성계수 값의 오차가 상대적으로 큰 주된 이유는 인장실험장비의 시험편을 잡아주는 그립부분

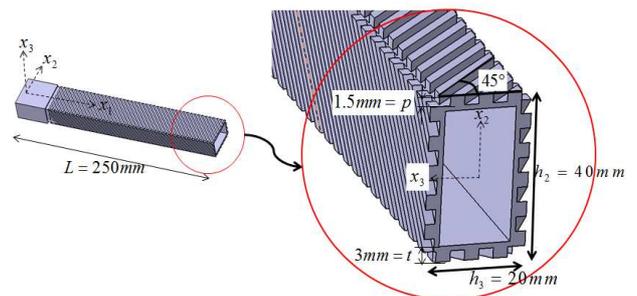


Fig. 1 Design of 45° tailored box beam

Table 1 Natural frequencies of 45° tailored box beam according to Young's modulus

	1 st Mode	2 nd Mode	3 rd Mode	4 th Mode
46.6 (GPa)	207.51 (Hz)	376.5 (Hz)	1182.4 (Hz)	1609.7 (Hz)
52 (GPa)	222.3 (Hz)	402.47 (Hz)	1249.1 (Hz)	1700.4 (Hz)
59.6 (GPa)	238.07 (Hz)	430.88 (Hz)	1337.2 (Hz)	1820.4 (Hz)

Table 2 Natural frequencies of 0° tailored box beam according to Young's modulus

	1 st Mode	2 nd Mode	3 rd Mode	4 th Mode
46.6 (GPa)	202.11 (Hz)	372.69 (Hz)	1133.7 (Hz)	1920.6 (Hz)
52 (GPa)	213.5 (Hz)	393.69 (Hz)	1207 (Hz)	2031.0 (Hz)
59.6 (GPa)	228.57 (Hz)	421.48 (Hz)	1292.2 (Hz)	2174.3 (Hz)

이 재료를 정확하게 잡아주지 못했기 때문인 것으로 판단된다. 실제로 그림 부분이 노후하여 같은 시험편에 대한 선형영역에서의 실험결과 편차가 6GPa 정도 되었다. 따라서 인장실험에서 얻어진 탄성계수들 각각에 대하여 3 차원 유한요소 모드 해석을 수행하였다.

2.3 유한요소 모드해석

강성재단된 박스보에 외팔보 경계조건을 적용하고, 굽힘-전단 연계변형이 있는 경우(45°)와 없는 경우(0°)에 대하여 모드해석을 통해 고유주파수 및 대응하는 모드를 얻었다. 인장실험에서 얻어진 각각의 탄성계수들에 대하여 모드해석을 수행하였고, 연계거동이 있는 경우에 대한 주파수는 Table 1 에 연계거동이 없는 경우는 Table 2 에 나타내었다.

굽힘-전단 연계변형이 있는 경우(Table 1), 인장 실험에서 얻어진 모든 탄성계수들에 대해서 면외 굽힘-전단 연계변형이 일어남을 확인하였다. 이후에 보여지는 결과들은 진동실험에서 얻어진 고유주파수와 가장 유사한 값을 주는 탄성계수(최소값, 46.6 GPa)를 사용하여 계산하였다.

모드해석을 통해 나타나는 굽힘-전단 연계거동은 대부분의 모드에서 나타나지만, 진동실험과의 비교가 용이한 2 차 모드형상을 Fig. 2 와 Fig. 3 에 도시하였다. 잘 알려진 굽힘 모드는 Fig. 2 에 보여

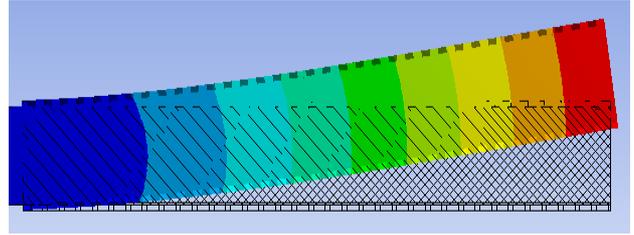


Fig. 2 The second mode shape of 45° tailored box beam

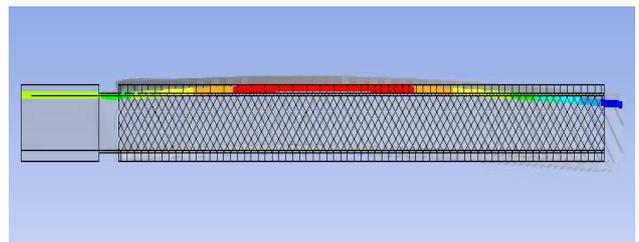


Fig. 3 Shear deformation due to the bending-shear coupling in the second mode shape

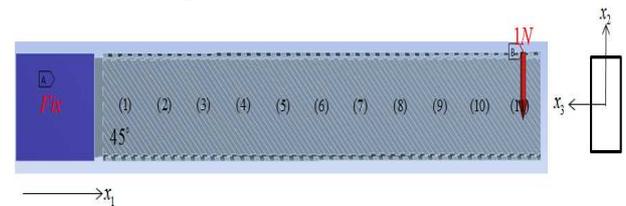


Fig. 4 Impact and sensing locations in three-dimensional finite element model

지고 있으며, 동시에 나타나는 면외 방향 전단 연계거동은 Fig. 3 에 보여지고 있다. 이러한 연계거동은 직관적으로 선형형태로 예측되나, Fig. 3 에서 보듯이 특이하게 포물선 형태로 나타남을 알 수 있다.

2.4 주파수응답 해석

진동실험에서 얻어진 주파수응답과 비교하기 위하여 면전 굽힘-전단 연계거동을 보이는 45° 박스보에 대해 ANSYS 에서 제공하는 Harmonic Response 해석을 수행하였다. Fig. 4 에서 보이는 것처럼 파란색부분을 고정시키고 자유단 부근 윗면에 수직방향(x₂)으로 1N 의 충격을 주어 (1)~(11)위치에서 면외방향(x₃)의 주파수응답을 얻었다.

감쇠가 없는 경우에 이론적으로 주파수응답은 고유주파수에서 무한대의 값을 가지나, 실제 실험에서는 여러 가지 요인에 의하여 감쇠를 가지게 된다. 본 연구에서는 전단연계 거동을 진동실험과 비교하여 확인하는 것이 주 목적이기 때문에 따로 감쇠값을 측정하여 상용하지 않고 유한요소 해석 프로그램에서 제공하는 기본 감쇠값(0.01)을 사용

하였다. 주파수응답은 단위 충격하중에 대한 각 위치에서의 가속도 응답이다.

각각의 센서위치(Fig. 4 참조)에서 주파수응답 해석결과를 분석하여 1 차모드와 2 차모드에 해당하는 고유주파수에서의 최대값을 모아서 Fig. 5 에 도시하였다. 기대한 것처럼 모드해석에서와 같은 연계거동을 보이는 형상을 얻을 수 있었다. 여기서 주의할 점은, Fig. 5 에서 보여지는 모드형상은 일반적인 모드해석의 결과와는 의미가 다르다는 것이다. 충격의 방향이 1 차모드의 방향과 수직이기 때문에 1 차모드의 크기가 상대적으로 2 차 연계모드와 비슷한 크기를 보이기 때문이다. 면외방향(x_3)으로 (즉 1 차모드 방향) 충격을 준다면 1 차모드의 크기는 매우 크게 측정된다.

한편 Fig. 5 의 결과가 연계변형에 의한 것이 아닌 충격 하중에 의한 다른 변형일 수도 있기 때문에 이를 확인하기 위하여 연계거동이 발생하지 않

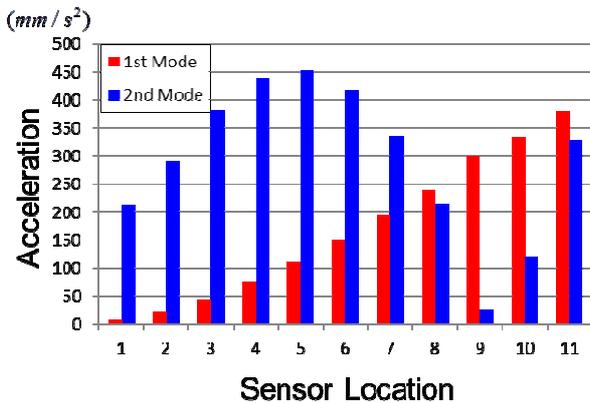


Fig. 5 The distributions of accelerations at each point under unit impulse at free end for the 45° tailored box beam

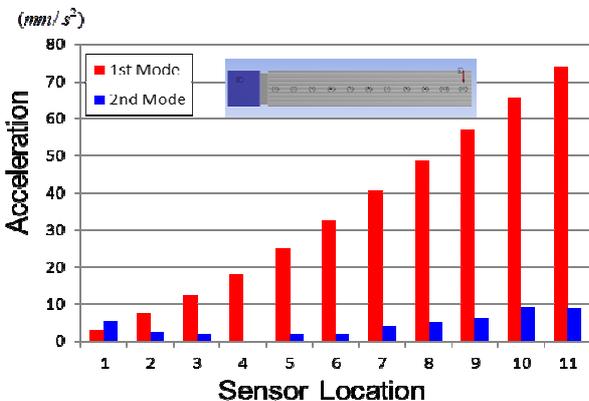


Fig. 6 The distributions of accelerations at each point under unit impulse at free end for the 0° tailored box beam

는 0°로 강성제단 된 박스 보에 대해서 동일한 해석을 수행하였다. 얻어진 결과들을 Fig. 5 에서와 같은 방법으로 Fig. 6 에 도시하였다. 그림에서 1 차모드는 연계변형이 있는 경우와 유사한 반면, 2 차모드는 매우 다른 양상을 보여주고 있다. 또한 크기도 작은 것을 알 수 있는데, 이러한 거동은 박스 보의 박판에서 푸아송 효과와 유사한 국소변형으로 확인되었다.

3. 진동 실험

이 장에서는 임팩트 해머를 이용한 주파수응답 진동실험을 수행하고 얻어진 결과를 2 장에서 얻어진 유한요소 해석결과와 비교하고 분석한다.

3.1 실험방법

진동실험은 임팩트 해머와 가속도 센서를 이용하여 수행하였다. 비교분석을 용이하게 수행하기 위하여 유한요소해석과 최대한 유사한 조건을 부가 하였다. 주파수응답함수(FRF)를 얻기 위하여 계측장비는 LMS 사의 Test.lab 을 사용하였고, 측면(x_3 방향)에 PCB 사의 가속도 센서를 부착하였다. 보의 자유단 근처 윗면에 KISTLER 사의 임팩트 해머를 사용하여 수직방향(x_2 방향)으로 충격을 가하여 실험을 수행하였다. 실험을 위한 보와 센서의 위치 등은 Fig. 7 에 나타내었다. 주파수영역은 2 차 모드까지 파악할 수 있도록 0~500Hz 까지 지정하였으며 각 실험당 동일한 위치에 10 번의 충격을 가하고 얻어진 결과들을 평균하여 주파수 응답함수를 구하였다.

3.2 굽힘-전단 연계거동(45° 박스보)

진동실험에서는 유한요소 주파수 응답을 계산한 모든 위치 중에서 Fig. 4 의 (1), (5), (9) 그리고 (11) 에 해당하는 위치에 가속도 센서를 옮겨가며 측정하였다. 실험에서의 센서의 위치는 ①~④로 번호를 부여하였고, 임팩트의 위치는 Fig. 7 에 표시하였다.

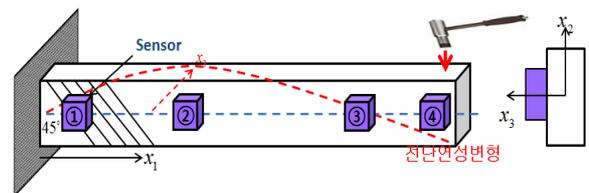


Fig. 7 Schematic of experimental test setup

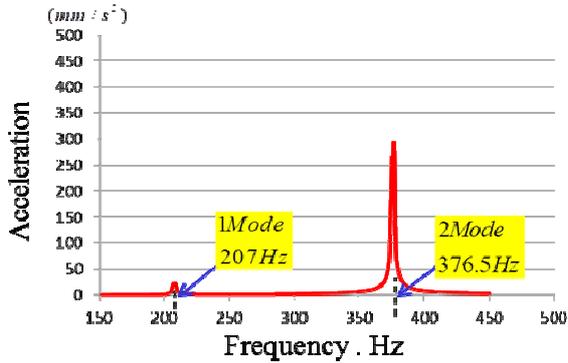


Fig. 8 ANSYS FRF result at the position (1)

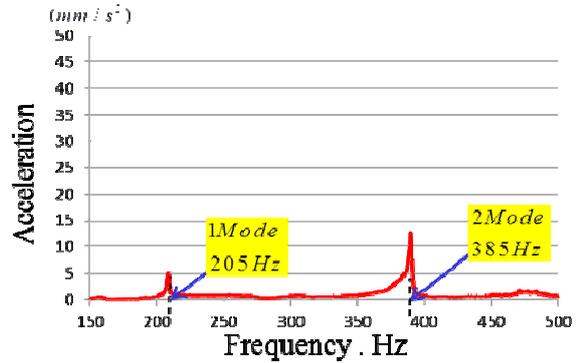


Fig. 12 Experimental FRF at the position ①

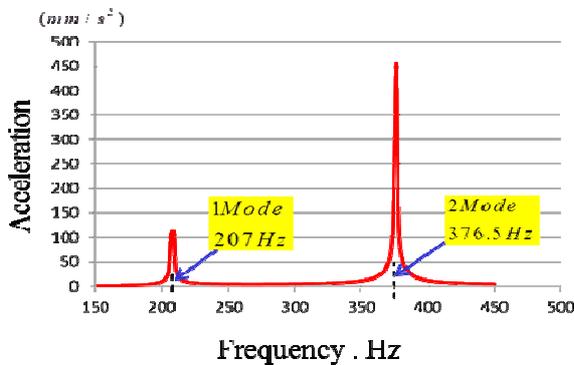


Fig. 9 ANSYS FRF result at the position (5)

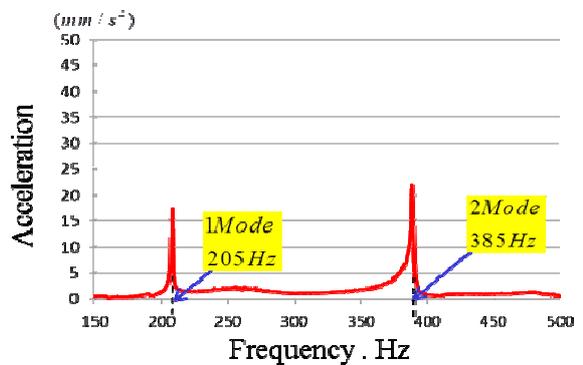


Fig. 13 Experimental FRF at the position ②

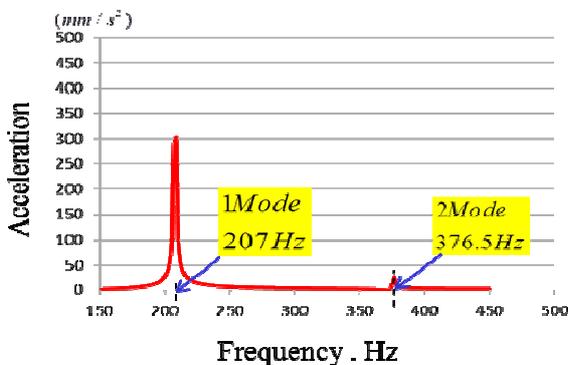


Fig. 10 ANSYS FRF result at the position (9)

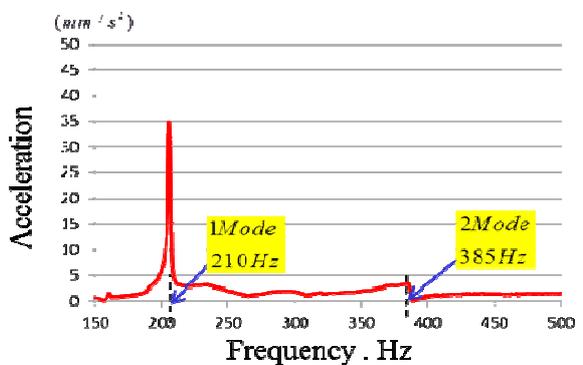


Fig. 14 Experimental FRF at the position ③

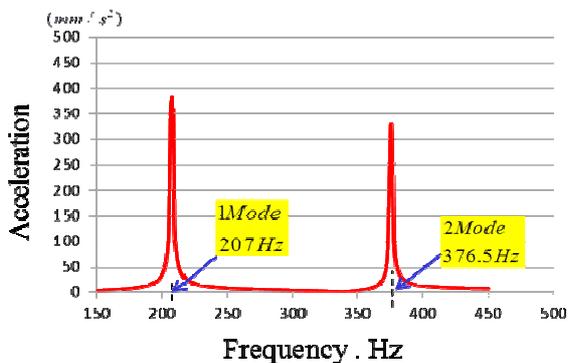


Fig. 11 ANSYS FRF result at the position (11)

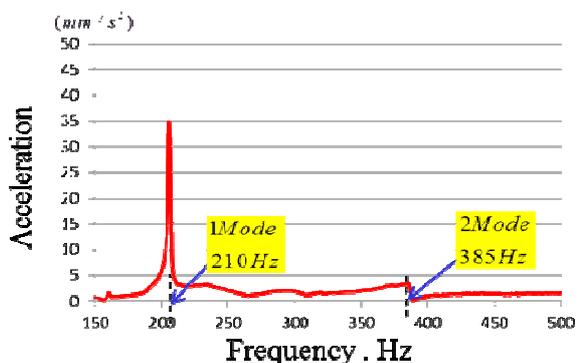


Fig. 15 Experimental FRF at the position ④

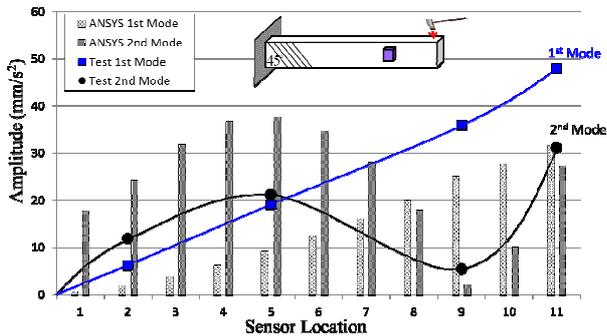


Fig. 16 Comparison of FRFs obtained by FE analysis and experiment for 45° tailored box beam

각 센서위치에서의 유한요소 주파수응답(FRF) 해석 결과들은 Figs. 8~11 에 도시하였고, 해석결과에 대응하는 실험결과들은 Figs. 12~15 에 나타내었다. 그림들에서 가로축은 주파수(Hz)이고 세로축은 단위 충격에 대한 각 센서위치에서의 가속도 응답이다. 이 그림들에서 보듯이 1 차 모드의 주파수는 약 205Hz, 2 차 모드의 주파수는 약 385Hz로 유한요소 주파수응답 해석결과와 유사하게 나타남을 알 수 있다. 유한요소 해석에서 탄성계수는 2 장에서 언급한 것처럼 인장실험에서 얻어진 최소값을 적용하였다.

그림들의 변화 추이를 보면, 해석 및 실험결과들에서 1 차모드의 응답은 고정단(①)에서 자유단(④)으로 갈수록 증가함을 알 수 있다. 한편 2 차연계모드는 센서 위치 ③에서 크기가 매우 작으며, 이는 유한요소 주파수응답에서도 마찬가지이다. 이러한 양상은 유한요소 해석결과를 도시한 Fig. 5 의 양상과 일치한다. 도시된 그림들(Figs. 8~15)로부터 2 장에서 언급한 특이한 면의 굽힘-전단 연계거동이 45°로 강성재단 된 박스 보에서 나타남을 실험적으로 확인할 수 있다.

보다 종합적으로 유한요소 해석결과와 진동실험결과를 비교하기 위하여 결과들을 하나의 그래프로 Fig. 16 에 나타내었다. 그림에서 점들은 실험값을 그리고 막대들은 해석결과를 가리킨다. 해석으로 얻은 값들이 실험값들에 비해 크기 때문에 해석 결과들에 상수를 곱하여 실험값에 비슷한 크기로 스케일 하였다. 이러한 크기의 차이는 감쇠에 매우 민감하지만, 연계거동을 파악하는데 있어서 중요한 인자는 아니라고 판단하였다. 그래프(Fig. 16)는 진동실험 결과가 해석결과와 정성적으로 일치함을 명확하게 보여주고 있다.

3.3 비연계거동(0° 박스보)

이 절에서는 연계변형이 없는 박스 보에서도

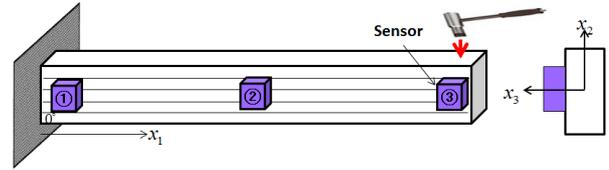


Fig. 17 Schematic of experimental test setup for 0° tailored box beam

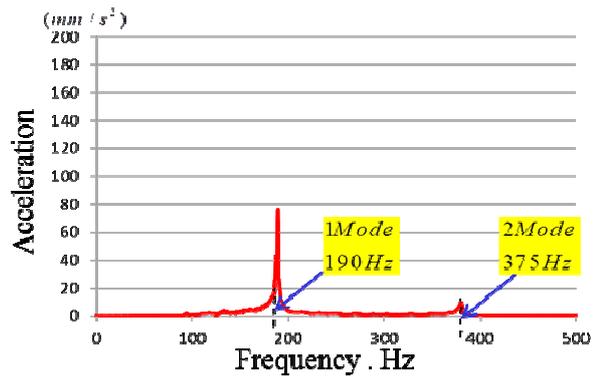


Fig. 18 Experimental FRF at the position ① for 0° tailored box beam

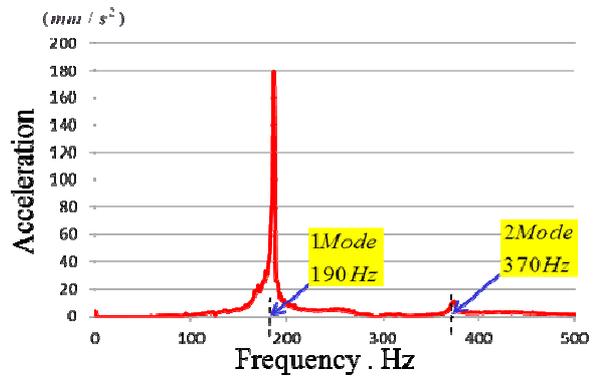


Fig. 19 Experimental FRF at the position ② for 0° tailored box beam

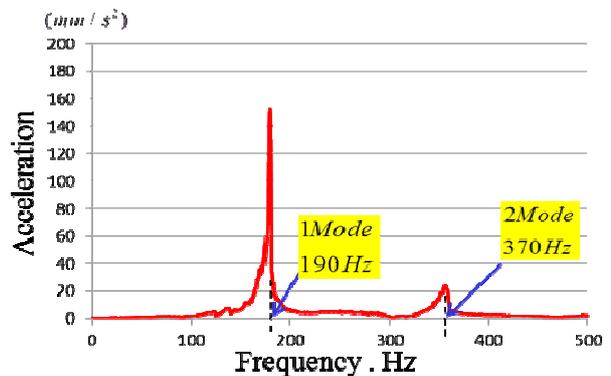


Fig. 20 Experimental FRF at the position ③ for 0° tailored box beam

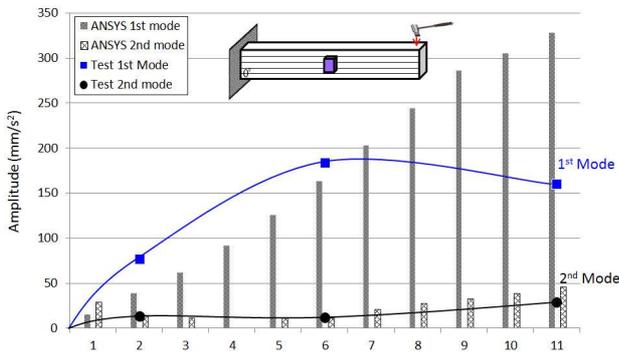


Fig. 21 Comparison of FRFs obtained by FE analysis and experiment for 0° tailored box beam

45°로 강성재단 된 박스 보 결과와 동일한 결과가 나타나는지 확인하기 위하여 0° 강성재단 된 박스 보를 제작하고 동일하게 실험을 수행하였다. 센서의 위치는 3.2 절에서와는 다르게 고정단, 중간, 그리고 자유단의 세 곳에서만 측정을 하였다 (Fig. 17). 이렇게 수행한 이유는 비연계거동을 확인하기 위해서는 세 곳의 측정으로 충분하다고 판단했기 때문이다.

센서의 각 위치에서 얻은 주파수응답함수들을 Figs. 18~20 에 도시하였다. 1 차모드의 크기는 3.2 절에서와 고정단에서 작고 자유단으로 갈수록 클수록 기대했으나, 자유단에서의 크기가 중간부분에서보다 작은 결과가 나왔다. 그러나 비연계거동의 확인 측면에서는 1 차모드의 크기보다 2 차모드의 크기가 상대적으로 얼마나 작게 나오는지 중요하여, 실험을 반복하지 않고 2 차모드의 상대적 크기를 검토하였다. 이 그림들에서 보듯이 세 위치 모두에서 2 차모드의 크기는 매우 작음을 확인할 수 있었다.

비연계 박스 보에 대한 유한요소 해석결과와 진동실험결과를 Fig. 21 에 함께 비교하여 도시하였다. 그래프들의 의미는 3.2 절에서와 같으며, 마찬가지로 유한요소해석 결과에 대해서는 상수를 곱하여 실험결과들과 유사한 크기로 스케일 하였다. 전체적으로 1 차모드에 비해 2 차모드는 무시할 수 있을 정도의 크기를 가지며 정성적인 양상 또한 유한요소 해석결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 복합재료 박스 보에서와 같은 면외 굽힘-전단 연계거동이 존재하는 강성재단 된 등방성 박스 보를 설계 및 제작하고 유한요소해석 및 진동실험을 수행하였다. 2 장에서의 해석과 3 장에서의 실험결과들로부터 다음과 같은 결론을 얻

을 수 있었다.

- 복합재료에서와 같은 강성재단을 등방성 박스보에 적용하여 설계/제작 하였다.
- 문헌에 보고된 것처럼 사각 박판보의 모든면에서 동일한 방향으로 강성재단을 한 경우 면외 굽힘-전단 연계변형이 있음을 3 차원 유한요소해석을 통해 보였다.
- 언급한 연계거동을 실험적으로 확인하기 위해 충격방향과 측정방향을 수직하게 하여 유한요소 해석결과와 정성적으로 잘 일치하는 결과를 얻었다.
- 비연계 박스보에 대한 해석 및 실험을 수행함으로써 실험적으로 보여지는 연계거동이 강성재단에 의한 결과임을 확인하였다.

본 연구를 통해 문헌^(6,7)에서 보고된 것처럼 기존의 공학적 보 이론들이 예측하지 못하는 면외 굽힘-전단 연계거동이 선형 형태가 아닌 포물선 형태로 나타남을 실험적으로 확인 하였다. 얻어진 3 차원 유한요소해석 및 실험결과들은 공학적 보 이론들의 연계거동 해석 능력에 대한 벤치마크 결과로 쓰일 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문입니다.

참고문헌

- (1) Jones, R. M., 1999, *Mechanics of Composite Materials*, 2nd Ed., Taylor & Francis, USA.
- (2) Smith, E. C and Chopra, I., July 1993, "Aeroelastic Response, Loads and Stability of a Composite Rotor in Forward Flight," *AIAA Journal*, Vol.31, No.7, pp. 1265~1273.
- (3) Jung, S. N., Nagaraj, V. T. and Chopra, I., 1999, "Assessment of Composite Rotor Blade Modeling Techniques," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 44, pp.188~205.
- (4) Volovoi, V. V., Hodges, D. H., Cesnik, C. E. S., Popescu, B., 2001, "Assessment of Beam Modeling Methods of Rotor Blade Applications," *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 33, pp. 1099~1112.
- (5) Jung, S. N., Nagaraj, V. T., Chopra, I., 2002, "Refined Structural Model for Thin- and Thick-Walled Composite Rotor Blades," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 1, pp. 105~116.
- (6) Kim, J.-S., Cho, M. and Smith, E. C., 2008, "An Asymptotic Analysis of Composite Beams with

- Kinematically Corrected End Effects,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 45, pp. 1954~1977.
- (7) Kim, J.-S. and Wang, K. W., 2010, “Vibration Analysis of Composite Beams with End Effects via the Formal Asymptotic Method,” *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 132, No. 4, pp. 041003:1-8.
- (8) Jeong, J., Kim, J.-S., Kang, Y. J. and Cho, M., 2012, “A Cross-sectional Analysis of Composite Beams Based on Asymptotic Framework,” *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 1, pp. 161~172.
- (9) Kim, J.-S., 2012, “Application of Saint-Venant’s Principle to Anisotropic Beams,” *Trans. Korean Soc. Mech. Eng. A*, Vol. 36, No. 4, pp. 451~455.
- (10) Yu, W., Hodges, D. H. and Ho, J. C., 2012, “Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis - An Updated Version,” *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 59, pp. 40~64.