

## 강건최적설계에서 목적함수의 강건성 지수에 대한 연구

이세정\* · 정성범\* · 박경진\*†

\* 한양대학교 기계공학과

## Investigation of the Robustness Index of the Objective Function in Robust Optimization

Se-Jung Lee\*, Seong-Beom Jeong\* and Gyung-Jin Park\*†

\* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received February 24, 2012 ; Revised January 18, 2013 ; Accepted January 28, 2013)

**Key Words:** Robust Optimization(강건최적설계), Robustness Index(강건성 지수), Robustness of the Objective Function(목적함수의 강건성)

**초록:** 강건최적설계의 개념은 다구찌 법에 근간을 두고 있다. 특히, 목적함수의 강건성 지수들은 설계 변수나 파라미터의 변동에 둔감하고 보수적인 설계를 추구한다. 그 목적을 달성하기 위해 다양한 강건성 지수들이 소개되고 있다. 소개된 다양한 지수와 방법은 나름의 목적과 의미를 지니고 있다. 하지만, 다구찌 법에서 의미하는 강건설계의 의미를 목적함수의 강건성 지수로 반영하여 최적설계 문제로 확장하는 것에는 한계점이 발생할 수 있다. 본 논문의 목적은 기존 강건성 지수 연구들의 특징과 한계점을 파악하고 강건최적설계 연구의 고찰을 수행하는데 있다. 목적함수의 강건성 지수들의 특징을 확인하기 위해 결정론적 최적해와 강건해의 구분이 명확한 수학적 예제를 사용하여 평가를 수행하고 분석하였다. 더불어, 고찰을 토대로 강건최적설계에서의 강건성에 대한 새로운 관점과 상한함수를 사용한 목적함수의 강건성 지수를 제시하였다.

**Abstract:** The concept of robust optimization is based on Taguchi's method. Especially, robustness indices of objective function pursue an insensitive and conservative design when there are variations on design variables and parameters. To accomplish the purpose, various robustness indices on the objective function have been developed. However, it can be caused limitations to develop the robustness index, because there is difference between the Taguchi's method and robust optimization. In this paper, an investigation is performed to identify the characteristics and the drawbacks of the previous studies. To achieve the purpose, evaluations are conducted by using the examples which have both a deterministic optimum and a robust optimum. Moreover, a new viewpoint as well as a robustness index using a supremum value of the objective function is proposed based on the investigation.

## 1. 서 론

많은 공학문제에서는 제품 성능이나 설계 목적을 달성하는데 영향을 미치는 다양한 변동의 원인이 존재한다. 다구찌(Taguchi)는 이러한 문제를 해결하기 위해 강건설계의 개념을 소개하였다. 다구찌는 강건설계를 변동의 원인을 제거하지 않고, 그 영향을 최소화하여 제품의 품질을 향상시키는 것이라 정의하였다.<sup>(1)</sup>

다구찌 법에서는 강건설계를 수행하기 위해 Fig. 1 과 같은 과정을 수행한다. 먼저, 품질특성함수  $f$  와 설계변수  $b$  간의 관계를 이용하여 품질특성함수의 분산이 줄어드는( $b_0 \rightarrow b_1$ ) 방향으로 이동(1 단계)시킨다. 그 다음, 평균을 목표치로 이동시키는 조정변수(adjustment parameter)를 이용하여 품질특성함수의 평균이 목표치에 도달(2 단계)하도록 한다. 이러한 과정을 통해 품질특성함수의 변동을 줄이고 동시에 목표 성능을 달성하여 제품의 품질을 향상시킨다.<sup>(1)</sup>

이와 같은 강건설계의 개념은 최적설계 분야에도 응용되었다. 강건최적설계는 다구찌 법이 의미

† Corresponding Author, [gjpark@hanyang.ac.kr](mailto:gjpark@hanyang.ac.kr)

© 2013 The Korean Society of Mechanical Engineers

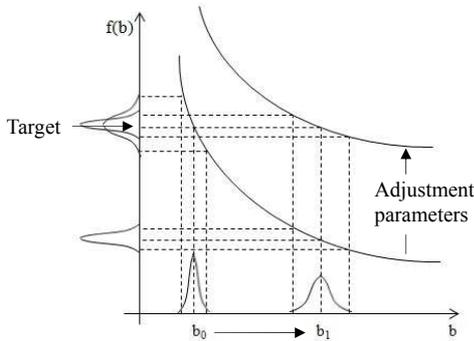


Fig. 1 Two steps of Taguchi method

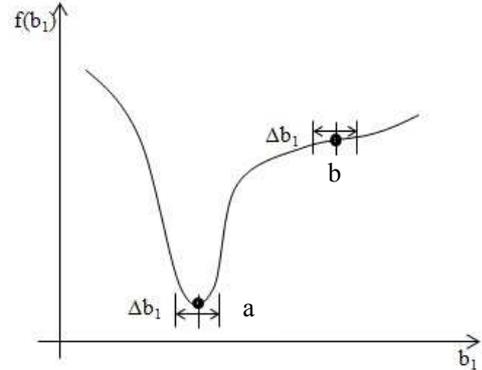


Fig. 2 Robustness of the objective function

하는 강건설계를 수학적으로 잘 발달된 최적설계 기법에 이용하여 해결하려는 분야이다.<sup>(2)</sup> 최적설계를 수행하는 실제 구조물이나 기계시스템의 문제에도 불확실성이 존재하는데, 이를 최적화 과정에서 고려하여 좋은 해를 찾고자 하는 목적을 지닌다. 일반적으로 강건최적설계에서 발생하는 불확실성의 원인은 설계변수나 파라미터에 생성된 불확실성에 의해 발생하게 되며, 목적함수와 제한조건에도 영향을 미친다. 이러한 강건최적설계는 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Find } & \mathbf{b} \in R^n & (1a) \\ \text{to minimize } & F(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) & (1b) \\ \text{subject to } & G_j(\mathbf{b} + \mathbf{z}^b, \mathbf{p} + \mathbf{z}^p) \leq 0, \quad j=1, \dots, r & (1c) \\ & \mathbf{b}_L \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{b}_U & (1d) \end{aligned}$$

여기서  $\mathbf{b}$  는  $n$  개의 요소로 이루어진 설계변수 벡터이며,  $\mathbf{z}^b$  와  $\mathbf{z}^p$  는 각각 설계변수와 설계파라미터에 발생하는 공차, 잡음 혹은 외란을 나타낸다.  $F$  와  $G$  는 평균과 변동으로 정의되는 목적함수와 제한조건을 의미한다.  $\mathbf{b}_L$  과  $\mathbf{b}_U$  는 각각 설계변수의 상한, 하한벡터이며,  $r$  은 제한조건의 수이다.

특히, 최적설계에서 주어진 목적함수를 최소화하거나 최대화한다는 점은 공학설계에서 공학적 특성을 극대화 하려는 면과 일치<sup>(2)</sup>하며, 다구찌 법에서 망소/망목/망대 특성을 평가하기 위한 품질 특성함수 유사한 의미를 지닌다. 따라서, 설계변수나 파라미터의 불확실성에 의한 목적함수 식 (1b)를 해결하기 위한 강건성 지수들은 다구찌 법에서 소개하는 강건성과 유사한 관점을 따르고 있다.

Fig. 2 는 목적함수의 강건성 지수들이 추구하는 바를 보여준다.<sup>(3-5)</sup> Fig. 2 에서 a 점은 결정론적 최적해(deterministic optimum)로써, 설계변수나 파라미

터의 변동에 목적함수가 급격히 변하는 부분이다. 때문에 목적함수의 강건성 지수들에 대한 연구들은 목적함수가 설계변수의 변동에도 둔감한 설계 (insensitive design)를 얻기 위한  $\mathbf{b}$  점을 추구한다. 이는 다구찌 법에서의 강건설계를 위한 1 단계 과정과 유사하다.

하지만, 목적함수의 변동에 영향을 미치지 않고 평균값을 원하는 목표 값으로 이동시키는 조정변수의 사용에는 차이점이 있다. 일반적으로 최적설계문제에서 목적함수는 설계변수들로 구성되는데, 이는 설계변수에 변동이 있을 경우 목적함수의 변동에도 영향이 있음을 의미한다. 때문에 최적설계문제에서 조정변수를 찾는 것은 어렵다.<sup>(6)</sup> 이러한 특성을 고려하여 강건최적설계 연구 분야에서는 1 단계의 목적만을 달성하거나 1, 2 단계의 특성을 동시에 고려하는 목적함수의 강건성 지수들이 소개되고 있다.

최적설계의 특성을 고려하여 강건성을 추구하는 목적함수의 강건성 지수들은 나름의 우수성과 효율성을 지닌다. 하지만, 다구찌 법에서 의미하는 강건설계의 과정과 의미를 목적함수의 강건성 지수로 반영하여 최적설계 문제로 확장하는 것에는 한계점이 발생할 수 있다. 본 연구에서는 기존에 소개된 목적함수의 강건성 지수에 대한 연구들의 고찰을 수행하고 한계점을 제시하는데 있다. 더불어 향후 강건최적설계에서 고려 할 수 있는 새로운 관점을 소개하는데 있다.

목적함수의 강건성 지수들에 대한 고찰은 기존에 소개된 다양한 강건성 지수들이 지닌 강건성의 의미 별로 분류하는 것에서 시작한다. 분류된 내용을 바탕으로 평가를 수행한다. 평가를 위해 결정론적 최적해와 강건해가 명확히 구분되는 수학예제를 정의한다. 평가 결과를 바탕으로 고찰을

수행하여 특징과 한계점을 확인한다. 강건최적설계에서 고려할 수 있는 새로운 관점 제시는 목적함수의 강건성 지수가 공통적으로 추구하는 ‘설계변수나 파라미터의 변동에 둔감한 해’에 대한 고찰에서부터 시작한다. 고찰을 바탕으로 목적함수에 대한 상한함수(supremum function)의 의미를 지니는 새로운 목적함수의 강건성 지수를 소개하고, 예제 문제를 통해 그 효용성을 검증한다.

## 2. 목적함수의 강건성 지수에 대한 연구 동향

기존 연구들에서 소개된 목적함수의 강건성 지수들을 정리하면 Table 1 과 같다. 여기서  $f$  는 목적함수이며,  $\mathbf{b}$  는  $n$  개의 요소로 이루어진 설계변수 벡터이다.  $\mu_f$  와  $\sigma_f$  는 각각 목적함수의 평균과 표준편차를 나타낸다. 본 논문에서는 Table 1 에 나열된 각 강건성 지수에 A 부터 H 까지의 명칭을 부여하고, 이를 이용하여 분석 내용을 서술한다. Table 1 에 명시된 강건성 지수는 강건설계를 수행하려는 목적에 따라 변동만을 고려하는 강건성 지수와 성능과 변동을 모두 고려하는 강건성 지수로 분류할 수 있다.

### 2.1 변동에 둔감한 성능만을 추구하는 강건성 지수

Table 1 에서 변동에 둔감한 성능만을 추구하는 목적함수의 강건성 지수는 A, B, C, D 에 해당한다. 강건성 지수들 모두 Fig. 2 에서 b 점을 얻고자 하는 공통적인 의미를 지니며, 다구찌 법의 강건설계 과정에서는 1 단계를 달성하는 것과 유사한 의미를 갖는다.

Belegundu 등<sup>(7)</sup>은 설계변수에 대한 목적함수의 민감도를 강건성 지수로 고려하는 방법(A)을 제안하였다. 최적설계에서 민감도는 목적함수를 최소화 혹은 최대화 하기 위한 설계변수의 방향지표가 된다. 최적설계의 특성을 이용하여 설계변수에 대해 목적함수가 민감한 경향을 지니는 부분을 회피하고자 하는 것이 강건성 지수(A)가 지닌 의미이다. 설계변수들에 대한 목적함수의 민감도에 가중치( $w_i$ )를 다르게 부여하는 특징이 있다.

Han 등<sup>(8)</sup>도 목적함수의 민감도를 이용하였다. 특징은 최악조건(worst case)의 개념을 반영하여, 설계변수들에 대한 목적함수의 민감도가 가장 큰 부분을 줄이고자 하는 강건성 지수 (B)이다.

강건성 지수 A 와 B 는 목적함수의 민감도를 직

Table 1 Robustness index

Type	Design formulation	Type	Design formulation
A	$\min \sum_{i=1}^n w_i \left  \frac{df(\mathbf{b})}{db_i} \right $	E	$\min f(\mathbf{b}) + \alpha \cdot \text{var}[f(\mathbf{b})]$
B	$\min \max \left  \frac{df(\mathbf{b})}{db} \right $	F	$\min w \cdot \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + (1-w) \cdot \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*}$
C	$\min \sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial b_i} \right)^2 \sigma_{b_i}^2$	G	$\max \mu_f - \sigma_f$
D	$\min  f_U - f_L $	H	$\min \tau$ sub to $\text{Pr}[f(\mathbf{b}) \leq \tau] \geq P_t$

접 이용하기 때문에 다구찌 법에서 일반적인 강건성 지표로 사용되는 평균과 분산에 대한 별도의 계산이 필요치 않다. 그러나, 최적화 과정에서 목적함수의 2 차 민감도 값이 요구된다.

Ramakrishnan 등<sup>(9)</sup>은 목적함수의 분산을 줄이고자 하는 강건성 지수(C)를 제시하였다. 이 지수는 테일러 급수의 근사식으로부터 정의되는 분산식을 이용한 것이 특징이며, 설계자가 설계변수의 분산( $\sigma_{b_i}^2$ )을 알고 있을 경우 이용하기 적합하다. 목적함수의 1 차 미분 값을 가지는 형태이며, 최적화 과정에서 2 차 미분을 요구한다.

Parkinson<sup>(10,11)</sup>는 목적함수의 최대값( $f_U$ )과 최소값( $f_L$ )의 편차를 줄이는 강건성 지수(D)를 제안하였다. 실험계획법을 사용하여 설계변수의 공차에 대한 목적함수의 최대 값과 최소 값을 계산한다. 편차의 최소화는 목적 함수의 변동이 적은 구간을 의미하여, 이는 강건성 지수 A, B, C 와 추구하는 바가 동일하다.

### 2.2 성능과 변동을 모두 고려하는 강건성 지수

강건성지수가 목적함수의 성능과 변동을 동시에 고려하는 경우는 Table 1 의 강건성 지수 E, F, G, H 에 해당한다. 이 지수들은 다중목적함수 형태로 구성되어 있다. 최적설계에서는 설계 목적이 여러 개인 문제를 해결하기 위해 다중목적함수를 사용하여 하나의 함수를 새롭게 정의하는데, 이 같은 특성을 반영하여 만든 강건성 지수이다. 다구찌 법에서 강건설계를 수행하는 1, 2 단계 과정을 동시에 달성하려는 목적을 지닌 강건성 지수들이라 할 수 있다.

강건성 지수 E 는 Sundaresan 등,<sup>(4)</sup> Su 등<sup>(12)</sup>에 의

해 소개되었다. 목적함수의 평균과 분산으로 구성 되어 있으며, 설계자가 분산의 범위 ( $\alpha$ )를 정의할 수 있는 것이 특징이다. 목적함수의 분산을 구하기 위해 테일러 급수를 이용한 근사식과 실험계획법을 사용한다.

Doltsinis 등,<sup>(13)</sup> Lee 등<sup>(14)</sup>은 목적함수의 평균과 표준편차의 상대적 비율을 고려할 수 있는 다중목적함수 형태의 강건성 지수(F)를 제시하였다. 특히, 상대적으로 목적함수의 평균과 표준편차의 비율이 다를 경우, F의 경우 정규화(normalize)를 통해 그 크기를 동등하게 고려할 수 있도록 개선된 방법이다. 정규화를 위해  $\mu_f^*$ 와  $\sigma_f^*$ 를 정의하는 방법에는 초기 설계 변수에 대응하는 평균과 분산을 사용하거나, 각각 평균 및 표준편차만을 목적함수로 취하여 최적설계로부터 구한 목적함수 값을 이용한다.

Harzheim 등<sup>(15)</sup>가 제시한 강건성 지수(G) 또한 목적함수의 평균과 표준편차로 구성된 다중목적함수 형태이다. 단, 다구찌법의 망대특성과 같이 목적함수의 평균 값이 큰 해를 얻어야 하는 설계문제에 적합하다.

Jung 등<sup>(16)</sup>은 Table 1의 강건성 지수(H)와 파라미터 ( $\tau$ )를 도입하여 강건성 지수로 정의하는 방법을 제안하였다. 목적함수로 정의된 파라미터 ( $\tau$ )는 제한조건에서 목적함수의 상한 값에 해당하며, 설계자가 의도한 목적함수의 목표 확률 ( $P_i$ )을 만족하는 해를 찾으려 한다. 목적함수에 대한 평균과 분산이 모두 줄어드는 해를 찾는 것이 목적이다.

Table 1에서 소개한 목적함수의 강건성 지수들

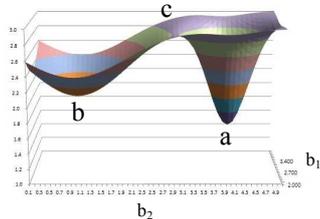


Fig. 3 Objective function of example 1

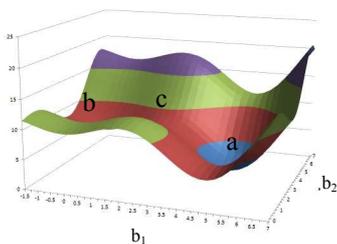


Fig. 4 Objective function of example 2

이외에 다른 형태의 지수가 존재할 수 있다. 하지만, 강건최적설계 추구하는 목적이 다구찌 법에서 강건설계를 위해 수행하는 1, 2 단계를 표현하는 2 가지 분류에서 크게 벗어나지 않는다. 그러므로, 본 논문에서는 Table 1에 소개한 목적함수의 강건성 지수들을 토대로 강건최적설계의 연구 고찰을 수행한다.

### 3. 수학예제로의 적용 및 고찰

앞서 기존 방법들의 분류 내용을 토대로 평가를 수행한다. 평가를 위해 정의한 수학적 예제의 정식화는 다음과 같다.

#### 수학예제 1

$$\min f(\mathbf{b}) = 3 - \left( e^{-\frac{(b_1-3)^2+(b_2-1)^2}{2}} + 1.4e^{-\frac{(b_1-3)^2+(b_2-4)^2}{0.32}} \right) \quad (2a)$$

$$\text{sub to } 2.5 \leq b_1 \leq 3.5 \quad (2b)$$

$$0.0 \leq b_2 \leq 4.5 \quad (2c)$$

#### 수학예제 2

$$\min f(\mathbf{b}) = b_1 \sin(b_1) + b_2 \cos(b_2) \quad (3a)$$

$$\text{sub to } g_1(\mathbf{b}) = 358.02b_1 + 0.753b_2 - 1334.715 \leq 0.0 \quad (3b)$$

$$1.5 \leq b_1 \leq 7.0 \quad (3c)$$

$$0.0 \leq b_2 \leq 7.0 \quad (3d)$$

Fig. 3와 Fig. 4는 각 예제의 목적함수의 경향을 보여준다. 목적함수 모두 결정론적 최적해(deterministic optimum) a 점과 강건 최적해(robust optimum) b 점이 명확히 구분되는 특성을 지닌다. 정의한 수학적 예제를 바탕으로 평가를 수행하였다. 강건최적설계를 위하여 민감도 기반 순차적 근사 최적화 알고리즘 (Gradient-based Sequential Two-Point Diagonal Quadratic Approximate Optimization: STDQAO)을 사용하였다.<sup>(17)</sup>

#### 3.1 변동에 둔감한 성능만을 추구하는 강건성 지수 고찰

먼저, 부등제한조건을 제외한 식 (2)와 식 (3)을 이용하여 변동에 둔감한 성능만을 추구하는 목적함수의 강건성 지수(A, B, C, D)들에 대한 평가를 수행하였다. 설계변수의 분산 ( $\sigma_{b_i}^2$ )은 0.01로 정의하였다.

평가 결과는 Fig. 5와 같다. 변동에 둔감한 성능만을 추구하는 강건성 지수들 모두 초기 값의 위치에서 가장 근접하고 목적함수의 변동이 0인 최적 점으로 수렴하였다. 수렴된 해의 위치 c 점이나 f 점은 결정론적 최적해나 강건해로도 의미가 없는 부분 같이 보일 수 있다. 하지만, 실제 구조나

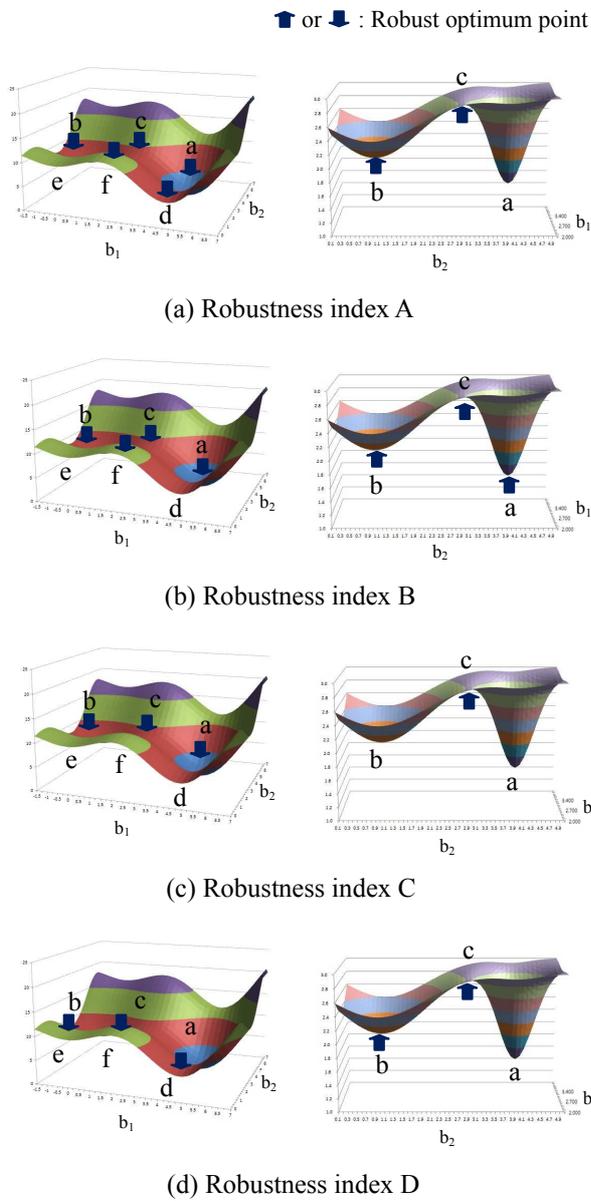


Fig. 5 Results on robustness indices (A, B, C, D)

기계시스템 문제에서는 설계 제한조건이나 설계변수의 범위로 인해 비선형성을 가지는 구간 전체가 아닌 일부 구간만 고려한다. 따라서, 강건성 지수가 의도한 대로 초기 설계보다 목적함수의 변동이 줄었다면, c 점이나 f 점으로 수렴한 경우도 설계변수의 변동에 둔감한 해를 찾았다고 판단할 수 있다.

하지만, 목적함수의 민감도를 이용하여 변동이 둔감한 성능만을 추구할 때, 발생할 수 있는 문제를 고찰해볼 수 있다. 예를 들어, 목적함수가 Fig. 6 과 같은 특성을 지닌 문제<sup>(4)</sup>에서 강건해는 b 점이다. 하지만, 목적함수의 강건성 지수 A, B, C 의

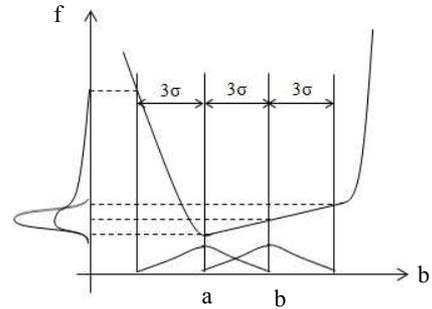


Fig. 6 Concept of robust optimum

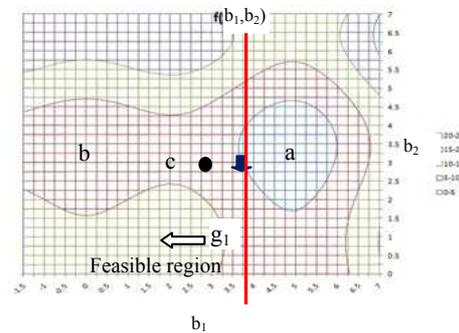


Fig. 7 Results of the robustness index B with inequality constraints

경우 목적함수의 변동을 최소화하기 위해 민감도가 0 인 부분으로 수렴한다. 따라서 b 점이 아닌 a 점으로 수렴할 수 있음을 예측할 수 있다. 이와 같은 현상은 목적함수의 민감도를 이용할 때 강건성 지수를 적용하는 문제에 따라 ‘변동에 둔감한 해’를 달성하지 못할 수 있음을 의미한다.

Fig. 7 은 목적함수의 강건성 지수(C)와 제한조건을 같이 고려하여 강건최적설계를 수행한 결과이다. 수렴된 강건 해의 위치는 설계변수의 변동을 고려할 때 목적함수의 변동 폭이 큰 부분임을 볼 수 있다. 강건성 지수 C 뿐만 아니라 A, B, D 의 강건성 지수들에서도 유사한 결과를 확인하였다. 결과를 통해 변동에 둔감한 성능만을 추구하는 강건성 지수를 사용할 경우, 목적함수의 특성과 제한조건의 정의에 따라 초기에 의도한 강건성의 의미와는 다른 해를 제시할 수 있음을 보여준다.

### 3.2 성능과 변동을 모두 고려하는 강건성 지수 고찰

목적함수의 평균과 분산을 동시에 고려할 수 있는 강건성 지수는 Table 1의 E, F, G, H 에 해당한다. 설계변수의 분산( $\sigma_b^2$ )은 0.01로 정의하였다. 목적함수의 평균과 분산의 계산은 고유벡터 차원감소법(eigenvector dimension reduction; EDR)<sup>(18,19)</sup>을 이용

하였다.

Table 2 는 F 의 평가 결과를 보여준다. 강건성 지수 F 에서 정규화를 위한  $\mu_f^*$  와  $\sigma_f^*$  는 성능함수의 평균과 분산을 각각 목적함수로 두고 최적설계를 수행한 결과를 반영하였다. 가중치(w)는 0.25 간격으로 정의하여 다중목적함수 형태의 강건성 지수들을 평가하였다.

그 결과, 가중치가 1 인 경우를 제외하고 평균은 모두 증가하고 표준편차는 모두 줄어든 경향을 보였다. 결과를 통해 다중목적함수 형태의 강건성 지수가 함수  $f$  의 평균과 표준편차에 대한 비율을 고려하여 강건 해를 얻고자 하는 의도와 부합하지 않음을 보여준다.

가중치(w)가 0.75 일 경우를 예로 들면, 강건성 지수 F 는 식 (4)과 같다. 목적함수의 평균을 줄이고자 하는 목적이 표준편차에 비해 상대적으로 더 크다.

$$F(\mathbf{x}) = 0.75 \frac{\mu_f}{\mu_f^*} + 0.25 \frac{\sigma_f}{\sigma_f^*} \quad (4)$$

정규화를 위해 평균과 분산을 각각 목적함수로 정의하여 최적화를 수행한 결과 값은  $\mu_f^* = 6.71163$  이고  $\sigma_f^* = 0.00078$  이다. 정규화에도 불구하고 강건성 지수 F 에 대한 강건최적설계의 결과는 표준편차의 영향이 상대적으로 더 큰 것을 확인할 수 있다. 때문에 목적함수의 평균이 작은 방향으로 수렴해야 함에도 불구하고, 증가하는 방향으로 수렴하는 결과를 보이고 있다.

Fig. 8 은 수학 예제 2 의 정식화를 사용하여 강건성 지수 E 와 G 의 강건최적설계를 수행한 결과이다. 평가를 위해 정의되는 파라미터  $\alpha$  는 1, 가중치(w)는 0.25, 분산( $\sigma_b^2$ )은 0.01 로 정의하였다.

Fig. 8 에 나타난 것과 같이 매 반복 횟수(iteration)

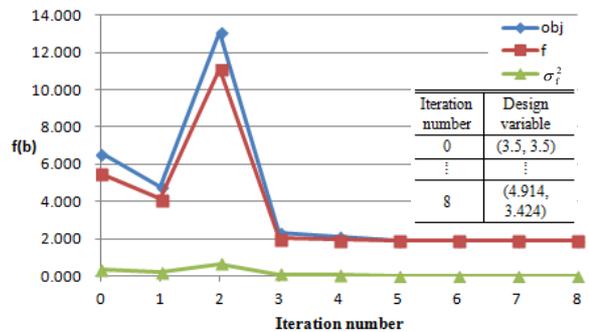
Table 2 Results of F according to the weighting factor

Weighting factor (w)	Initial value				Robust optimum			
	b	OBJ fn.	$\mu_f$	$\sigma_f$	b	OBJ fn.	$\mu_f$	$\sigma_f$
0	(1.5, 3.5)	110.338	8.219	0.114	(0.000, 0.860)	0.398	10.561	0.000
0.25	(1.5, 3.5)	110.338	8.219	0.114	(2.031, 0.860)	1.163	12.381	0.001
0.5	(1.5, 3.5)	73.967	8.219	0.114	(2.031, 0.861)	1.378	12.381	0.001
0.75	(1.5, 3.5)	37.596	8.219	0.114	(2.034, 0.860)	1.868	12.381	0.002
1	(1.5, 3.5)	1.225	8.219	0.114	(0.004, 3.425)	1.000	6.712	0.001

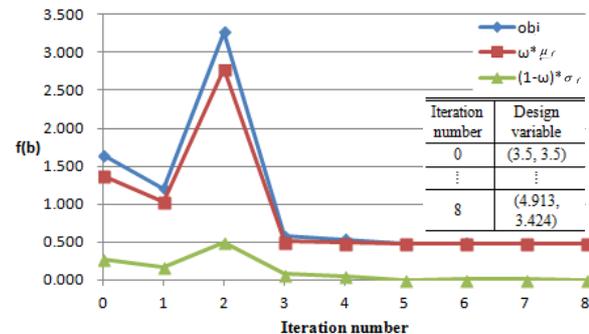
마다 평균과 분산의 크기를 살펴보면, 평균이 분산(혹은 표준편차)의 크기에 비해 상대적으로 매우 큰 것을 확인할 수 있다. 더불어 최종적으로 수렴된 해도 Fig. 5 의 a 점으로 목적함수의 평균만을 최소화하는 결과와 동일하다. 이러한 결과는 강건성 지수 E, G 역시 설계자가 의도한 가중치의 정의와 무관하게 목적함수의 평균과 분산 중 상대적으로 영향도가 큰 위치로 수렴되는 해를 제시할 수 있음을 보여준다.

목적함수에 대한 강건성을 고려하기 위해 확률제한조건을 사용한 강건성 지수는 Table 1의 H 이다. 목적함수에 대한 파라미터 ( $\tau$ ) 는 성능함수 값의 상한 값을 의미하는 지수이며 일반적으로 초기 설계변수 값의 평균에 해당하는 값보다 크게 정의한다. 본 논문에서는 파라미터 ( $\tau$ ) 를 3으로 정의하였다. 목적함수  $f$  와 관련된 확률제한조건에서 목표확률( $P_i$ )는 95%로 정의하여 강건최적설계를 수행하였다.

Table 3 은 그 결과를 보여준다. 초기 값에 비해 강건 해로 수렴된 점에서 표준편차가 늘어난 것을 확인할 수 있다. 그 원인은 강건성 지수 H 가 목적함수와 관련된 확률제한조건을 만족하는 2 가지 경우를 고찰해 볼 수 있다. 먼저, Fig. 9(a)와 같이



(a) Robustness index E



(b) Robustness index G

Fig. 8 Results of the robust optimization

목적함수 파라미터 ( $\tau$ ) 를 통해 평균과의 편차를 줄이면서 표준편차가 줄어드는 경우이다. 하지만, Fig. 9(b)와 같이 표준편차가 작아지지 않더라도 평균 값이 작아져서 목적함수의 파라미터를 줄일 수도 있다. 두 가지 경향은 목적함수의 특성에 따라 다르게 나타날 수 있다. 이 같은 결과는 강건성 지수 H가 초기에 의도한 강건설계의 목적과 다른 경우임을 보여준다.

다중목적함수로 구성된 강건성 지수들은 다구찌 법에서 고려하는 평균과 분산을 최적설계의 기법으로 고려하기 위한 방법들이다. 특히, 다중목적함수가 지니는 특성을 이용하여 평균과 표준편차를 설계자가 원하는 비율로 정의하고, 그 의미에 맞는 강건설계를 추구한다. 하지만, 평가를 통해 그 의도가 반영되지 못하는 해를 제시할 수 있음을 확인하였다. 따라서, 다중목적함수로 구성된 강건 최적설계문제에 활용하기 위해서는 제시한 문제점을 개선하기 위한 연구가 필요함을 보여준다.

#### 4. 향후 강건최적설계를 위한 목적함수의 강건성 지수에 대한 연구방향

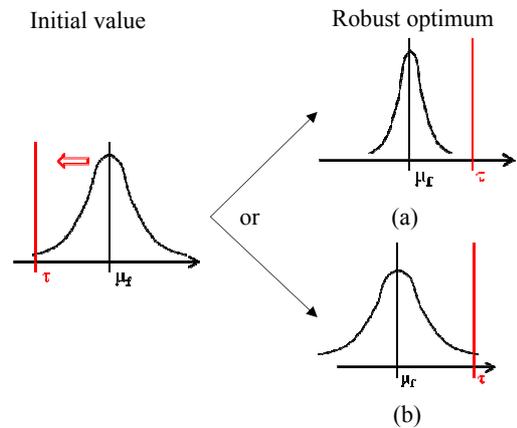
앞서 강건최적설계에서 목적함수의 강건성 지수들이 추구한 강건성의 의미 별 분류를 토대로 평가와 분석을 수행하여 특성을 확인하였다. 본 장에서는 선행 연구들의 고찰을 바탕으로 목적함수의 강건성 지수에 대한 연구에서 고려할 수 있는 새로운 관점을 소개하기로 한다.

앞서, 강건최적설계에서 목적함수의 강건성 지수들이 추구해온 관점을 소개하였다. 소개된 강건성 지수들 모두 다구찌가 추구한 강건설계의 개념을 바탕으로 강건최적설계 문제에 맞게 정의되었다. 특히, Fig. 2와 같이 기존의 목적함수의 강건성 지수들은 ‘설계변수나 파라미터의 변동에 둔감한 해 (insensitive design)’의 관점을 공통적으로 추구하고 있었다.

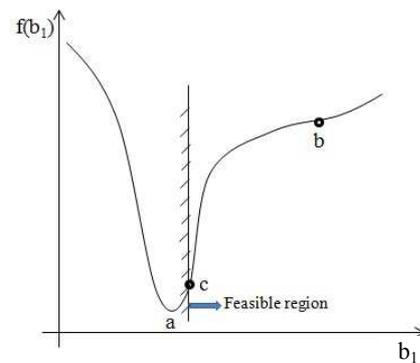
하지만, Fig. 10과 같이 결정론적 최적 해의 위치 a와 둔감한 해의 위치 b에서 목적함수 값의 차이가 큰 설계 문제가 있다고 가정하자. 목적함수  $f$ 의 최소화 문제에서, c점은 목적함수  $f$ 의 최소화를 달성하는 해이지만 동시에 설계변수의 변동에 목적함수의 변화폭이 굉장히 큰 부분이다. 반대로 b점은 다구찌 법이나 강건최적설계에서 일반적으로 강건해라 여겨지는 설계변수의 변동에 대해 목적함수의 변동이 작은 둔감한 해이다. 하지만, 목적함수의 최소화와는 거리가 멀다. 이 같

**Table 3** Results of the robustness index H

	Initial value	Robust optimum
$(b_1, b_2)$	(3, 3.1)	(2.998, 3.995)
$\mu_f$	2.778	1.589
$\sigma_f$ (MCS)	0.049	0.058
$\tau$	3.0	1.7



**Fig. 9** Cause of the result on the robustness index H



**Fig. 10** A design example

은 문제에서 변동에 둔감한 해(b 점)가 반드시 유용한 설계라 단정지을 수 없다.

앞서, Fig. 1에서 소개한 다구찌 법에서는 분산을 줄이는 과정을 통해 b점을 찾고 조정변수를 통해 목적함수가 설계변수의 변동에 둔감하며 a점과 동일한 성능을 갖는 강건 해를 찾을 수 있다. 즉 품질특성함수의 변동만이 아닌 성능 역시 만족하는 해를 찾는다. 하지만, 강건최적설계 분야에서 소개된 강건성 지수들은 다구찌 법과 같은 설계과정을 수행할 수 없다. 따라서, 강건최적설계에서 목적함수가 변동에 둔감한 설계(b)를 얻었다고 하

여 유용한 설계라 단정하기 어렵다. 이는 목적함수의 강건성 지수가 추구해야 하는 새로운 강건성의 관점이 필요함을 보여준다.

Fig. 10 과 같은 특성을 보이는 문제에서 ‘설계변수의 변동에 목적함수  $f$  가 민감한 부분으로 수렴해도, 둔감한 해보다 성능이 훨씬 좋다면 더 유용한 해일 수 있다’라는 새로운 관점은 목적함수의 강건성 지수 개발에도 영향을 미친다. 그 일환으로 새로운 목적함수의 강건성 지수를 소개한다.

새로운 강건성 지수는 목적함수의 상한함수(Supremum function, 이하  $\text{Sup } f(\mathbf{b})$ )를 이용한 기법이다.  $\text{Sup } f(\mathbf{b})$  는 설계변수  $\mathbf{b}$  의 공차 범위 ( $\epsilon$ ) 안에서 가장 좋지 않은 목적함수의 값을 의미한다. 상한함수의 개념은 선형 프로그래밍(Linear programming)에서 강건성을 고려하기 위해 사용하는 방법이다.<sup>(20, 21)</sup> 강건성을 평가하기 위해 일반적으로 사용되는 지표인 평균과 분산을 이용하지 않고 공차 범위 ( $\epsilon$ ) 를 사용 것이 특징이다. 이러한 상한함수를 이용한 새로운 강건최적설계의 정식화는 다음과 같이 정의한다.

$$\min_{\mathbf{b}-\epsilon \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{b}+\epsilon} \text{Sup } f(\mathbf{b}) \quad (5)$$

여기서 설계변수의 공차를 고려한 목적함수  $f$  는 1 차 식까지 전개되는 테일러 급수 근사식을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Sup } f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b} + \epsilon) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial b_i} \cdot \epsilon_i \quad (6)$$

또한, 설계변수의 변동에 대한 범위가 존재할 경우 최악조건으로 표현할 수 있는데,<sup>(4,9,22)</sup> 이를 적용한 목적함수에 대한 상한함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(\mathbf{b} + \epsilon) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial b_i} \cdot \epsilon_i \right| \quad (7)$$

$$f(\mathbf{b} + \epsilon) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^n \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial b_i} \cdot \epsilon_i \right)^2} \quad (8)$$

따라서, 식 (5)의 정식화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\min \text{Sup } f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b} + \epsilon) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^n \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial b_i} \cdot \epsilon_i \right)^2} \quad (9)$$

제시한 목적함수의 강건성 지수에 대한 유효성을 검증하기 위해 수학예제를 정의하였다. 정의된

각 문제의 정식화는 다음과 같다.

**수학예제 3**

$$\min f(\mathbf{b}) = b^3 + 20 \quad (10a)$$

$$\text{sub to } g(\mathbf{b}) = -b - 4 \leq 0 \quad (10b)$$

$$-5 \leq b \leq 2 \quad (10c)$$

**수학예제 4**

$$\min f(\mathbf{b}) = 4b_1^2 + 3b_3^2 - 10b_1b_2 + b_2^2 \quad (11a)$$

$$\text{sub to } -2.25 \leq b_1, b_2 \leq 2.25 \quad (11b)$$

**수학예제 5**

$$\min f(\mathbf{b}) = (b_1 - 10)^2 + 5(b_2 - 12)^2 + b_3^4 + (b_4 - 11)^2 + 10b_5^6 + 7b_6^2 + b_7^2 - 4b_6b_7 - 10b_6 - 8b_7 \quad (12a)$$

$$\text{sub to } g_1(\mathbf{b}) = 2b_1^2 + 3b_2^4 + b_3 + 4b_4^2 + 5b_5 - 127 \leq 0 \quad (12b)$$

$$g_2(\mathbf{b}) = 7b_1 + 3b_2 + 10b_3^2 + b_4 - b_5 - 282 \leq 0 \quad (12c)$$

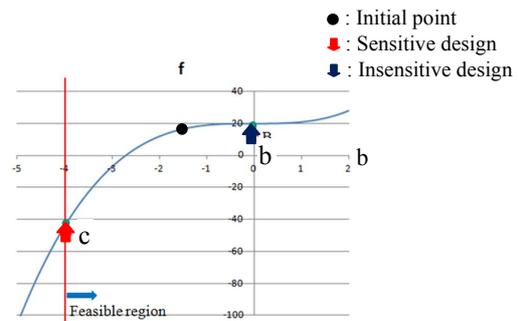
$$g_3(\mathbf{b}) = 23b_1 + b_2^2 + 6b_6^2 - 8b_7 - 196 \leq 0 \quad (12d)$$

$$g_4(\mathbf{b}) = 4b_1^2 + b_2^2 - 3b_1b_2 + 2b_3^2 + 5b_6 - 11b_7 \leq 0 \quad (12e)$$

Fig. 11 은 수학예제 3의 목적함수와 제한조건을 보여준다. 초기 값을  $b=1.5$  로 정의하고 설계변수의 공차 범위 ( $\epsilon$ ) 를 변화시켜가며 강건최적설계를 수행하였다. 그 결과 Table 4 와 같이, 설계변수의 변동 0.75 를 기준으로 목적함수가 민감한 부분(c)와 둔감한 부분(b)으로 나뉘어 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

**Table 4** Results of example 3

	$\epsilon = 0.5$		$\epsilon = 0.75$		$\epsilon = 1.0$	
	Initial value	Robust optimum	Initial value	Robust optimum	Initial value	Robust optimum
$b$	-1.50	-4.00	-1.50	-1.50	-1.50	0.00
$f(b)$	16.63	-44.00	16.63	16.63	16.63	20.00
$g(b)$	-2.50	0.00	-2.50	-2.50	-2.50	-4.00
Sup $f$	20.00	-20.00	21.69	21.69	23.38	20.00



**Fig. 11** Graph of example 3

제한한 강건성 지수는 설계변수의 공차를 고려하여 최적의 해를 찾는다는 점에서 강건성의 의미를 지니고 있으며, 설계변수의 공차범위에 따라 주어진 문제에 알맞은 강건 해를 찾고 있음을 보여준다. 중요한 점은 정의하는 설계변수의 변동에 목적함수의 변화가 민감한 부분으로 수렴해도 강건해라 할 수 있다는 점이다. 또한, 이 설계 점에서의 목적함수는 둔감한 해를 추구한 설계 해에서의 목적함수 값보다 훨씬 더 우수한 해임을 확인할 수 있다.

Fig. 12 는 수학예제 4 에 대한 결과이다. 이 역시 주어진 문제 특성과 정의한 설계변수의 변동 값에 따라, 목적함수  $f$  의 민감한 부분(c)와 둔감한 부분(b)로 수렴여부가 달라지는 것을 확인할 수 있다. 또한, 민감한 부분(c)로 수렴된 해 역시 설계변수의 공차를 고려하여 찾은 강건해이며, 둔감한 부분(b)점보다 목적함수의 값이 작은 우수한 해임을 볼 수 있다.

수학예제 5 를 위해 정의된 설계변수의 공차범위는 Table 5 와 같다. 강건최적설계 수행 후, 수렴된 각 해의 위치에서 몬테카를로 시뮬레이션 (Monte-Carlo Simulation; MCS)를 사용하여 평균, 분산 및 상한 함수 값을 비교하였다. Table 6 에서 초기 설계 점을 비가용영역(Infesible region)에서 시작하였기 때문에 초기 값의 결과에 비해 목적함수의 표준편차 ( $\sigma_f$ ) 만을 고려한 최적설계와 상한함수 (Sup  $f$ ) 를 이용한 최적설계의 결과 모두 평균과 분산이 향상된 해로 수렴한 것을 확인할 수 있다. 하지만, 상한함수를 이용한 강건최적설계 결과는 설계변수의 공차를 고려하였음에도 불구하고, 목적함수의 분산만을 고려한 강건최적설계의 해보다 목적함수 값이 훨씬 우수한 해임을 확인할 수 있다.

이와 같이 설계자가 정의한 설계변수의 변동 범위를 고려하면서 민감한 부분도 강건 해가 될 수 있다는 강건설계의 지표는 기존에 다구찌 법에 근간을 둔 ‘변동에 둔감한 해’를 추구하던 목적함수의 강건성 지수들의 가치관과 확연히 다른 부분이다.

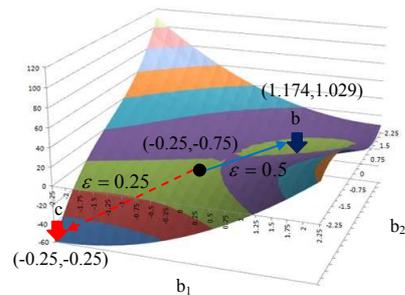
특히, 다구찌 법에서 추구하는 강건성의 관점을 반영하려고 노력한 강건최적설계의 지수 개발이 아니라 강건설계를 적용하는 문제의 특성을 관찰하고 그에 따라 적합한 강건설계의 기준을 제시했다는 점에 의미가 있다. 본 연구에서 소개한 새로운 관점의 제시나 이를 토대로 개발된 강건성 지수의 소개는 강건최적설계의 연구에 새로운 가능

**Table 5** Tolerance of design variable of example 5

Design Variables	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>	b <sub>6</sub>	b <sub>7</sub>
Tol ( $\epsilon$ )	0.03	0.05	0.03	0.05	0.06	0.05	0.03

**Table 6** Results of example 5

		Initial value	Insensitive design ( $\sigma_f$ )	Proposed index (Sup $f$ )
	b <sub>1</sub>	2.00	0.61	2.30
	b <sub>2</sub>	2.00	2.15	1.95
	b <sub>3</sub>	2.00	-0.17	-0.45
	b <sub>4</sub>	2.00	4.01	4.37
	b <sub>5</sub>	2.00	-0.51	-0.58
	b <sub>6</sub>	2.00	1.20	1.08
	b <sub>7</sub>	2.00	1.50	1.57
MCS (50000)	$\mu_f$	1463.55	703.50	680.85
	$\sigma_f$	116.91	5.39	5.45
	Sup. value	1588.55	711.36	688.80
	g <sub>1</sub> (b)	-43.00	0.00	0.00
	g <sub>2</sub> (b)	-222.00	-266.41	-253.11
	g <sub>3</sub> (b)	-138.00	-180.64	-144.92
	g <sub>4</sub> (b)	4.00	-8.25	0.00



**Fig. 12** Results of example 4

성을 보여주는 중요한 예라 할 수 있으며, 앞으로의 강건최적설계에 대한 연구는 이와 같은 점을 고려한 연구가 수행되어야 함을 제시한다.

## 5. 결론

본 연구는 강건최적설계 분야에서 목적함수에 대한 강건성 지수의 연구 동향을 확인하고 고찰하는데 있다. 이를 위해 목적함수의 강건성을 위해 개발된 강건성 지수들을 조사하고 의미 별로 분류

하였다. 또한, 목적함수 모두 결정론적 최적해와 강건 최적해가 명확히 구분되며 비선형성의 특성을 지닌 수학예제를 통해 평가와 분석을 수행하였다.

본 연구에서는 기존 연구들의 공통된 특징과 고찰을 토대로 향후 강건최적설계의 연구에서 고려할 수 있는 새로운 관점을 제시하였다. 설계변수의 공차범위를 고려한 강건최적설계를 수행하되 목적함수  $f$ 가 설계변수의 변동에 민감한 부분으로 수렴하여도 강건해 일 수 있음을 언급하였다. 더불어, 새로운 관점에 부응하는 설계변수의 공차범위에서 목적함수의 상한함수로 정의되는 목적함수의 강건성 지수를 제시하였으며, 예제를 통해 유용한 방법임을 확인하였다.

물론 본 연구에서 소개한 새로운 목적함수의 강건성 지수에 대한 소개는 강건최적설계에서의 새로운 가능성을 보여준 연구의 일부분이다. 따라서, 앞서 언급했던 다른 강건성 지수들과 마찬가지로 극복해야 할 한계점 및 개선의 여지를 갖는다. 예를 들어, 상한함수를 이용한 강건성 지수는 테일러 근사식의 특성을 지닌다. 따라서, 최적화 과정에서 목적함수의 2차 미분 계산이 필요하다. 이러한 한계점은 향후 연구를 통해 보완할 필요가 있다.

## 후 기

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2011-0016364)

## 참고문헌

- (1) Phadke, M. S., 1974, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice-Hall, New Jersey.
- (2) Arora J.S., 2012, *Introduction to Optimum Design*, Elsevier, Korea, pp. 17~56.
- (3) Park, G. J., Lee, T. H., Lee, K. H. and Hwang, K. H., 2006, "Robust Design: An Overview," *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 1, pp. 181~191.
- (4) Sundaresan, S. Ishii, K. D. and Houser, R., 1993, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Engineering Optimization*, Vol. 24, No. 2, pp. 101~117.
- (5) Chen, W., Allen, J. K., Tsui, K. L., and Mistree, F., 1996, "A Procedure for Robust Design: Minimizing Variations Caused by Noise Factors and Control Factors," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 118, No. 4.
- (6) Park, G. J., 2006, 2007, *Analytic Methods for Design Practice*, Springer, London, pp. 393~435.
- (7) Belegundu, A. D. and Zhang, S., 1992, "Robustness of Design Through Minimum Sensitivity," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 114, No. 2, pp. 213~217.
- (8) Han, J. S. and Kwak, B. M., 2004, "Robust Optimization Using a Gradient Index: MEMS Applications," *Structural Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, No. 6, pp. 439~478.
- (9) Ramakrishnan, B. R. and Rao, S. S., 1996, "A General Loss Function Based Optimization Procedure for Robust Design," *Engineering Optimization*, Vol. 25, No. 4, pp. 255~276.
- (10) Parkinson, D. B., 1997, "Robust Design by Variability Optimization," *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 13, No. 2, pp. 97~102.
- (11) Parkinson, D. B., 2000, "The Application of a Robust Design Method to Tolerancing," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, No. 2, pp. 97~102.
- (12) Su, J. and Renaud, J. E., 1997, "Automatic Differentiation in Robust Optimization," *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 6, pp. 1072~1079.
- (13) Doltsinis, I. and Kang, Z., 2004, "Robust Design of Structures Using Optimization Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, No. 23-26, pp. 2221~2237.
- (14) Lee, K. H. and Park, G. J., 2001, "Robust Optimization Considering Tolerance of Design Variables," *Computers & Structures*, Vol. 25, No. 2, pp. 99~116.
- (15) Harzheim, L. and Warnecke, U., 2010, "Robustness Optimization of the Position of an Anti-roll Bar Link to Avoid the Toggling of a Rear Axle Stabilizer," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 42, No. 2, pp. 315~323.
- (16) Jung, D. H. and Lee, B. C., 2002, "Development of a Simple and Efficient Method for Robust Optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, No. 9, pp. 2201~2215.
- (17) PIAAnO (Process Integration, Automation and Optimization) User's Manual, Version 3.4, FRAMAX Inc., 2006.
- (18) Youn, B. D., Xi, Z. and Wang, P., 2008, "Eigenvector Dimension Reduction (EDR) Method for Sensitivity-Free Probability Analysis," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 37, No. 1, pp. 13~28.
- (19) Youn, B. D. and Xi, Z., 2009, "Reliability-Based Robust Design Optimization Using the Eigenvector Dimension Reduction (EDR) Method," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 37, No. 5, pp. 475~492.

- (20) Beyer, H. G. and Sendhoff, B., 2007, "Robust Optimization: A Comprehensive Survey," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, No. 33-34, pp. 3190~3218.
- (21) Aharon, B. T, Laurent, E. G. and Arkadi, N., 2009, *Robust Optimization*, Princeton University Press, New Jersey.
- (22) Parkinson, A., Sorensen, C., and Pourhassan, N., 1993, "A General Approach for Robust Optimal Design," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, No. 1, pp. 74~80.