신뢰성응용연구
제13권, 제1호. pp.1 – 10, 2013

베이지안 신뢰성입증시험 설계와 활용

권영일

청주대학교 산업공학과

Design of Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration Test and Its Application

Kwon, Young Il

Department of Industrial Engineering, Cheongju University

Abstract

A Bayesian zero-failure reliability demonstration test method for products with exponential lifetime distribution is presented. Beta prior distribution for reliability of a product is used to design the Bayesian test plan and selecting a prior distribution using a prior test information is discussed. A test procedure with zero-failure acceptance criterion is developed that guarantees specified reliability of a product with given confidence level. An example is provided to illustrate the use of the developed Bayesian reliability demonstration test method.

Keywords : Bayesian reliability demonstration test(베이지안 신뢰성 입증시험), exponential distribution(지수분포), beta distribution(베타분포), zero-failure acceptance test(무고장시험), consumer's risk(소비자위험), confidence level(신뢰수준)

이 논문은 2012-2014학년도에 청주대학교 산업과학연구소가 지원한 학술연구조성비(특별연구과제)에 의해 연구되었음.
논문접수일 : 2012년 11월 29일　논문수정일 : 2013년 01월 23일　게재확정일 : 2013년 03월 08일

1. 서 론

오늘날 대부분의 상업용 또는 군수용 제품이나 부품의 구매계약 규정에 신뢰성 요구조건이 포함되고 있다. 일반적으로 신뢰성 요구조건을 입증하기 위한 시험(reliability demonstration test)에는 오랜 시간과 많은 비용이 소요된다. 이러한 상황에서 시료수와 시험시간의 단축을 위해 생산자위험(producer's risk)과 소비자위험(consumer's risk) 모두를 만족하는 시험방식 대신 소비자위험만을 보증하고, 무고장 합격기준을 적용하는 시험방식(zero-failure acceptance test)이 선호되고 있다. 고장이 없는 무고장 시험데이터로부터 신뢰도를 평가하거나 보증하기 위한 방법들이 Abernethy(2000), Ke(1999), Yan 과 Herfat(2004), Kwon(2006), 그리고 Yadav et al.(2006) 등에 의해 연구되었으며, Kwon(2011, 2012)은 총 시험비용을 최소화하는 경제적인 무고장 시험방식을 설계하였다.

제품이나 부품의 수명주기가 갈수록 짧아짐에 따라 신뢰성 입증시험에 소요되는 시간도 더욱 단축할 필요성이 증가하고 있다. 만약 시험 대상 제품이나 부품의 신뢰성에 대한 사전정보를 구할 수 있다면, 이 정보를 사전분포(prior distribution)로 활용한 베이지안 시험방법을 개발하여 적용함으로써 시료수나 시험시간을 추가로 단축할 수 있다. Martz 와 Waller(1979)는 수명이 지수분포를 따르는 부품에 대해, 고장률의 사전분포로서 감마분포(gamma distribution)를 사용하여 소비자위험만을 보증하는 무고장 신뢰성 입증시험방식을 개발하였으며, 생산자와 소비자 위험을 모두 보증하는 다양한 베이지안 시험방식들에 대한 연구결과들을 소개하고 있다. 한편 다수의 부품으로 구성된 시스템의 신뢰도 입증을 위한 시험에서 부품의 신뢰성 정보나 시험정보로부터 시스템 신뢰도의 사전정보를 도출하고, 이 사전정보를 시스템 신뢰성 입증시험 설계에 활용하는 베이지안 시험방법들이 Martz et al.(1988), Martz와 Waller(1990), Coolen et al.(2005), Rahrouh(2005), 그리고 Guo et al.(2010) 등에 의해 연구되었다.

본 연구에서는 수명이 지수분포를 따르는 부품에 대한 사전시험정보를 활용하여 부품 신뢰도에 대한 사전분포를 도출하고, 가속시험을 적용한 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험방식을 설계하였다. 부품의 설계수명(design life) 동안의 신뢰도에 대한 사전분포로서 공액사전분포(conjugate prior distribution)인 베타분포(beta distribution)를 사용하였으며, 설계수명(design life)에서의 요구신뢰도를 규정된 신뢰수준(confidence level)으로 보증하는 입증시험방식을 개발하였다. 또한 무고장 입증시험 수행 중 예기치 않은 사고로 시험이 중단되었을 경우, 추가시험의 설계에 개발된 베이지안 시험방식을 활용할 수 있는 방안과 함께 제안된 시험방식을 이용한 신뢰성 입증시험 설계사례를 제시하였다.

2. 사전분포의 선택

본 연구에서는 설계수명 t_0에서의 신뢰도 $r = R(t_0)$의 사전분포로서 베타분포를 사용한다. 모수가 α, β인 베타분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$g(r)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1},\quad 0<r<1. \tag{1}$$

위 사전분포는 대상 부품의 사전시험정보로부터 구할 수 있다. n_0개의 부품을 설계수명 t_0 동안 사용 또는 시험하여 x_0개의 고장이 발생하였다는 사전정보가 있을 때, 이 시험결과와 신뢰수준 CL, 그리고 $R(t_0)$의 $100\times CL$ %신뢰하한 r_L의 관계로부터 다음의 관계식이 얻어진다(Guo et al. 2010).

$$1-CL=\sum_{k=0}^{x_0}\binom{n_0}{k}(1-r_L)^k r_L^{n_0-k}=\Pr\{R(t_0)\le r_L\} \tag{2}$$

따라서 $r=R(t_0)$의 분포함수는

$$G(r)=\sum_{k=0}^{x_0}\binom{n_0}{k}(1-r)^k r^{n_0-k} \tag{3}$$

이 되고 r의 확률밀도함수는

$$\frac{dG(r)}{dr}=\frac{n_0!}{x_0!(n_0-x_0-1)!}r^{(n_0-x_0)-1}(1-r)^{(x_0+1)-1} \tag{4}$$

이 되어, 설계수명 t_0에서의 신뢰도 r이 $\alpha=n_0-x_0$, $\beta=x_0+1$인 베타분포를 따름을 알 수 있다. 만약 사전시험정보가 무고장 정보라면, $x_0=0$가 되어 r의 사전분포는 모수가 $\alpha=n_0$, $\beta=1$인 베타분포를 따르게 된다.

3. 베이지안 신뢰성 입증시험 설계

수명 T가 모수가 θ인 지수분포를 따르는 경우 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}},\quad t>0$$

여기서 모수 θ는 평균수명($MTTF$)에 해당된다.

수명이 지수분포를 따르는 경우, 설계수명 t_o에서 요구되는 신뢰도 r_0를 신뢰수준 CL 로 보증하기 위해 크기 n의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 시간 t_u동안 고장이 없으면 합격시키는 무고장 신뢰성 입증시험(zero-failure reliability demonstration test)에서 시료수 n과 무고장 시험시간 t_u의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$nt_u = t_0\left[\frac{\ln(1-CL)}{\ln r_0}\right] \tag{5}$$

여기서는 위와 동일한 시험방법을 사용하는 베이지안 무고장 신뢰성입증시험방법을 설계한다. n개의 시료를 t_u동안 시험하는 수명시험에서 고장 시료수를 X개라 하면, X는 모수가 n, $1-r'$ 인 이항분포를 따른다. 여기서 r'는 하나의 시료가 t_u동안 정상적으로 작동할 확률로서

$$r' = e^{-\frac{t_u}{\theta}} = e^{-K\frac{t_0}{\theta}} = r^K \tag{6}$$

를 말한다. 여기서

$$K = t_u/t_0 \tag{7}$$

이며 시험시간 t_u와 입증하고자 하는 설계수명 t_0의 비율을 나타낸다. 따라서 $R(t_o)=r$일 때 X의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$h(x|r) = \binom{n}{x}(1-r^K)^x\, r^{K(n-x)}, \quad x = 0,1,\ \dots\ ,n \tag{8}$$

식 (1)과 (8)로부터 r의 사후분포(posterior distribution)의 확률밀도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$g(r|x) = \frac{(1-r^K)^x(1-r)^{\beta-1}r^{K(n-x)+\alpha-1}}{\int_0^1 (1-r^K)^x(1-r)^{\beta-1}r^{K(n-x)+\alpha-1}dr}, \quad 0<r<1. \tag{9}$$

무고장 합격시험의 경우 $x=0$이므로

$$g(r|x=0)=\frac{(1-r)^{\beta-1}r^{Kn+\alpha-1}}{\int_0^1(1-r)^{\beta-1}r^{Kn+\alpha-1}dr}$$
$$=\frac{\Gamma(Kn+\alpha+\beta)}{\Gamma(Kn+\alpha)\Gamma(\beta)}r^{(Kn+\alpha)-1}(1-r)^{\beta-1}, \quad 0<r<1 \tag{10}$$

이 되어, r의 사후분포는 모수가 $Kn+\alpha,\ \beta$인 베타분포를 따름을 알 수 있다.
무고장 시험에서 설계수명 t_o에서의 요구신뢰도 r_0를 신뢰수준 CL로 만족하는 조건은 다음과 같다.

$$\Pr\{R(t_0)\geq r_0|\ x=0\}=CL \tag{11}$$

식 (10)의 r의 사후분포를 사용하면 식 (11)은

$$\int_{r_0}^1\frac{\Gamma(Kn+\alpha+\beta)}{\Gamma(Kn+\alpha)\Gamma(\beta)}r^{(Kn+\alpha)-1}(1-r)^{\beta-1}dr=CL \tag{12}$$

이 되며, 이 조건을 만족하는 $Kn=Q^*$라 할 때, n과 t_u의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$Kn=\frac{t_u}{t_0}n=Q^* \tag{13}$$

에서

$$nt_u=t_0Q^*. \tag{14}$$

여기서 사전시험정보 역시 무고장 정보인 경우는 $\alpha=n_0,\ \beta=1$이 되어 식 (12)는

$$r_0^{Kn+n_0}=1-CL \tag{15}$$

로 표현되고, 이로부터 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$nt_u = t_0\left[\frac{\ln(1-CL)}{\ln r_0} - n_0\right] \tag{16}$$

만약 사전시험정보가 없다면, $n_0 = 0$ 가 되어 식 (16)은 비 베이지안 무고장 시험(non-Bayesian zero-failure reliability demonstration test)에서의 결과인 식 (5)와 일치하게 된다. 여기서 nt_u는 총 시험시간(total time on test)으로서 사전정보가 없는 총 시험시간에서 사전시험에서의 총 시험시간 $t_0 n_0$를 차감한 시간임을 알 수 있다.
한편 신뢰성 입증시험에서 시험시간의 단축을 위해 가속시험을 적용할 수 있다. 가속계수(acceleration factor)가 A인 가속시험을 적용하고 가속조건에서의 시험시간을 t_a라 하면, 식 (7)에서 $t_u = At_a$관계를 적용하여

$$K = At_a/t_0 \tag{17}$$

가 되고, n과 t_a의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$nt_a = \frac{t_0 Q^*}{A} \tag{18}$$

또한 사전시험정보도 무고장 정보인 경우 식 (16)에서 n과 t_a의 관계는 다음과 같다.

$$nt_a = \frac{t_0}{A}\left[\frac{\ln(1-CL)}{\ln r_0} - n_0\right] \tag{19}$$

4. 무고장시험 중도 중단 시 추가시험 설계

무고장 신뢰성 입증시험 수행 중 신뢰도와 무관한 타 고장모드에 의한 시료의 고장이나 시험 진행요원의 실수, 시험설비 고장 등 예기치 않은 사고로 시험이 중단 될 경우, 처음부터 전체시험을 다시 수행하는 것은 시험비용과 시험시간 측면에서 큰 손실을 초래한다.
여기서는 중도 시험 중단 시까지의 시험정보를 포기하지 않고 사전시험정보로 활용하여 추가시험계획을 수립하는 방법을 제시한다.
설계수명 t_o에서의 요구신뢰도 r_0를 신뢰수준 CL로 보증하기 위해 n개의 시료로 시험을 시작하여 t_u 동안 시험하여 고장이 없으면 합격하는 무고장 신뢰성 입증시험에서, 시험을 진행하는 도중 t_s ($t_s < t_u$)에서 시험이 중단된 상황을 고려해 보자. 설계수명 t_0대비 시험중

단시간 t_s의 비율을

$$L = t_s / t_0 \tag{20}$$

라 두면, 중단시간 t_s에서의 신뢰도는

$$r'' = R(t_s) = e^{-\frac{t_s}{\theta}} = r^L \tag{21}$$

이 된다. 여기서 r은 설계수명 t_0에서의 신뢰도 $R(t_0)$를 나타낸다. 2절의 결과에 따라 중단시험 정보를 사전시험정보로 활용하기 위해 r''의 사전분포를 구하면 모수가 $\alpha = n$, $\beta = 1$인 베타분포를 따르게 된다. 이 분포로부터 r의 사전분포는 다음과 같이 구해진다.

$$g(r) = nL\, r^{nL-1}, \quad 0 < r < 1. \tag{22}$$

손상 없이 남아있는 시료로 시험을 계속할 경우, 지수분포의 무기억성(memoryless property)에 의해 개개 시료의 수명은 새 시료와 동일한 지수분포를 따른다. 남아있는 시료의 수 또는 추가시험에 사용될 전체시료의 수를 m개라 하고, 설계수명 t_o에서의 요구신뢰도 r_0를 신뢰수준 CL 로 동일하게 보증하기 위한 추가시험의 무고장 시험시간을 t_m이라 하자. 이 때 m개의 시료 중 t_m동안 고장 나는 시료의 수 X는 모수가 m, $1-r^{K'}$인 이항분포를 따르게 된다. 여기서

$$K' = t_m / t_0 \tag{23}$$

을 말한다. 무고장 추가시험에 합격된 경우, 즉 m개의 시료로 t_m동안 시험하여 고장이 없이 시험이 종료된 경우, 식 (22)의 사전분포와 X의 분포로부터 $r = R(t_0)$의 사후분포의 확률밀도함수는 다음과 같이 구해진다.

$$g(r|x=0) = (mK' + nL)\ r^{(mK' + nL)-1}, \quad 0 < r < 1. \tag{24}$$

위 사후분포를 사용하여 설계수명 t_o에서의 요구신뢰도 r_0를 신뢰수준 CL로 만족하는 조건을 구하면 다음과 같다.

$$\int_{r_0}^{1}(mK' + nL)\ r^{(mK' + nL) - 1}dr = CL. \tag{25}$$

위 조건식으로부터 추가시험의 시료수 m과 시험시간 t_m의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$mt_m = t_0\left[\frac{\ln(1 - CL)}{\ln r_0}\right] - nt_s \tag{26}$$

여기서 mt_m은 총 시험시간(total time on test)으로서 사전시험정보가 없는 총 시험시간(식 (5))에서 중도시험 중단 시까지의 총 시험시간 nt_s를 차감한 시간임을 알 수 있다.

5. 적용예제

수명이 지수분포를 따르는 부품에 대해 설계수명 $t_0 = 1{,}000$ 시간에서의 요구신뢰도 $r_0 = 0.99$를 신뢰수준 $CL = 0.6$로 입증하고자 한다. 먼저 비 베이지안 무고장 시험에서 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는 식 (5)에서 다음과 같이 구해진다.

$$nt_u = t_0\left[\frac{\ln(1 - CL)}{\ln r_0}\right] = 1{,}000 \times \frac{\ln(1 - 0.6)}{\ln 0.99} = 9{,}1170.16$$

$n = 50$개의 시료로 시험한다면 시험시간은 $t_u = 1{,}823.4$시간이 된다.
만약 이 부품에 대한 사전정보로서 $n_0 = 25$개의 부품이 $t_0 = 1{,}000$동안 고장 없이 작동했다는 시험결과가 있다고 가정하자. 이 정보를 활용하여 베이지안 무고장 시험방식을 설계하여 적용하면 식(16)에 의해 시료수 n과 시험시간 t_u의 관계는

$$nt_u = t_0\left[\frac{\ln(1 - CL)}{\ln r_0} - n_0\right] = 66{,}170.16$$

이 되고, $n = 50$개의 시료로 시험한다면 시험시간은 $t_u = 1{,}323.4$시간이 되어, 사전정보가 없는 시험에 비해 시험시간이 27.4% 단축됨을 볼 수 있다.
다음 사전정보가 없는 상태에서 설계수명 $t_0 = 1{,}000$시간에서의 요구신뢰도 $r_0 = 0.99$를 신뢰수준 $CL = 0.6$으로 입증하기 위해 $n = 50$개의 시료로 $t_u = 1{,}823.4$시간 동안 시험하는 무고장시험 진행 중, $t_s = 800$ 시간에서 하나의 시료가 신뢰도와 무관한 사고로 파손되어 시험

을 중단한 상황을 생각해 보자. 동일한 신뢰도를 동일한 신뢰수준으로 입증하기 위해 나머지 $m=49$개의 시료로 추가시험을 수행한다면, 추가시험 시료수 m과 추가시험시간 t_m의 관계는 식 (25)에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$mt_m = t_0\left[\frac{\ln(1-CL)}{\ln r_0}\right] - nt_s = 51,170.16$$

따라서 $m=49$개의 시료로 추가시험을 계속할 때 $t_m=1,044.3$ 시간동안 고장이 없으면 합격, 즉 설계수명 $t_0=1,000$ 시간에서의 요구신뢰도 $r_0=0.99$를 신뢰수준 $CL=0.6$으로 입증할 수 있다. 위 결과로부터 최초 시험의 중도 중단 시 $n=50$개의 시료로 $t_u=1,823.4$시간 동안 재시험 하는 것에 비해 중도 중단 결과를 사전정보로 활용하여 추가시험을 계획하여 실시하는 것이 시료수와 시험시간을 크게 단축시킨다는 것을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 수명이 지수분포를 따르는 제품에 대한 베이지안 무고장 신뢰성 입증시험방법을 제시하였다. 사전시험정보를 활용하여 입증하고자 하는 신뢰도의 사전분포를 구하고, 규정된 신뢰도를 주어진 신뢰수준으로 보증하는 시험방식을 개발하였다. 또한 신뢰도 입증시험 수행 중 예기치 않은 사고로 시험이 중도에서 중단된 경우, 이미 진행된 시험정보를 사전정보로 활용하여 최초의 규정된 신뢰도와 신뢰수준을 동일하게 보증할 수 있는 추가시험 절차를 개발하였다. 예제를 통해 신뢰도 입증시험 설계에 사전정보를 활용함으로써 시험 시료수와 시간을 단축시키는 효과를 확인할 수 있었으며, 신뢰도 입증시험의 중도 중단 시, 모든 시험을 처음부터 다시 수행하는 것에 비해 중도 중단 결과를 사전정보로 활용하여 추가시험을 계획하여 실시하는 것이 시료수와 시험시간을 크게 단축시킨다는 사실도 확인하였다.

참고문헌

[1] 권영일(2006), "기계류부품 신뢰성보증을 위한 2단계 시험방식 설계", 한국품질경영학회지, 제34권 제1호, pp. 20-26.

[2] 권영일(2011), "경제적인 무고장 신뢰성 인증시험 설계", 한국품질경영학회지, 제39권 제1호, pp. 71-77.

[3] 권영일(2012), "수명이 대수정규분포를 따르는 제품에 대한 경제적인 신뢰성 입증시험 설계", 신뢰성응용연구, 제12권 제1호, pp. 47-56.

[4] Abernethy, R. B.(2000), The New Weibull Handbook.

[5] Coolen, F.P.A., Coolen-Schrijner, P. and Rahrouh, M.(2005), "Bayesian Reliability

Demonstration for Failure-Free Period", *Reliability Engineering and System Safety*, 88, pp. 81-91.

[6] Guo, H., Honecker, S., Mettas, A. and Ogden, D.(2010), "Reliability Estimation for One-Shot Systems with Zero Component Test Failures", *IEEE Reliability & Maintainability Symposium 2010*, pp. 25-28.

[7] Ke, H.Y.(1999), "Sampling Plans for Vehicle Component Reliability Verification", *Quality and Reliability Engineering International*, 15, pp. 363-368.

[8] Martz, H.F. and Waller, R.A.(1979), "A Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration Testing Procedure", *Journal of Quality Technology*, Vol. 11, No. 3., pp. 128-138.

[9] Martz, H.F. and Waller, R.A.(1990), "Bayesian Reliability Analysis of Complex Series/Parellel Systems of Binomial Subsystems and Component", *Technometrics*, Vol. 32, No. 4, pp. 407-416.

[10] Martz, H.F., Waller, R.A. and Fickas, E.T.(1988), "Bayesian Reliability Analysis of Series Systems of Binomial Subsystems and Component", *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, pp. 143-154.

[11] Rahrouh, M.(2005), *Bayesian Zero-Failure Reliability Demonstration*, Phd. Thesis, Department of Mathematical Science, University of Durham England, UK.

[12] Yadav, O.P., Singh, N., and Goel, P.S.(2006), "Reliability Demonstration Test Planning; A Three Dimensional Consideration", *Reliability Engineering and System Safety*, 91, pp. 882-893.

[13] Yan, W. and Herfat, A.T.(2004), "Design Criteria Evaluation Using Field Test Data and Reliability Test Improvement Based on Statistical Analysis", *IEEE RAMS* 2004, pp. 168-172.