

研究論文

DOI: <http://dx.doi.org/10.6108/KSPE.2013.17.1.018>

초음속 노즐 유동의 최적해석을 위한 난류모델의 평가와 선정

감호동* · 김정수**†

Assessment and Validation of Turbulence Models for the Optimal Computation of Supersonic Nozzle Flow

Ho Dong Kam* · Jeong Soo Kim**†

ABSTRACT

Assessment and validation of RANS turbulence models are conducted for the optimal analysis of supersonic converging-diverging nozzle through the comparison between computational results and experimental data. One/two equation turbulence closures such as Spalart-Allmaras, RNG k- ϵ , and k- ω SST are employed to simulate the two-dimensional nozzle flow. Computational results with the turbulence models mentioned fairly well predict shock structure of the nozzle-inside and pressure distribution along the wall. Especially, SST model among the employed ones shows the best agreement to experimental results.

초 록

초음속 축소-확대 노즐 유동을 정확하게 해석하기 위하여, 실험치와 해석값 사이의 비교를 통해 난류 모델 성능평가를 수행한다. Boussinesq 가정을 적용한 RANS 방정식으로 2차원 노즐 유동을 해석하되, Spalart-Allmaras, RNG k- ϵ , 그리고 k- ω SST 난류모델을 평가에 사용한다. 각 모델들로 계산된 노즐 벽면의 압력구배 및 충격파 구조는 실험 데이터와 유사한 결과를 보였는데, 그 중에서도 SST 난류모델이 실험값에 가장 근접한 해석결과를 나타내었다.

Key Words: Supersonic Converging-Diverging Nozzle(초음속 축소-확대 노즐), Gas Dynamics(기체 역학), Spalart-Allmaras Model(Spalart-Allmaras 모형), RNG k- ϵ Model(RNG k- ϵ 모형), k- ω SST Model(k- ω SST 모형), Overexpanded(과대팽창), Shock(충격파)

Nomenclature

접수일 2012. 11. 30, 수정완료일 2013. 1. 16, 게재확정일 2013. 1. 21

* 학생회원, 부경대학교 대학원 에너지시스템공학과

** 종신회원, 부경대학교 기계공학과

† 교신저자, E-mail: jeongkim@pknu.ac.kr

C : turbulent modeling constant

D : cross-diffusion term

E	: total energy
G	: generation term
h	: static enthalpy
\bar{J}	: diffusion flux
k	: turbulent kinetic energy
k	: conductivity
P	: static pressure
R	: additional term
Re	: Reynolds number
S	: source term
T	: static temperature
u	: mean velocity
x	: Cartesian coordinates
Y	: dissipation rate
α	: inverse effective Prandtl number
δ_{ij}	: Kronecker delta
ε, ω	: turbulent dissipation rate
$\bar{\nu}$: viscosity-like term
μ	: viscosity
ρ	: density
σ	: turbulent Prandtl number
τ	: shear stress
Γ	: diffusivity

Subscript

b	: buoyancy
eff	: effective
M	: fluctuating dilatation
k	: turbulent kinetic energy
ε, ω	: turbulent dissipation rate
ν	: molecular kinetic viscosity

1. 서 론

우주비행체가 기동하기 위하여 추력발생에 사용되는 로켓엔진들은 축소확대(converging-diverging) 노즐을 장착한다. Austaf de Laval에

의해 개발되었고[1], Robert Goddard가 최초로 로켓엔진에 적용한[2] 이후 현대 대부분의 로켓뿐만 아니라 각종 비행체의 추진장치에 활용되고 있는 축소확대 노즐은 고온고압의 작동유체를 초음속(supersonic) 상태로 팽창/가속시켜, 유체가 가진 열에너지를 운동에너지로 극대화시킴으로써 운동량(momentum)을 발생시키는 장치이다.

노즐 입구로 들어가는 작동유체의 물성치, 노즐의 형상 및 목 면적비, 그리고 주변환경 등은 노즐의 추력성능에 큰 영향을 미치므로, 로켓엔진을 위한 노즐을 설계하고 적용하기에 앞서 각 조건별 노즐의 유동특성이 예측되어야 한다[3]. 이는 최근 들어 크게 발달된 컴퓨터 자원을 활용하여 수치해석기법으로 풀이될 수 있지만, 노즐 유동은 압력과 온도 그리고 압축효과 등의 복잡다양한 물리적 현상들이 연계되어 있으며, 특히 초음속 유동의 경우에는 노즐 내부 유동특성의 급작스러운 변화를 유발하는 충격파(shock) 및 유동박리(flow separation) 등의 비가역적(irreversible) 현상들이 발생할 수 있어 해석하기가 용이하지는 않다. 또한, 이러한 현상들은 노즐의 급격한 성능저하 및 구조적 불안정성을 야기하기도 하므로[4], 초음속 노즐을 사용하기 전에 이 현상들의 정확한 예측은 필수적이다.

전술한 비가역적 현상들이 발생할 수 있는 초음속 축소-확대 노즐의 난류유동을 해석하기 위하여 직접 수치 모사(Direct Numerical Simulation, DNS)기법을 사용하거나, LES (Large Eddy Simulation), 혹은 RANS (Reynold-averaged Navier-Stokes) 난류모델들을 이용할 수 있다. DNS는 난류의 가장 작은 크기인 Kolmogorov 스케일의 와류(eddy)를 정확히 해석하기 위해 많은 계산격자가 요구된다. DNS 기법을 사용하여 계산을 수행할 시 $Re^{9/4}$ 개의 계산 격자수가 필요하므로 큰 Re 수를 가지는 초음속 축소-확대 노즐의 유동해석에는 적합하지 않다. DNS보다 큰 스케일의 와류를 계산하고 Subgrid-scale Model을 이용함으로써 보다 적은 계산격자가 필요한 LES 기법조차 여전히 많은 계산시간과 고성능의 컴퓨터 자원이 요구된다.

반면에 RANS 난류모델들은 비교적 적은 격자수로 높은 Re수의 유동을 해석할 수 있지만 해석하려는 유동장의 특성에 따라 각 모델별로 해석능력의 차이를 보이므로 그 모델의 적절한 선택이 유동장의 정확한 해석에 있어서 필수적이다 [3]. 따라서 본 연구에서는 Hunter[5]가 실험으로 얻은 데이터와 이를 수치기법으로 해석한 결과의 비교를 통하여 몇몇 RANS 모델들의 초음속 노즐 유동 모사능력을 평가하고 특정형상에 적합한 난류모델을 선정하고자 한다.

2. 수치해석 방법

초음속 노즐의 난류유동에 대한 RANS 방정식은 상용코드인 Fluent[6]를 사용하여 해석하며 노즐 유동의 급격한 물성치 변화를 예측하기 위하여 압력기반의 연계 알고리즘(pressure-based coupled algorithm)을 채택한다. 이 알고리즘에서는 연속방정식과 운동량 방정식을 동시에 계산함으로써 SIMPLE-like algorithm에서 시간 및 컴퓨터 자원을 크게 소모시키는 항들 중 하나인 압력수정(pressure correction) 항을 제거할 수 있다. 또한, 두 방정식을 밀접하게 연계(closely coupled)시켜 계산함으로써 분리(segregated) 알고리즘보다 뛰어난 수렴성을 보이는데 [6], Chen 등[7]은 연계 알고리즘으로 몇몇 CFD 벤치마킹을 수행한 결과, 수렴성을 개선시키고 계산시간을 단축할 수 있었다고 보고하고 있다. 지배방정식의 차별화 방법은 급격한 유동특성의 변화를 유발하는 충격파 등의 거동을 잘 모사하기 위하여 풍상 차분법(upwind scheme)을 적용한다.

한정된 컴퓨터 자원 및 시간으로 효율적인 계산을 하기 위해, 작동유체는 정상상태(steady state)의 이상기체(ideal-gas)로 가정하고, 중력과 외력은 무시하며, 노즐 벽면에는 단열(adiabatic) 및 점착(no slip)조건을 부여한다. 이상과 같은 가정을 적용하여 유동해석에 사용된 질량 및 운동량 그리고 에너지 보존식은 아래의 Eq. 1-3에 기술되는데, 수렴조건은 유동특성의 변화가 무시할만 하고, 모든 지배방정식의 잔차가 10^{-4} (에너지

의 경우 10^{-7}) 이하로 감소하는 경우이다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i(\rho E + p)) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{eff} \frac{\partial T}{\partial x_i} - \sum_j h_j \bar{J}_j + (\tau_{eff} \cdot \mu_j) \right) \quad (3)$$

운동량 보존식에서의 τ_{ij} 는 아래와 같이 표현된다.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (4)$$

본 연구에서는 초음속 노즐 유동의 해석능력 평가를 위해 Spalart-Allmaras (S-A), RNG (Re-Normalisation Group) k- ϵ , 그리고 k- ω SST (Shear Stress Transport) 난류모델을 고려하며, 부가적으로 점성 효과를 확인하기 위해 비점성 Euler식의 해석결과도 포함하여 비교하기로 한다. 유사점성(viscosity-like) $\tilde{\nu}$ 의 수송방정식(transport equation)인 Eq. 5를 풀이하는 S-A 난류모델은 항공우주 분야에서의 경계층(boundary layer) 유동을 모사하기 위해 고안된 것으로서 역압력 구배가 발생하는 경계층 유동을 적절히 모사하는 것으로 알려져 있다[8].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{\nu} u_i) \\ & = G_{\tilde{\nu}} + \frac{1}{\sigma_{\tilde{\nu}}} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right\} + C_1 \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_{\tilde{\nu}} + S_{\tilde{\nu}} \end{aligned} \quad (5)$$

RNG k- ϵ [9] 및 k- ω SST[10] 난류모델은 난류 운동에너지(turbulent kinetic energy, k)와 난류 소산률(turbulent dissipation rate, ϵ and ω) 수송방정식들로 구성되어 있으며 아래의 Eq. 6-7, 그리고 Eq. 8-9에 각각 기술된다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) \\ & = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_\varepsilon u_{eff} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{2\varepsilon} G_b) - C_{3\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - R_\varepsilon + S_\varepsilon \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (9)$$

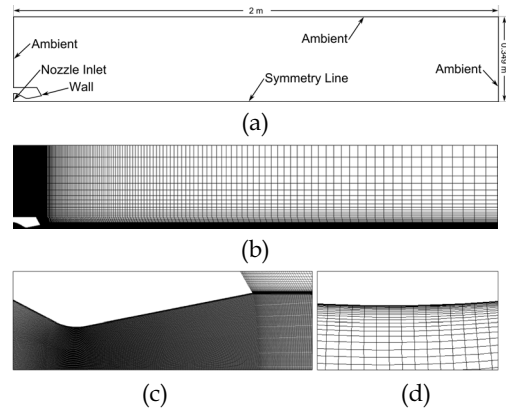


Fig. 1 Computational domain and grid configuration

Yakhot 등이 제안한 RNG k-ε 난류모델은 통계적인 기법을 활용하여 추가적인 모형상수 항을 standard k-ε 모델에 적용함으로써 기존 k-ε 모델의 정확도를 향상시킨 것이다[9]. 그리고 Menter의 k-ω SST 모델은 k-ε, k-ω 모델을 혼합한 것으로 경계층영역 내에서는 Wilcox의 k-ω 모델을, 그 외부 및 혼합 영역에서는 k-ε 모델을 사용한다[10]. 특히 k-ω SST 모델은 벽면 근처 유동을 잘 묘사하는데, Dalbello 등의 연구결과[11]에 따르면 1~2개의 방정식으로 구성된 난류모델들 중 k-ω SST 난류모델이 노즐 유동 해석에서 유동박리를 가장 잘 예측하였다고 한다.

노즐 내/외부의 유동특성 및 플룸구조(plume structure)를 해석하기 위한 계산영역은 노즐 출구를 기점으로 하여 길이 방향으로 노즐 출구높이의 20배, 높이방향으로 10배인 크기이며, 이를 Fig. 1(a)에 도시한다. 격자 생성툴인 ICFM[12]을 이용하여 사변형 정렬격자를 노즐 내부에 100,926 개, 외부에는 50,664 개를 배치하였으며, 유동특성의 급격한 변화가 예상되는 노즐 확대부분(diverging section)과 경계층 유동이 발생하는 벽면 근처에 밀집시키는데 이는 Fig. 1(b)-(d)에 나타나 있다. 실험에서는 목(throat) 부분의 면적이 2,785 mm²이고, 1,797의 목면적비(area ratio)와 101.34 mm의 깊이를 가지는 2차원 형상의 축소확대 노즐을 사용하였다[5]. 본 연구에서는 실험과 동일한 규격의 노즐을 해석에 사용하되, 깊이방향의 물성치 변화를 고려하지 않는

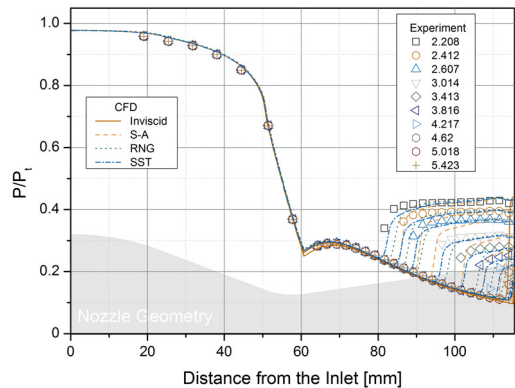


Fig. 2 Comparison of experimental and computational pressure distribution along the wall at various NPR's

2차원 축소확대 노즐의 유동을 해석하여 실험값과 비교하기로 한다.

3. 수치해석 결과

앞서 기술된 해석기법 및 계산격자로 2차원 초음속 노즐 유동을 해석하여 실험값과 비교하는데, 그 결과로서 노즐유동의 벽면부 압력변화를 Fig. 2에 제시한다. 비교되는 해석치와 실험값의 노즐압력비(Nozzle Pressure Ratio, NPR)는 2.208에서 5.423 사이로서, 과대팽창 노즐의 모습을 보이는 구간이다. 노즐 유동은 축소부(converging section)를 통과하면서 팽창되다가

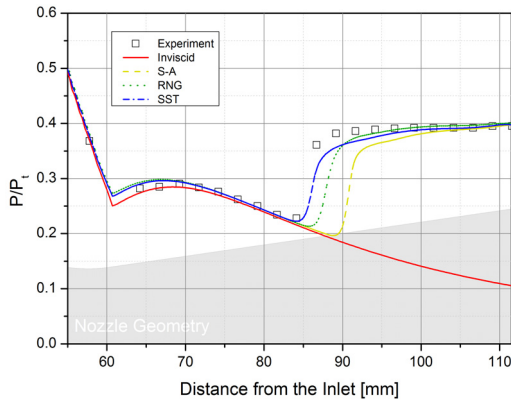


Fig. 3 Comparison of experimental and computational pressure distribution at NPR = 2.412

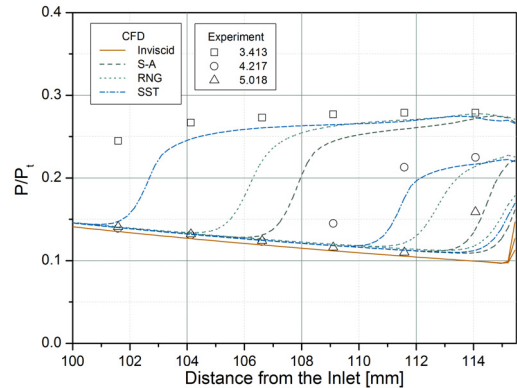


Fig. 5 Comparison of experimental and computational pressure distribution at NPR = 3.413, 4.217, and 5.018

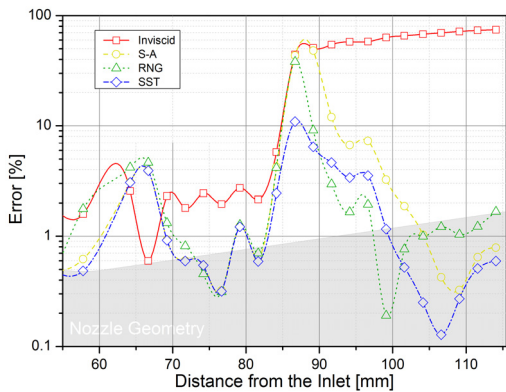


Fig. 4 Prediction errors for wall pressures at NPR = 2.412

목 부분에서 음속(sonic)이 되고, 그 뒤로 초음속 상태로 확대부를 지나가며 계속 가속된다. 이에 따라 노즐 유동의 압력은 출구부로 갈수록 감소하다가 특정지점에서 갑작스럽게 증가하는데, 이는 지나치게 팽창된 유동의 압력이 대기압보다 훨씬 떨어진 연유로 발생한 역류(back flow) 및 유동박리 그리고 충격파에 기인한 현상이다. 노즐압력비가 2.208로서 가장 낮은 경우에서는 노즐 유동의 급작스러운 압력상승이 노즐 목 최근점에서(nearest to throat) 발생하고 노즐압력비가 증가함에 따라 노즐 출구부로 이동하는데, 압력비가 5.423이 되어서야 이러한 현상이 노즐 출구 밖으로 밀려난다.

비가역적인 현상인 충격파 등이 발생하지 않은 등엔트로피(isentropic) 유동 구간에서는 실험치와 해석값이 서로 매우 잘 일치하지만 충격파가 발생한 지점 전후로는 각 난류모델별로 편차를 보이고 있다. 보다 자세한 비교를 위하여 노즐압력비가 2.412인 경우 노즐 확대부 벽면의 압력변화를 Fig. 3에 나타낸다. 노즐목을 거쳐 초음속 상태로 팽창하는 유동의 압력은 노즐 입구로부터 80~90 mm 떨어진 지점에서 급작스럽게 대기압 수준으로 회복되는 것이 그림에서 관찰된다. 실험에 의한 압력측정치가 가장 먼저 상승하는 모습을 보이고, 그 뒤로 SST, RNG, 그리고 S-A 난류모델 순으로 압력상승을 예측한다. 세 가지 난류모델로 해석한 결과들 모두 실험값과 비슷한 양상을 보이는데, 2-equation 난류모델인 RNG와 SST가 1-equation 난류모델인 S-A보다 실험치에 근접한 해석값을 도출한다. 그러나 Euler 식으로 풀이한 노즐 유동은 유체의 점성이 무시되어 유동박리 및 경사충격파에 의한 압력회복을 예측하지 못하고, 노즐 끝단부까지 계속적으로 등엔트로피 팽창을 하는 모습을 보이고 있다.

Figure 4는 노즐 내부 위치별로 난류모델에 따른 해석값과 실험치 사이의 오차를 백분율로 표시한 그림이다. 대체적으로 작은 오차를 보이다가 충격파 전후(82.5 mm)로 큰 오차가 발생하는데, Euler, S-A, RNG, 그리고 SST 순서로 오차

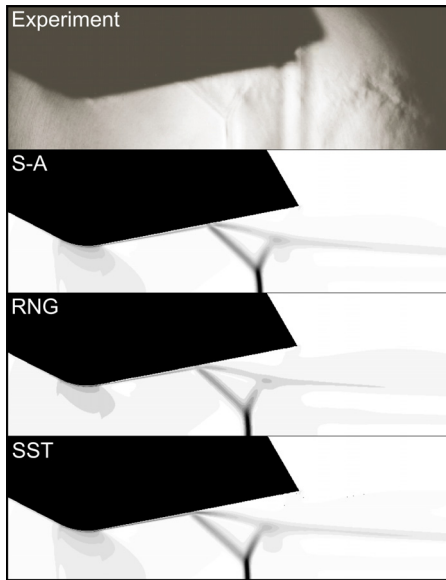


Fig. 6 Schlieren images of experimental[5] and computational results at NPR = 2.412

가 크다. 급격한 압력상승 이후 노즐 내부의 압력이 대기압 상태로 회복되면서 대부분의 경우가 1% 내외의 적은 오차를 보이지만, Euler 식으로 해석한 경우는 전술한 바와 같이 실험값과 큰 차이를 나타내고 있다.

노즐압력비가 3.413, 4.127, 그리고 5.018일 때, 노즐 유동의 압력변화를 실험 및 각 모델을 적용한 해석별로 Fig. 5에 비교하여 도시한다. 비교결과, 전체적으로 SST, RNG, S-A 모델 순서로 실험값과 근사한 결과를 도출한다. 다만, 노즐 끝단부에 충격파가 발생한 노즐압력비 5.018의 경우에는 RNG 모델로 해석한 결과가 SST 모델로 해석한 결과보다 실험값에 가까운데, 그 차이는 미미하다. 부가적으로, 노즐압력비가 증가함에 따라 노즐 내부에 발생한 충격파는 노즐 끝단부로 밀려나고, 이에 기인하여 노즐 유동의 급작스러운 압력상승현상이 노즐 출구부로 밀려나는 현상이 또한 그림에서 확인된다.

압력구배 이외에도, 각 난류모델들에 의한 초음속 노즐 유동의 플룸구조 모사 능력을 검증하기 위해, 노즐압력비가 2.412인 경우의 슐리렌(Schlieren) 이미지와 각 난류모델 해석결과에 의한 밀도구배선도를 Fig. 6에서 비교한다. 실험에

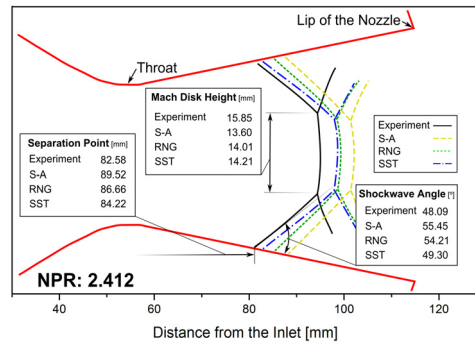


Fig. 7 Shock structure of experimental and computational results at NPR = 2.412

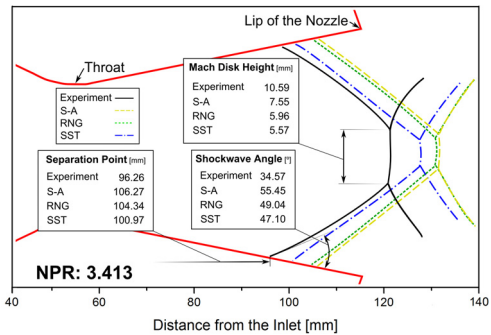


Fig. 8 Shock structure of experimental and computational results at NPR = 3.413

서 획득한 슐리렌 이미지에서, 노즐 중심부(core)에 발생하는 마하 디스크(Mach disk)와 노즐 벽면에서 발생한 경사충격파(oblique shock), 그리고 그 충격파가 마하디스크에서 반사되어 발생한 반사충격파(reflected shock) 등을 전후로 급격한 밀도 차이가 확인된다. 이들 현상은 해석치로 그려낸 밀도구배선도에서도 관찰되는데, 슐리렌 사진에서 명확하게 표현되지 못하는 노즐 바깥부의 제트 경계(jet boundary) 및 slip line까지도 확인되고 있다.

앞서 제시된 슐리렌 이미지와 밀도구배선도를 바탕으로 충격파 구조를 재구성하여 Fig. 7에 보인다. 그림에서는 실험에서 촬영한 슐리렌 이미지로부터 실제 경사충격파, 마하디스크, 그리고 반사충격파를 도시하고, 수치해석결과의 밀도구배선도로부터 각 난류모델이 모사한 노즐 유동의 충격파 구조를 함께 보이고 있다. 유동박리 및

경사충격파는 실험치를 기준으로 SST, RNG, 그리고 S-A 모델 순서로 잘 예측하는데, 그 유동 박리점의 위치는 각각 노즐 입구로부터 82.58 mm, 84.22 mm, 86.66 mm, 그리고 89.52 mm 떨어진 지점이다. 마하디스크의 높이는 실험의 경우 15.85 mm로 관측되고, SST는 14.21 mm, RNG가 14.01 mm, 그리고 S-A는 13.60 mm로 보이고 있다. 모든 난류모델들은 실험결과와 비슷한 모양으로 충격파 구조를 예측하고 있는데, 1-equation 난류모델 S-A보다 2-equations 난류 모델들이 더 적합한 충격파구조를 도출하였으며, 그 중에서도 SST 난류모델이 가장 실험값에 근접하는 해석 결과를 보인다.

Figure 8은 노즐압력비가 3.413인 경우의 충격파 구조를 도시한 그림이다. 압력비가 2.412에서 3.413으로 증가함으로써 유동박리점, 경사충격파, 그리고 마하디스크의 위치가 노즐 출구방향으로 밀려나는 사실이 관찰되고, 경사충격파와 벽면 사이의 각이 줄어들며, 마하디스크의 크기가 감소하는 현상이 확인된다. 노즐압력비가 2.412인 경우와 마찬가지로 SST 모델로 해석한 결과가 실험에 가장 가깝고, 그 뒤로 RNG, S-A 순서대로 실험값에 근사한 해석결과를 도출한다.

4. 결 론

초음속 노즐 유동의 해석에 적합한 난류모델을 선정하기 위해, 2차원 초음속 노즐 유동의 해석결과와 실험값을 비교하였다. 점성을 무시한 Euler 식으로 노즐 유동을 해석한 경우에는 노즐 내부에 유동박리 및 충격파의 발생을 예측하지 못하였다. 그러나 Boussinesq 가정을 적용한 Spalart-Allmaras, RNG k- ϵ , 그리고 k- ω SST 난류모델들로 해석한 노즐 유동의 압력구배 및 충격파 구조는 실험의 그것과 유사한 결과를 보였는데, 그 정확도는 SST, RNG, 그리고 S-A 난류 모델 순서로 높았다. 이상의 결과로부터, 본 연구에서 고려하는 초음속 축소-확대 노즐의 해석에는 k- ω SST 난류모델이 가장 적합한 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 한국연구재단을 통해 교육과학기술부 우주핵심기술개발사업의 지원을 받아 수행되었음(No. 20110020890).

참 고 문 헌

1. Garrett, S., From Galaxies to Turbines: Science, Technology, and the Parsons Family, Taylor & Francis, 1999
2. Sutton, G. P., History of Liquid Propellant Rocket Engines, 1st Ed., AIAA, 2006
3. 감호동, 김정수, 배대석, "지상연소시험평가용 추력기 노즐의 성능해석과 형상설계," 한국추진공학회지, 제16권, 제2호, 2012, pp.10-16
4. Kam, H. D., Kim, J. S., Lee, J. W., and Kim, I. T., "Performance Analysis for the Design Optimization of a Thruster Nozzle Used for Ground Firing Test," Asian Joint Conference on Propulsion and Power, 2012-143, 2012
5. Hunter, C. A., "Experimental, Theoretical, and Computational Investigation of Separated Nozzle Flows," AIAA 98-3107 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 1998
6. ANSYS Fluent User's Guide 14.0 ANSYS Inc., 2011
7. Chen, Z. J. and Pezekwas, A. J., "A Coupled Pressure-based Computational Method for Incompressible/Compressible Flows," Journal of Computational Physics, Vol. 299, No. 24, 2010, pp.9150-9165
8. Spalart, P. R. and Allmaras, S. R., "A One-equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows," Recherche Aerospaciale, Vol. 1, 1994, pp.5-21
9. Yakhot, V., Orszag, S. A., Thangam, S.,

- Gatski, T. B., and Speziale, C. G., "Development of Turbulence Models for Shear Flows by a Double Expansion Technique," *Physics of Fluids*, Vol. 4, No. 7, pp.1510-1520
10. Menter, F. R., "Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications," *AIAA*, Vol. 32, No. 8, 1994, pp.1598-1605
11. Dalbello, T., Georgiadis, N. J., Yoder, D. A., and Keith, T. G., "Computational Study of Axisymmetric Off-Design Nozzle Flows," *NASA TM-2003-212876*, 2003
12. *ANSYS ICEM User's Guide 14.0*, ANSYS Inc., 2011