

불연속 갤러킨 유한요소법을 이용한 1차원 천이류 모의

Simulation of One-Dimensional Transcritical Flow with Discontinuous Galerkin Finite Element Method

이해균*, 이남주**

단국대학교(천안) 토목환경공학과*, 경성대학교 토목공학과**

Haegyun Lee(haegyun@dankook.ac.kr)*, Nam-Joo Lee(njlee@ks.ac.kr)**

요약

빈발하고 있는 대규모 홍수와 자연재해는 정확도가 높은 하천 흐름 수치해석 모델에 대한 관심의 증대로 이어지고 있다. 현재 하천에서 발생하는 일반적인 흐름은 기존에 개발된 여러 형태의 천수방정식을 지배방정식으로 하는 수치기법에 의해 해석되고 있으나, 연속적이지 않은 형태의 흐름을 해석하거나 매우 정확한 해석을 필요로 하는 경우에는 기존의 수치해석기법은 많은 한계를 보여 주고 있다. 본 연구에서는 불연속 갤러킨 기법 기반의 흐름 모델을 개발하고, 이를 이용하여 전통적으로 1차원 천이류로 분류되는, 댐 붕괴파, 둔덕위 흐름 모의에 적용하여 기존의 수치해와 대체로 잘 일치함을 확인하였다.

■ 중심어 : | 천수방정식 | 불연속 갤러킨 | 유한요소법 | 천이류 |

Abstract

With the increase of the frequency in large-scale floods and natural disasters, the demands for highly accurate numerical river models are also rapidly growing. Generally, flows in rivers are modeled with previously developed and well-established numerical models based on shallow water equations. However, the so-far-developed models reveal a lot of limitations in the analysis of discontinuous flow or flow which needs accurate modeling. In this study, the numerical shallow water model based on the discontinuous Galerkin method was applied to the simulation of one-dimensional transcritical flow, including dam break flows and a flow over a hump. The favorable agreement was observed between numerical solutions and analytical solutions.

■ keyword : | Shallow Water Equation | Discontinuous Galerkin | Finite Element Method | Ranscritical Flow |

I. 서론

1. 하천 흐름을 위한 수치모형

1.1 불연속 흐름 모델링의 어려움

최근 빈발하고 있는 대규모 홍수와 자연재해는 하천 흐름에 대한 정확도가 높은 수치해석 모델에 대한 관심

의 증가로 이어지고 있다. 현재 하천에서 발생하는 일반적인 흐름은 기존에 개발된 천수방정식을 지배방정식으로 하는 여러 형태의 수치기법에 의해 해석되고 있다. 그러나, 연속적이지 않은 형태의 흐름을 해석하거나, 정확한 해석을 필요로 하는 경우에는 기존의 수치해석기법은 많은 한계를 보여 주고 있다. 또한, 흐름 해

* 본 연구는 국토해양부 지역기술혁신사업의 연구비지원(과제번호#08지역기술혁신B-01)에 의해 수행되었습니다.

접수번호 : #121112-007

접수일자 : 2012년 11월 12일

심사완료일 : 2013년 02월 19일

교신저자 : 이해균, e-mail : haegyun@dankook.ac.kr

석은 유사 이동 및 오염물질의 거동 해석을 위한 유속 자료로서 사용되기 때문에 이의 정확도를 높이는 것은 매우 중요하다.

최근 하천의 흐름 해석에는 2차원 수치모형의 적용이 증가하고 있으나 (예를 들면, [2]), 하쪽에 비하여 길이 방향이 긴 하천 흐름의 해석에는 1차원 모형이 예보 등의 목적으로 많이 사용되고 있다. 대체로 수치해석기법은 공간차분형태에 따라 크게 중앙차분법과 상류이송 기법(upwind scheme)으로 분류될 수 있다. 중앙차분기법은 각 계산지점의 특성만을 반영하여 계산하는 기법으로 차분과정이 비교적 간단하여 지금까지 많이 사용되어 왔으나, 도수(hydraulic jump), 댐 붕괴류(dam-break flow) 등 불연속이 나타나는 흐름의 경우 비물리적(non-physical) 진동이 발생하여 해에 수렴할 수 없게 된다. 반면 상류이송기법은 각 지점의 특성선의 특성에 따라 공간차분을 변화시켜 주기 때문에 상류(subcritical)-사류(supercritical)-상류(subcritical) 등으로 변화하는 천이류 흐름(transcritical flow)을 계산할 수 있는 장점을 가지고 있다. 이와 같은 이유로 댐 붕괴류, 보 월류흐름 등 불연속 흐름의 계산을 위해서 상류이송기법이 많이 이용되고 있으나, 하상경사, 마찰경사, 단면변화 등을 나타내는 생성항의 처리 등을 포함한 많은 한계를 가지고 있기 때문에 이를 극복할 수 있는 하천 흐름해석 모델의 개발이 요구되고 있다[1][3].

불연속 갤러킨 유한요소법은 [8]에 의하여 중성자 이송방정식의 모의에 적용된 이래로, 압축성 유동과, 충격파 (shock wave) 현상, 천수방정식 등의 해석에 적용이 증가하고 있다. 개별 요소에 대한 약형식(weak form)의 결과로서 나타나게 되는 요소 경계에 수직인 흐름률(flux)는 Riemann 근사해법을 이용하여 구하는 것이 일반적이다. 기존의 안정화(stabilized) 유한요소법(예를 들면, SUPG, 특성선 갤러킨 유한요소법(characteristic Galerkin Method) 등)과는 달리, [그림 1]에 보인 바와 같이 각 요소 사이의 경계에서 불연속을 허용하므로, 불연속적인 흐름의 모의에 유리한 것이 장점으로 알려져 있다. 또한, 다른 무엇보다도, 이송방정식의 처리에 있어서, 상류이송기법에 의하여 산정되는 흐름률 자체가 필요한 안정성을 제공하기 때문에 추가적인 안정항

이 필요하지 않다는 것이 장점이라고 할 수 있다.

천수방정식에 대한 적용의 첫시도는 [4]에 의하여 시간적분에 Euler 기법을 적용한 것이다. 이후 공간 차분의 정확성에 상응하는 시간 적분의 정확도 향상에 대한 필요 때문에, 공간 차분에 불연속 갤러킨(DG) 기법과, 시간차분에 Runge-Kutta 기법을 결합한 Runge-Kutta 불연속 갤러킨 (RKDG) 기법으로 이론적인 발전이 이루어져, 역시 1차원, 2차원 천수방정식에 대하여 HLL 흐름률을 적용한 [10]의 연구가 보고되었다. 최근에는 [6]에 의하여 상용 모델인 ADCIRC의 유사이동 모델에 포함 된 바 있다.

최근 증가하고 있는 RKDG 기법의 적용과 이론의 발전에 맞추어 본 연구에서는 1차원 천수방정식에 적용이 가능한 RKDG 기법 모델을 개발하고 이를 천이류(transcritical flow)의 해석에 적용하였다.

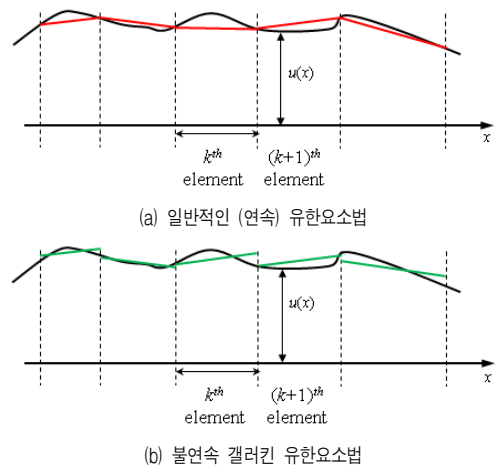


그림 1. 일반적인 유한요소법과 불연속 갤러킨 유한요소법의 비교

II. 본 론

1. 지배방정식과 수치해법

1.1 지배방정식

유체의 운동을 기술하는 가장 일반적인 방정식은 Navier-Stokes 방정식으로 알려져 있다. 그러나, 수평 방향에 비하여 연직방향의 길이가 작은 유체현상은 Navier-Stokes 방정식을 수직 연직방향으로 적분한 천

수방정식 (shallow water equation)이 선호되고 있다. 깊이가 방향보다 길이나 수평방향으로 스케일이 큰 하천이나, 호수, 해양 등이 이에 해당한다. 특히 1차원 천수 방정식은 보통 St. Venant 방정식[11]으로 불리며, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1)$$

여기서 x 는 수평좌표, t 는 시간이다. 본 연구에서는 문제를 단순화하기 위하여 단면이 직사각형으로 일정한 경우에 한정하였다. 이 때, 벡터 \mathbf{U} , \mathbf{F} , \mathbf{S} 는 각각 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} h \\ hu \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} hu \\ u^2h + gh^2/2 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

[그림 2]에 보인 바와 같이 h 는 수심, u 는 x -방향의 수심평균 유속, g 는 중력가속도이다. S_0 는 바닥 저면의 경사로서, $S_0 = -dz/dx$ 이며, 마찰에 의한 에너지 손실은 다음과 같이 Manning 공식에 의하여 정의한다.

$$S_f = n^2 hu |hu| / h^{10/3} \quad (5)$$

여기서 n 은 Manning의 조도계수이다. 이러한 문제에는, 예를 들어 $x = 0$ 에 불연속이 존재하는 경우에 다음과 같은 초기 조건이 필요하다.

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases} \quad (6)$$

1.2 불연속 갤러킨 기법

불연속 갤러킨 기법에서는 (연속) 유한요소법의 경우와 같이 각각의 개별 요소에 대하여 식 (1)에 가중함수 (weighting function)를 곱한 후에 요소내에서 적분 (integration)이 이루어진다. 또한 \mathbf{F}_h 에 부분적분 (integration-by-parts)을 통하여 요소경계에서의 흐름률(flux) 항, $\hat{\mathbf{F}}_h$ 으로 재현될 수 있도록 한다[5].

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega_e} w_h \mathbf{U}_h d\Omega - \int_{\Omega_e} \frac{dw_h}{dx} \mathbf{F}_h d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega_e} w_h \hat{\mathbf{F}}_h d\Gamma = \int_{\Omega_e} w_h \mathbf{S}_h d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 w_h 는 가중함수(weighting function)이다. 요소 경계에서 정의되는 흐름률 $\hat{\mathbf{F}}_h$ 는 풍상(upwind) 기법을 이용하여 산정하며, 적용 경계에서는 불연속성이 허용되므로, 식 (6)에서 왼쪽과 오른쪽의 상태를 나타내는 \mathbf{U}_L 과 \mathbf{U}_R 이 주어진다. 국부적인 리만 문제 (local Riemann problem)로서 해를 얻을 수 있게 된다.

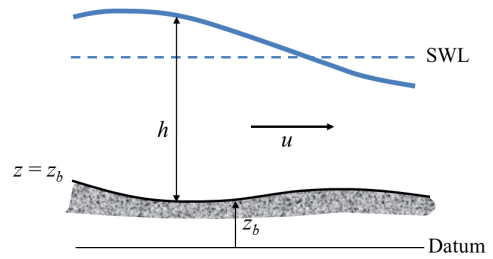


그림 2. St. Venant 방정식(1차원 천수방정식)을 위한 수심 (h)과 단면평균 유속(u)의 정의

1.3 시간적분 - Runge-Kutta 기법

동일한 형태의 가중함수와 형상함수를 사용하는 표준적인 Galerkin 기법을 적용하여 식 (7)을 이산화하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} \bar{\mathbf{U}}_h = \mathbf{L}_h(\bar{\mathbf{U}}_h) \quad (8)$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량행렬(mass matrix)이며, \mathbf{L}_h 는 식 (7)로부터 구한 공간방향 연산자이다. '-'는 절점변수 값(nodal value)을 나타낸다. 식 (8)의 시간적분에는 다음 2차 Runge-Kutta 기법을 사용하였다.

$$\bar{\mathbf{U}}_h^1 = \bar{\mathbf{U}}_h^n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^n) \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_h^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{U}}_h^1 + \bar{\mathbf{U}}_h^n) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}_h(\bar{\mathbf{U}}_h^1) \quad (10)$$

1.4 기울기 제한자(slope limiter)의 적용

불연속 갤러킨 기법에서 고차 정확도의 구현에는 수

치적인 진동이 불가피하므로 이를 제한하는 기법이 필요하다. 특히 기울기가 큰 불연속 흐름 주위에서는 비현실적인 진동으로 인하여 때로는 안정성에 문제를 발생시키기도 한다. 이로 인하여 불연속 포착법(discontinuity capturing) 또는 적절한 기울기 제한자(slope limiter) 등이 적용되고 있으며, 본 연구에서는 minmod 기울기 제한자(slope limiter)를 사용하였다.

본 연구에서 사용할 MUSCL (Monotone Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws) minmod 기울기 제한자에서는 각 요소에서 변수의 값은 요소 중심에서 평균값을 가지며 선형적으로 변화한다고 가정한다.

$$U_{h,i} = \bar{U}_{h,i} + (x - x_{0,i}) \minmod \left(\frac{\partial U_{h,i}}{\partial x}, \frac{\bar{U}_{h,i+1} - \bar{U}_{h,i}}{\Delta x}, \frac{\bar{U}_{h,i} - \bar{U}_{h,i-1}}{\Delta x} \right) \quad (11)$$

여기서 아래첨자 h 는 근사해로서 수치해를, i 는 1차원 요소 번호이며, $x_{0,i}$ 는 i 요소의 중심 좌표이다. $\bar{U}_{h,i}$ 는 그 요소에서 평균값을 의미한다. minmod 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\minmod(a_1, a_2, \dots, a_m) = \begin{cases} s \min_{1 \leq j \leq m} |a_j|, & |s| = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

여기서 $s = \left[\sum_{j=1}^m \text{sgn}(a_j) \right] / m$ 으로 정의하며, sgn은 부호함수(signum function)이다. 식 (12)의 기울기 제한자는 다소 소산적(dissipative)이나 안정적(stable)인 것으로 알려져 있다[5].

2. 수치모형 적용 사례

우선 지배방정식인 식 (1)을 이용하여 1차원 댐 붕괴류(dam-break flow)를 모의하였다. 또한, 지형변화에

따른 도수현상을 포함한 천이류를 모의하였다.

2.1 댐 붕괴류(1차원) 모의

[그림 3]은 마찰이 없는 1차원 수평 하도에서 댐 붕괴류(dam-break flow)를 모의하기 위한 초기조건을 보인 것이다. 전체 -1,000 m에서 +1,000 m 구간을 400개의 격자로 나누었으며 ($\Delta x = 5$ m), 1차원 구간좌표의 원점인 $x = 0$ 에 설치된 댐이 시간 $t = 0$ 에 순간적으로 붕괴되는 상황을 가정하였다. 댐 붕괴류는 흐름의 특성이 변하는 천이류 흐름에 대한 고전적인 사례로서 많은 연구자들이 시도하였으며, 이에 대한 이론적인 해는 고전적인 [9]의 해부터, 최근 연구인 [12]을 포함한 다수의 문헌에 소개되어 있다. 그림 4는 댐 상류부의 수심 h_u 가 10 m일 때, 하류부 수심 h_d 가 0.5 m, 0.0001 m인 두 경우에 대하여, 댐 붕괴류를 모의하여, $t = 50$ sec 일 때, 수심의 분포를 보인 것이다. 두 경우 모두 2차 요소, 즉, 한 요소에 3개의 절점이 있는 요소를 사용하였으며, 시간간격은 다음 CFL 조건을 만족하도록 하였다.

$$\Delta t \leq C \frac{(\Delta x)_{\min}}{(u + \sqrt{gh})_{\max}} \quad (13)$$

여기서 C 는 CFL 수로서 1.0 을 사용하였다. 본 연구에서 개발된 모델에 의한 결과는 댐 붕괴류에 대한 천수방정식의 이론적인 해인 [9]의 해와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

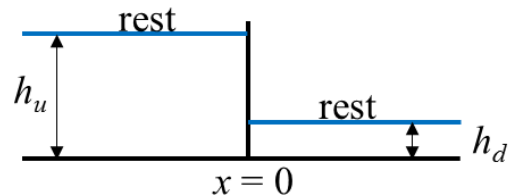


그림 3. 댐 붕괴류(dam-break flow)

[그림 5]는 [그림 4]에 보인 댐 붕괴류 모의에 대하여, 역시 같은 시간인 $t = 50$ sec에 유속의 분포를 보인 것이다. 대체로 급격하게 변하는 유속의 분포를 잘 모의한 것으로 보이며, 이를 통하여 댐 붕괴류 흐름의 특

성을 잘 파악할 수 있다.

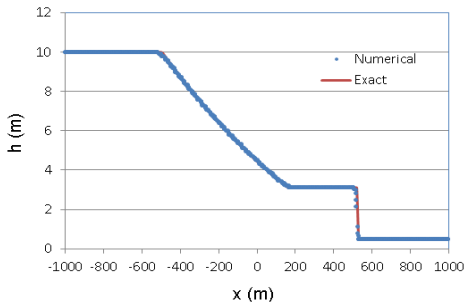
2.2 저면 지형 변화에 따른 1차원 천이류

[그림 6]은 역시 마찰이 없는 1차원 하도의 천이류를 모의한 것이다. 바닥 저면의 하상고 변화는 다음과 같다.

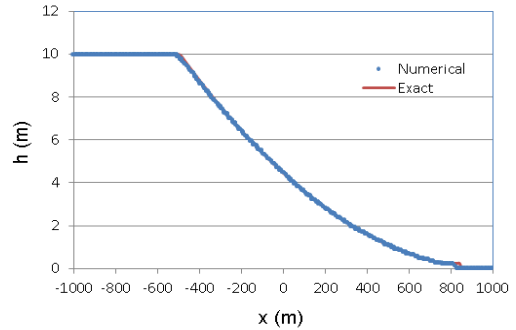
$$z_b = \begin{cases} 5 \sin^2 \left[\frac{\pi(x-125)}{750} \right], & x \in [125, 875] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

하천은 폭이 1 m인 직사각형 하도를 가정하였으며, 유입 경계조건으로서 $x = 0$ m에 수심 10.0 m와, 유량 $20.0 \text{ m}^3/\text{s}$ 를, 하류 경계 $x = 1,000$ m에 수심 7.0 m를 부여하여 정상상태(steady state)에 도달할 때 계산을 수행하였다. 전체 영역을 40개의 요소로 나누어, 영역의 크기 $\Delta x = 25$ m가 되도록 하였다. 전 구간에 대하여 4차 오더(order)의 요소를 사용하였다. 수치모의는 전 구간에서 수심의 변화가 정해진 기준치 내에 도달했을 때를 정상상태 (steady state)로 보고, 중단하였다.

[그림 6]에 보인 바와 같이 에너지 방정식을 이용한 정확해, [7]의 수치해와 비교하여 잘 일치하며, 도수 현상을 2개 요소 내에서 정확하게 모의하고 있음을 알 수 있다. [그림 7]은 $Fr = u / \sqrt{gh}$ 로 정의되는 프루드 수 (Froude number)의 변화를 나타낸 것이다. 프루드 수가 1에 도달하여 상류상태에서 사류상태로 변화가 일어나는 지점은 $x = 680$ m 부근으로서, 둔덕의 정상을 훨씬 지난 지점임을 알 수 있다. 그 후 약 100 여 m의 사류구간을 지나, 도수를 통하여 상류상태로 도달하게 된다.



(a) 상류수심 10 m, 하류수심 0.5 m 인 경우



(b) 상류수심 10 m, 하류수심 0.0001 m 인 경우

그림 4. 1차원 댐 붕괴류 모의(댐이 $t = 0$ sec에 붕괴시, $t = 50$ sec 일 때의 수심)

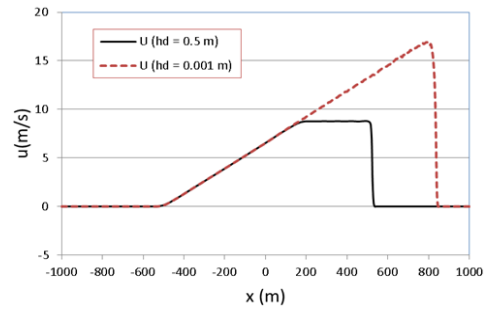


그림 5. 1차원 댐 붕괴류 모의에서 유속의 분포 (댐이 $t = 0$ sec에 붕괴시, $t = 50$ sec 일 때)

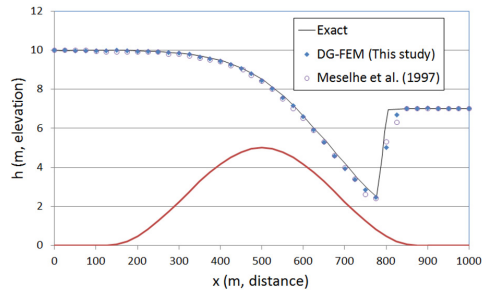


그림 6. 보 월류흐름 모의

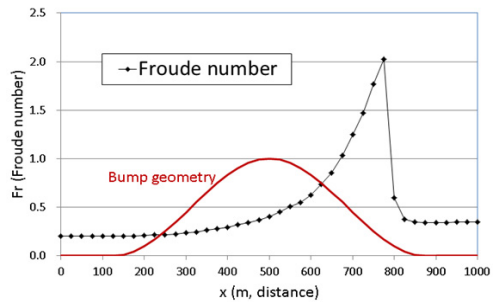


그림 7. Froude 수의 변화

III. 결론

댐 붕괴류, 보 월류 흐름의 모의 등의 천이류는 기존의 수치모형으로 정확하게 모의할 수 없는 어려움이 있었다. 본 연구에서는 최근 국내외에서 활발한 연구가 진행되고 있는 불연속 갤러킨 기법 기반의 유한요소법 모델을 개발하고 이를 1차원 천이류에 적용하였다.

공간방향의 차분에는 개별요소 경계면에서 불연속을 허용하는 불연속 갤러킨 (DG) 기법을, 미분방정식의 시간적분에 Runge-Kutta 기법을 적용하는 RKDG 기법을 결합한 RKDG 기법을 1차원 천수방정식에 적용하였다. 또한, 고차 근사에서 흔히 발생하는 불필요한 수치적 진동을 제어하기 위하여 기울기 제한자를 적용하였다. 적용결과를 이론적인 해, 다른 수치 모의 결과와 비교하여 대체로 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

본 연구에서 개발한 모형의 2차원 확장의 경우, 요소 경계면에서 흐름률과 기울기 제한자에 대한 추가 연구가 필요하며, 현재 진행 중에 있다. 또한, 단면 변화가 심한 자연하천을 대상으로 적용이 가능하도록 1차원 모형을 확장할 필요가 있으며, 이에 대한 연구 역시 진행 중이다.

참 고 문 헌

- [1] 김지성, 한건연, "Riemann 해법을 이용한 1차원 개수로 수리해석 - 자연하도 적용", 한국수자원학회 논문집, 제42권, 제4호, pp.271-279, 2009.
- [2] 이남주, "KU-RLMS 모형의 잠김-드러남 기법 적용성 평가", 한국콘텐츠학회논문지, 제11권, 제4호, pp.448-457, 2011.
- [3] 이해균, "테일러-갤러킨 유한요소법에 의한 하도 추적 모형의 적용 -홍수시 하천 유량 모의", 한국콘텐츠학회논문지, 제11권, 제1호, pp.404-410, 2011.
- [4] G. Chavent and G. Salzano, "A finite element method for the 1d water flooding problem with gravity," *Journal of Computational Physics*, Vol.45, pp.307-344, 1982.
- [5] J. S. Hesthaven and T. Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*, Springer, 2007.
- [6] E. J. Kubatko, J. J. Westerink, and C. Dawson, "An unstructured grid morphodynamic model with a discontinuous Galerkin method for bed evolution," *Ocean Modelling*, Vol.15, pp.71-89, 2006.
- [7] E. A. Meselhe, F. Sotiropoulos, and F. M. Holly, "Numerical simulation of transcritical flow in open channels," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.23, No.9, pp.774-782, 1997.
- [8] W. H. Reed and T. R. Hill, "Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation," *Scientific Laboratory Report*, Los Alamos, LA-UR-73-479, 1973.
- [9] A. Ritter, "Die fortpflanzung der wasserwellen," *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, Vol.36, No.33, pp.947-954, 1892
- [10] D. Schwanenberg and J. Köngeter, "A discontinuous Galerkin method for the shallow water equations with source terms," in *Discontinuous Galerkin Methods* by Cockburn, Karniadakis and Shu (eds), 2000.
- [11] B. Saint-Venant, "Theorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues de rivieras et a l'introduction des marces dans leur lit," *Comptes Rendus de l'Academic des Sciences*, Vol.73, Paris, pp.147-154, pp.237-240, 1871.
- [12] C. Wu, G. Huang, and Y. Zheng, "Theoretical solution of dam-break shock wave," *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol.125, No.11, pp.1210-1215, 1999.

저 자 소 개

이 해 균(Hae-Gyun Lee)

정회원



- 1995년 2월 : 서울대학교 토목공학과(공학사)
- 2007년 7월 : 미국 아이오와 대학교 토목환경공학과(공학박사)
- 2009년 3월 ~ 현재 : 단국대학교 토목환경공학과 교수

<관심분야> : 유한요소법, 전산유체역학, 병렬 프로그래밍

이 남 주(Nam-Joo Lee)

종신회원



- 1987년 2월 : 연세대학교 토목공학과(공학사)
- 1993년 8월 : 서울대학교 토목환경공학과(공학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재 : 경성대학교 토목환경공학과 교수

<관심분야> : 하천공학, 수치모델링